

# Neki primeri numeričke simulacije ravanskih tokova

Dr Miodrag Jovanović, dipl. inž.  
Dejana Djordjević, dipl. inž.  
*Gradjevinski fakultet Beograd*

## Rezime

U ovom radu se govori o mogućnostima primene ravanskih računskih modela u hidrotehničkoj praksi. Prikazan je jedan od takvih modela, baziran na jednačinama koje su dobijene osrednjavanjem po cubini toka, a koje se rešavaju pomoću eksplisite MacCormack-ove sheme konačnih razlika. Ova shema razdvojenih operatora je zadnjih godina u svetu veoma aktuelna, jer omogućava istovremeno obuhvatanje različitih režima tečenja i dobru reprodukciju talasa sa strmim čelom. Mogućnost korišćenja ovog modela u praksi je ili strovana sa nekoliko primera koji obuhvataju probleme rušenja brane, tečenja kroz suženje i tečenja u blizini napera.

## 1 Uvod

Poznato je da se određene vrste tokova kao što su na primer, tokovi u koritu složene geometrije ili u koritu sa inuncacijama, strujanja u blizini objekata, poplavni talasi nastali usled rušenja brane ili nasipa u širokoj rečnoj dolini, ne mogu pouzdano analizirati bez primene ravanskih (prostorno dvodimenzionalnih) računskih modela. Reč je o modelima koji su primenjivi na plitke oblasti strujanja i omogućavaju numeričku simulaciju složenih strujnih polja, sa brzinama osrednjenim po dubini toka. Veća pouzdanost hidrauličkih proračuna doprinosi da se projektovanje bitno unapredi. Navešće se nekoliko primera. Analiza poremećaja do kojih dolazi u neposrednoj blizini objekata u rečnom koritu (mostova, regulacionih gradjevina, itd.), daje mogućnost da se ove gradjevine optimalno dispoziciono i konstruktivno projektuju. Sračunato polje brzina može se koristiti kao osnova za izbor optimalne sheme pregradjivanja toka, kao i za dimenzionisanje kamene ili betonske obloge. Proračuni prostiranja poplavnih talasa usled rušenja brana ili nasipa omogućavaju da se u ravničarskim predelima tačnije definišu zone potencijalnog plavljenja, da se odredi trasa i visina nasipa, itd.

U ovom radu će se opisati jedan od modela ravanskog tečenja koji je razvijen i korišćen na Gradjevinskom fakultetu u Beogradu [2],[8], [9]. Reč je o modelu

koji se bazira na MacCormack-ovoj eksplicitnoj shemi razdvojenih operatora koja je detaljno opisana u brojnoj specijalizovanoj literaturi (na primer [1],[3],[5]), a koja, kao što će se pokazati u nastavku, ima određene prednosti u odnosu na mnoge druge sheme. U ovom radu će se prikazati i primeri koji ilustruju mogućnosti primene navedenog računskog modela u praksi.

## 2 Jednačine ravanskog toka

Ravansko, prostorno dvodimenzionalno tečenje opisuje se jednačinama održanja mase i količine kretanja u kojima su zavisno promenljive veličine osrednjene po dubini toka:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = \vec{T} \quad (1)$$

gde je:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix} \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{bmatrix} \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(I_{ox} - I_{tx}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ g(I_{oy} - I_{ty}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (3)$$

U gornjim jednačinama,  $t$  je vreme,  $h$  je dubina, a  $u$  i  $v$  komponente brzine u koordinatnim pravcima  $x, y$  (osrednjene po dubini toka) u posmatranom računskom čvoru. Nagibi dna su označeni sa  $I_{ox}$  i  $I_{oy}$ , dok su nagibi linije energije definisani na uobičajeni način, pomoću Manning-ove jednačine:

$$I_{tx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}; \quad I_{ty} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (4)$$

Turbulentnost toka se modelira uvođenjem difuzionih članova u jednačinama održanja količine kretanja, uz primenu koeficijenta turbulentne difuzije  $\nu_t$  (3). Uvođenje ovih članova čini da sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina (1), postane nezatno paraboličan, mada, obzirom na relativno male vrednosti koeficijenta  $\nu_t$ , u osnovi zadržava hiperbolički karakter.

Za rešavanje datog sistema jednačina potrebno je definisati početne i granične uslove. Početni uslov čini prostorni raspored zavisno promenljivih ( $u, v, h$ ) u trenutku  $t=0$ . U mirnom režimu tečenja potrebno je definisati dva granična uslova na ulaznim granicama (na primer brzine  $u, v$ ), a jedan na izlaznim. U burnom režimu, na ulaznim granicama je potrebno zadati vremenske zavisnosti sve tri zavisno promenljive, a na izlaznim, definisanje graničnog uslova nije potrebno. Uz čvrstu konturu oblasti strujanja zadaje se nulta vrednost obe komponente brzine ukoliko je  $\nu_t > 0$ , odnosno nulta vrednost samo komponente upravne na granicu, ukoliko je  $\nu_t = 0$ .

### 3 Rešavanje osnovnih jednačina

Sistem jednačina (1) može se integrisati različitim numeričkim metodama. Najčešće se koriste sheme konačnih razlika, sa pravolinijskim ili krivolinijskim računskim mrežama. U nastavku će se ukratko opisati jedna računaska shema koja se, zbog nekih dobrih svojstava, danas u svetu često koristi u hidraulici otvorenih tokova [3],[4],[5],[6]. Reč je o MacCormack-ovoj eksplicitnoj shemi, koja spada u metode razdvajanja operatora, i zasniva se na etapnom rešavanju sistema jednačina (1). Njene dobre osobine su:

- Tačnost drugog reda po prostoru i vremenu i nizak stepen numeričke difuzije;
- Mogućnost jednovremenog obuhvatanja oba režima tečenja - mirnog i burnog;
- Mogućnost modeliranja strmog čela usamljenog talasa bez dodatnih jednačina;

Proračun se po računskoj shemi MacCormack obavlja u dve etape na svakom vremenskom nivou:

- Početno rešenje ("prediktor"):

$$V_{i,j}^p = V_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} B_x G_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta y} B_y H_{i,j} + \Delta t T_{i,j} \quad (5)$$

- Korigovano rešenje ("korektor"):

$$V_{i,j}^c = V_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{F}_x G_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta y} \mathcal{F}_y H_{i,j}^p + \Delta t T_{i,j}^p \quad (6)$$

- Konačno rešenje:

$$V'_{i,j} = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{i,j}^c) \quad (1 \leq i \leq N; 1 \leq j \leq M) \quad (7)$$

U jednačinama (5)-(7),  $V_{i,j}$  je vektor zavisno promenljivih sa prethodnog vremenskog nivoa,  $V_{i,j}^p$  i  $V_{i,j}^c$  su odgovarajući vektori početnog i korigovanog rešenja, a  $V'_{i,j}$  je vektor definitivnog rešenja. Nepoznate brzine se naknadno računaju na osnovu  $V'_{i,j}$ :  $u'_{i,j} = (uh)'/h'$  and  $v'_{i,j} = (vh)'/h'$ .

Operatori prostorne diskretizacije  $\mathcal{B}$  i  $\mathcal{F}$  u jednačinama (5) i (6) definišu konačne razlike "unazad" i "unapred"; na primer:

$$B_x G_{i,j} = G_{i,j} - G_{i-1,j} \quad \mathcal{F}_x G_{i,j} = G_{i+1,j} - G_{i,j} \quad (8)$$

gde indeksi "i" i "j" označavaju brojeve računskih čvorova u pravcima  $x$  i  $y$ . U etapi korektora se uvek koristi operator suprotan onom koji je korišćen u etapi prediktora. Redosled operatora konačnih razlika (prikazan u jednačinama (5) i (6)) može se menjati u svakom vremenskom koraku po koordinatnim pravcima, a kako ima ukupno  $2^2=4$  različite mogućnosti, to se nakon svakog četvrtog računskog koraka, sekvenca operatora ponavlja (Tabela 1). Ovo je vrlo važno obeležje MacCormack-ove sheme, jer omogućava da se uspešno obuhvate različiti režimi tečenja koji se istovremeno mogu pojaviti duž razmatranog toka [5].

Tabela 1. Sekvence konačnih razlika  
Table 1. Difference operator sequence

Time step	Prediktor		Korektor	
	$x$	$y$	$x$	$y$
1	$\mathcal{B}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
2	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{B}$
3	$\mathcal{B}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{B}$
4	$\mathcal{F}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{F}$

Zamenom parcijalnih izvoda u osnovnim jednačinama konačnim razlikama prema izloženim principima, mogu se izvesti algebarske jednačine za svaku računsku etapu iz kojih se zatim, direktno računaju vrednosti nepoznatih.

Stabilnost proračuna uslovljena je zadovoljenjem poznatog kriterijuma Courant-Friedrichs-Lewy-ja za eksplicitne sheme [1],[5]:

$$\Delta t \leq \min \left( \frac{\Delta x}{(u + \sqrt{gh})_{max}}, \frac{\Delta y}{(v + \sqrt{gh})_{max}} \right) \quad (9)$$

#### 4 Primeri primene računске metode

Opisana računska metoda je proverena simulacijom odredjenog broja laboratorijskih eksperimenata [9]. Kao ilustracija mogućnosti njene primene u praksi poslužiće nekoliko hipotetičkih primera.

**Prolom brane/nasipa.** Razmatra se slučaj delimičnog rušenja brane dužine 200 m. Pretpostavlja se da je došlo do trenutnog formiranja breše na dužini od 75 m, pri početnim dubinama uzvodno i nizvodno od brane od  $h_1=3$  m, odnosno  $h_2=1$  m. Slika 1 prikazuje stanje 15 s nakon rušenja. Rečna dolina nizvodno od brane je horizontalna.

U simulaciji je korišćen prostorni korak  $\Delta x = \Delta y=5$  m (1600 čvorova), dok je vremenski korak u toku proračuna promenljiv i automatski je računat iz uslova stabilnosti (9). Usvojena vrednost Manning-ovog koeficijenta rapavosti iznosi  $n=0.02 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ . U početnom trenutku sve brzine su jednake nuli, osim u profilu otvora, gde je komponenta brzine normalna na osovinu pregrade zadata na osnovu teorijskog rešenja  $(8/27)\sqrt{gh_1}$ , dok je početna dubina u osovini otvora zadata takodje na osnovu teorijskog rešenja,  $(4/9)h_1$ .

Slika 1. Ravansko tečenje kao posledica delimičnog rušenja brane (t=15 s)

Figure 1. Two-dimensional unsteady flow as a consequence of partial dam failure (t=15 s)

Na Slici 2 prikazan je uzdužni profil po osovini otvora (breše). Može se konstatovati da je strmo čelo talasa verno reprodukovano zahvatajući samo dva računska polja, što govori o izvanrednim svojstvima MacCormack-ove sheme.

Slika 2. Prolom brane - uzdužni profil po osovini otvora (t=15 s)

Figure 2. Dam break problem - longitudinal water surface profile (t=15 s)

Na Slici 3 prikazane su linije jednakih dubina i polje brzine za isti slučaj, 15 s nakon rušenja pregrade. Na osnovu dobijenih rezultata, može se zaključiti da se opisani model može uspešno koristiti za analizu hidrauličkih posledica rušenja brana (ili nasipa) u područjima gde topografski uslovi nameću ravansko tečenje.

Slika 3. Prolom brane - izolinerije i polje brzine (t=15 s)

Figure 3. Dam break problem - contour lines and velocity field (t=15 s)

**Tečenje kroz suženje.** Drugi primer primene opisane metode je isticanje kroz suženje u horizontalnom kanalu pravougaonog preseka širine 200 m [2]. Odnos širine otvora i širine korita je 0.25. Ovaj slučaj je u praksi vezan za probleme mostovskih suženja, pregradjivanja računih tokova, i dr. U numeričkom smislu ovaj primer je interesantan i sa gledišta graničnih uslova na otvorenim granicama (uzvodnoj i nizvodnoj), kao i modeliranja turbulencije.

U proračunu su korišćeni geometrijski podaci i računski parametri prethodnog primera, s tim što je u početnom trenutku zadata dubina u svim čvorovima od 2.0 m. Uzvodni granični uslovi su definisani u vidu nivograma (Tabela 2) i uslova da je komponenta brzine upravna na osovini pregrade jednaka nuli. Na nizvodnom kraju je korišćen uslov "slobodnog oticaja". Na čvrstim granicama je zadat uslov da su obe komponente brzine jednake nuli. Usvojena je vrednost koeficijenta turbulentne viskoznosti  $\nu_t=0.02 \text{ m}^2/\text{s}$ . (U principu, vrednost ovog parametra se može, analogno Manning-ovom koeficijentu trenja, kalibrisati na osnovu merenja, ukoliko ova postoje).

Tabela 2. Tečenje u suženju - uzvodni granični uslov

Table 2. Flow through constriction - the upstream boundary condition

t (s)	0	50	300
h (m)	2.0	2.30	2.30

Na Slici 4 je prikazana složena strujna slika u zoni suženja 2.3 min nakon početka podizanja nivoa na uzvodnom kraju posmatrane deonice. Može se uočiti pojava vrtloga u "mrtvim" zonama sa obe strane glavnog toka, koji je koncentrisan u pravcu osovine otvora.

Slika 4. Ravansko tečenje kroz suženje (t=2.3 min)

Figure 4. Two-dimensional flow through constriction (t=2.3 min)

Na slikama 5 i 6 prikazani su poprečni presek kroz osu vrtlogâ (presek a-a) i uzdužni presek kroz osu vrtloga sa desne strane suženja (presek b-b). Zapaža se sniženje nivoa u zoni vrtlogâ. Ovaj primer pokazuje da se pomoću opisanog modela

može razmatrati i ustaljeno tečenje, ako su u toku proračuna uzvodni granični uslovi konstantni (po vremenu nepromenljivi).

**Slika 5. Poprečni presek kroz osu vrtlogâ (presek a-a; t=2.3 min)**

**Figure 5. Cross section through the center-line of the vortices (cross section a-a; t=2.3 min)**

**Slika 6. Uzdužni presek kroz osu vrtloga (presek b-b; t=2.3 min)**

**Figure 6. Longitudinal cross section through the center-line of the vortex (cross section b-b; t=2.3 min)**

**Strujanje oko napera.** Treći primer tretira problem strujanja u blizini napera. Naperi su neprelivni, dužine 30 m. Nalaze se u rečnom koritu horizontalnog dna, pravougaonog poprečnog preseka širine 200 m. Razmatrana deonica je "pokrivena" računskom mrežom sa 1600 čvorova. U proračunu su korišćeni sledeći parametri: Manning-ov koeficijent rapavosti  $n=0.04 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ , koeficijent turbulentne viskoznosti  $\nu_t=0.02 \text{ m}^2/\text{s}$ , početna dubina 2 m, prostorni koraci  $\Delta x=\Delta y=5 \text{ m}$ . Vremenski korak je promenljiv, i računat je iz uslova (9). Uzvodni granični uslovi su zadati u obliku nivograma (Tabela 2) i nulte vrednosti brzine upravne na pravac glavnog toka. Nizvodni granični uslov je zadat u obliku "slobodnog oticaja".

Najpre je razmatran slučaj jednog napera. Slika 7 prikazuje vektore brzina pri potpuno razvijenom strujnom polju u zoni napera ( $t=4.5 \text{ min}$ ). Ova strujna slika može da posluži za određivanje potrebnog odstojanja između napera. Prema iskustvenoj preporuci, ovo odstojanje se određuje iz uslova da povratni vrtlog koji se javlja u medjunaperskom polju, treba da dosegne nizvodni naper u zoni njegove donje trećine. Na osnovu ove preporuke i rezultata prikazanih na Slici 7, proizilazi da bi nizvodni naper trebalo postaviti na odstojanju od oko 60 m.

U literaturi [7] se, polazeći od pretpostavke o jednolikom tečenju i od rezultata laboratorijskih ispitivanja, predlaže obrazac za ocenu potrebne dužine medjunaperskog polja  $L_n$ :

$$L_n \leq 0.6 \frac{R^{4/3}}{2gn^2} \quad (10)$$

gde je  $R$  hidraulički radijus, a  $n$  Manning-ov koeficijent rapavosti. Pri datim uslovima tečenja, ovaj obrazac daje vrednost  $L_n \leq 56 \text{ m}$ . Razlika u odnosu na prethodnu vrednost je oko 7%, što ukazuje na činjenicu da su rezultati dobijeni proračunom strujnog polja u saglasnosti sa polu-empirijskim obrascem koji se najčešće koristi u praksi.

**Slika 7. Strujna slika u blizini jednog napera (t=4.5 min)**

**Figure 7. Flow field in the vicinity of a groyne (t=4.5 min)**

U sledećem koraku je sračunato strujno polje u okolini sistema od dva napera. Naperi su dužine 30 m, širine 5 m, na medjusobnom odstojanju od 50 m. Svi ostali parametri su isti kao u slučaju strujanja oko jednog napera. Na Slici 8 koja prikazuje

polje brzina 4.3 min nakon početka simulacije, jasno se može uočiti pojava povratnog vrtloga u medjunaperskom prostoru, što kvalitativno ukazuje da je u konkretnom slučaju dužina medjunaperskog polja dobro određena i da bi se verovatno, postigli efekti zasipanja koje sistem napera i treba da obezbedi.

**Slika 8. Strujna slika u blizini dva napera ( $t=4.3$  min)**

**Figure 8. Flow field in the vicinity of two groynes ( $t=4.3$  min)**

## 5 Zaključci

Numerički modeli ravanskog neustaljenog tečenja, imaju velike mogućnosti primene u praksi u slučajevima kada se na osnovu topografskih uslova ne može unapred odrediti pravac tečenja, kao i u slučajevima kada je neophodno sagledati efekte projektom predviđenih zahvata.

Eksplisitna shema razdvojenih operatora MacCormack, koja je u ovom radu primenjena za numeričku simulaciju ravanskih tokova, ima tu dobru osobinu da podjednako dobro reprodukuje i blago i naglo promenljivo tečenje, kao i strmo čelo talasa (bez numeričke difuzije - rasplinjavanja), pri čemu ne zahteva poseban algoritam za njegovo otkrivanje i praćenje. Dobijena rešenja su stabilna i fizički realna.

Opisani numerički model se može koristiti za rešavanje različitih problema hidrotehničke prakse, kao što je na primer određivanje plavnih područja u slučaju rušenja brane ili nasipa, analiza uticaja prepreka na strujnu sliku u rečnom koritu, izbor regulacionih elemenata (razmak i dužina napera), itd.

## Literatura

1. Anderson, D.A., Tannehill, J.C., Pletcher, R.H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1984.
2. Djordjević, D., *Proračun strujnog polja u blizini regulacionih gradjevina*, Diplomski rad, Gradjevinski fakultet Beograd, 1992.
3. Fennema, R.J., Chaudhry, M.H., *Explicit Methods for 2D Transient Free-Surface Flows*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 116, No.8, 1990.
4. Fennema, R.J., Chaudhry, M.H., *Explicit Numerical Schemes for Unsteady Free-Surface Flows With Shocks*, Water Resources Research, Vol. 22, No. 13, Dec. 1986.
5. Garcia, R., Kahawita, R.A., *Numerical Solution of the St. Venant Equations With the MacCormack Finite-Difference Scheme*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 6, 1986.
6. Garcia-Navaro, P, Saviron, J.M., *McCormack's Method for the Numerical Simulation of One-Dimensional Discontinuous Unsteady Open Channel Flow*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 30, No. 1, 1992.
7. Jansen P.Ph. et al. *Principles of River Engineering*, Pitman, 1979.

8. Jovanović, M., *Primena računске sheme MacCormack za proračun ravanskog neustaljenog tečenja*, X. Savetovanje Jugoslovenskog društva za hidraulička istraživanja, Sarajevo, 1990.
9. Jovanović, M., Djordjević, D., *Experimental Verification of the MacCormack Numerical Scheme*, Hydrosoft 94, Porto Carras, 1994.

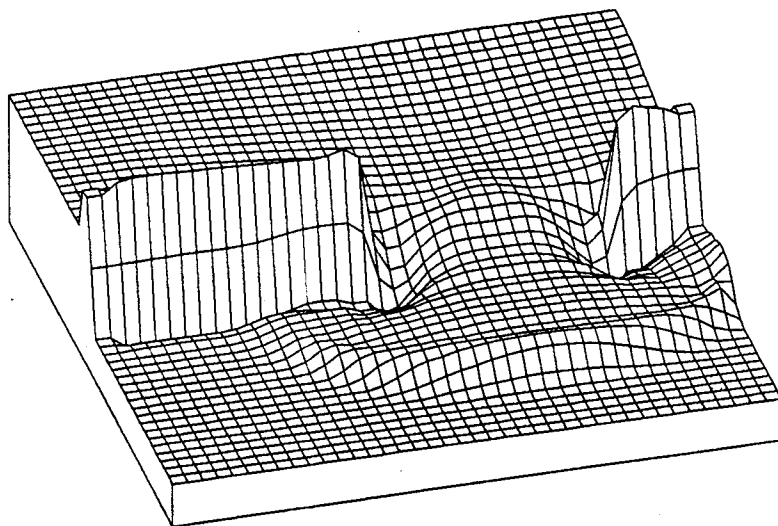
## **Some Examples of Numerical Simulation of Two-Dimensional Flows**

### **Abstract**

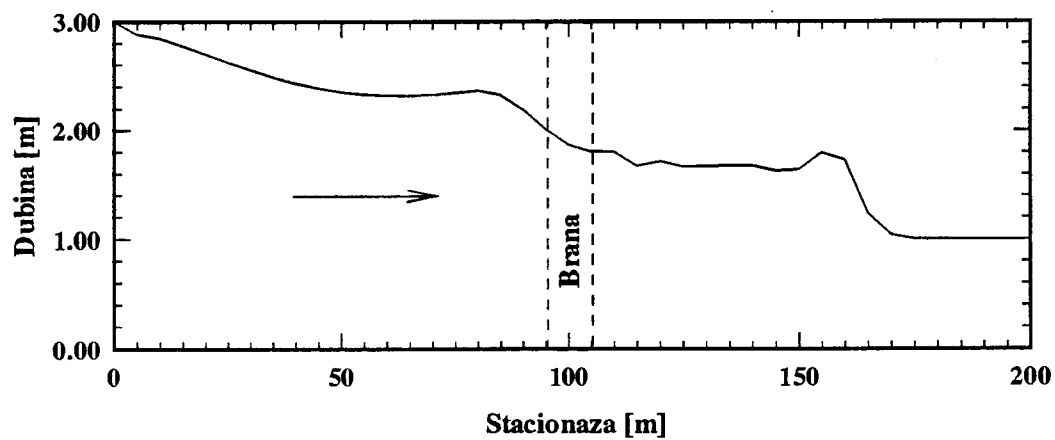
The possibilities of application of depth-averaged two-dimensional numerical models in hydraulic engineering are discussed in this paper. One of such models, based on the explicit time-splitting MacCormack finite difference scheme, has been briefly described. In the last few years, this particular scheme has become very popular in open-channel hydraulics due to its good shock capturing capabilities and the fact that different flow regimes, which might simultaneously occur in different parts of the channel, can be treated at the same time. Several practical examples are used for illustration, including dam-break flow, flow through constriction and flow in the vicinity of groynes.

**Key words:** unsteady flow, two-dimensional flow, numerical models, dam-break flows, constrictions, groynes.

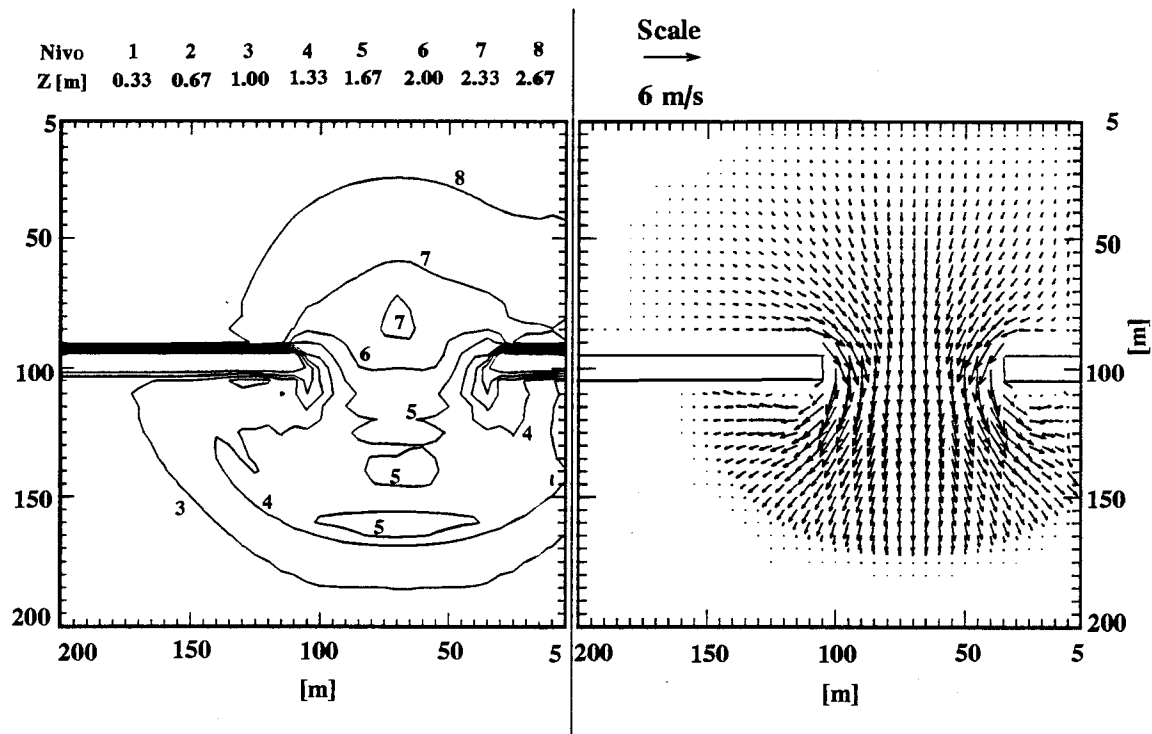




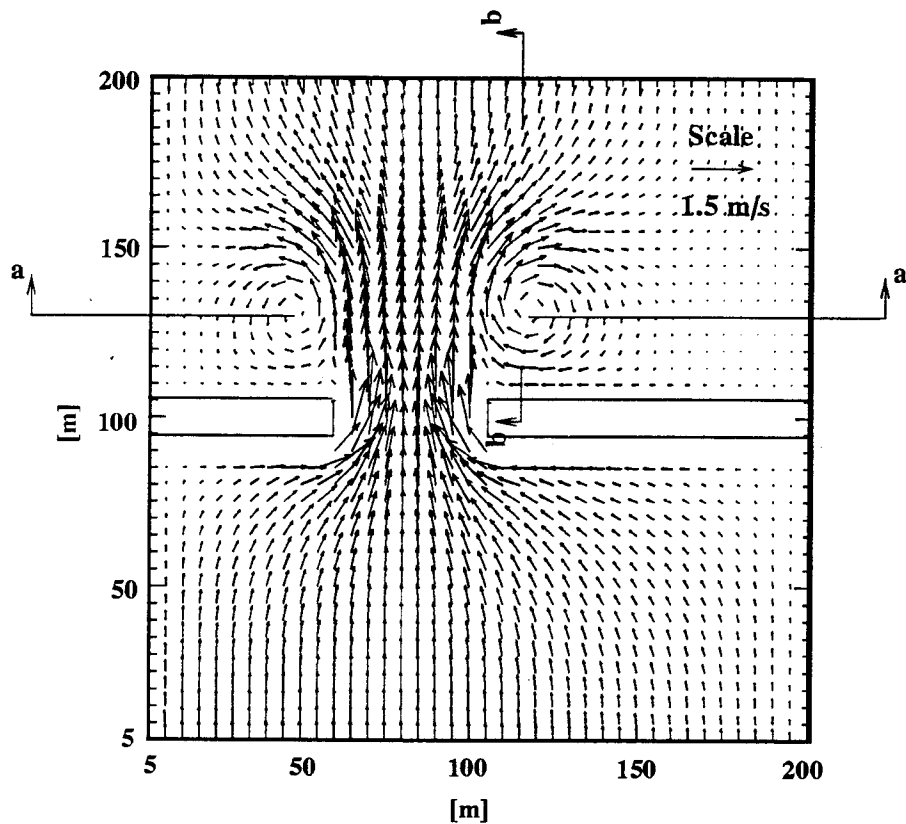
Slika 1. Ravansko tečenje kao posledica delimičnog rušenja brane ( $t=15$  s)  
 Figure 1. Two-dimensional unsteady flow as a consequence of partial dam failure ( $t=15$  s)



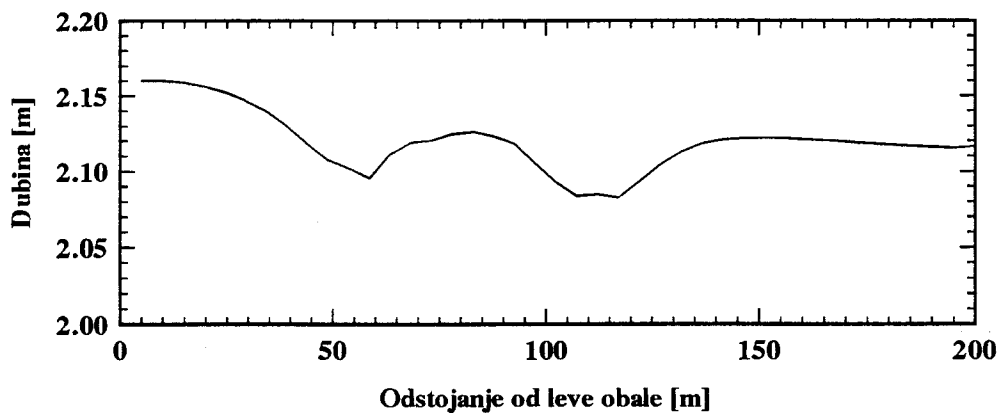
Slika 2. Prolom brane - uzdužni profil po osovini otvora ( $t=15$  s)  
 Figure 2. Dam break problem - longitudinal water surface profile ( $t=15$  s)



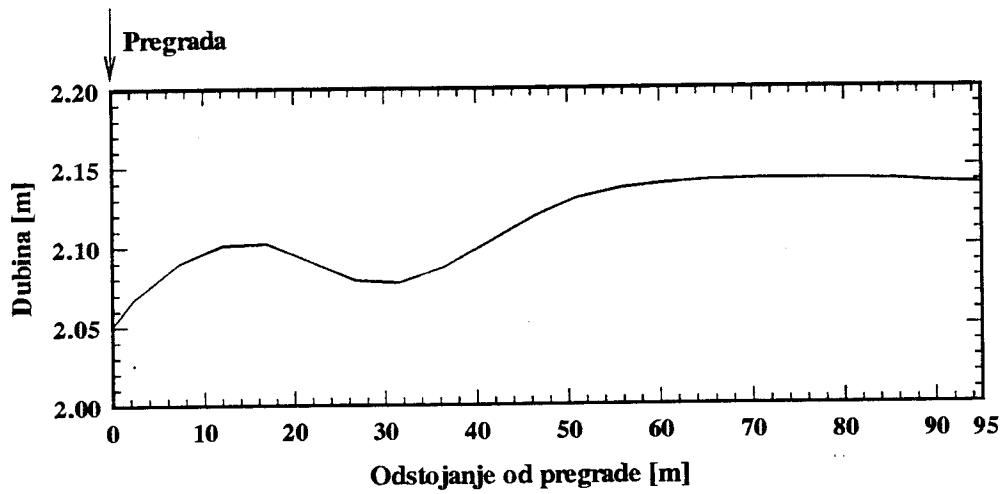
Slika 3. Prolom brane - izolinije i polje brzine ( $t=15$  s)  
 Figure 3. Dam break problem - contour lines and velocity field ( $t=15$  s)



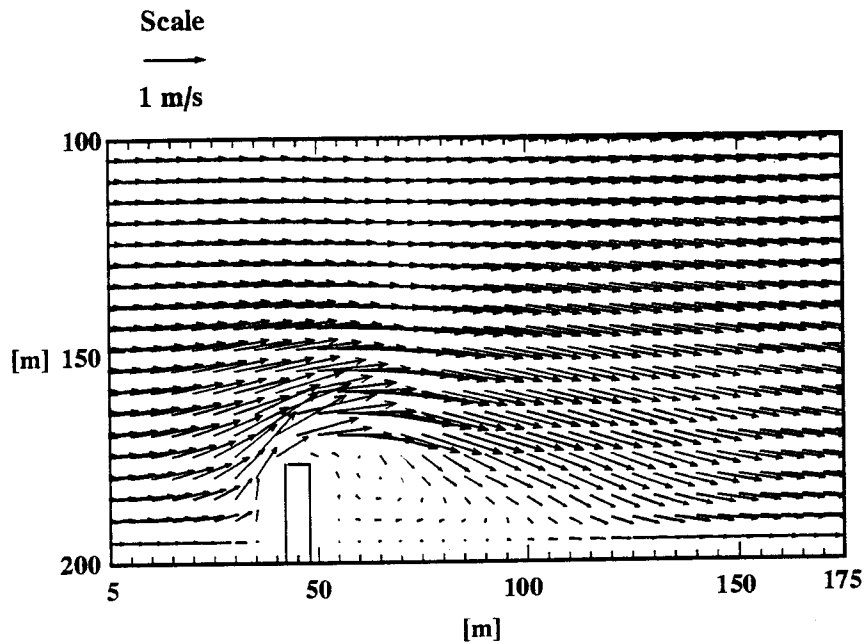
Slika 4. Ravansko tečenje kroz suženje ( $t=2.3$  min)  
 Figure 4. Two-dimensional flow through constriction ( $t=2.3$  min)



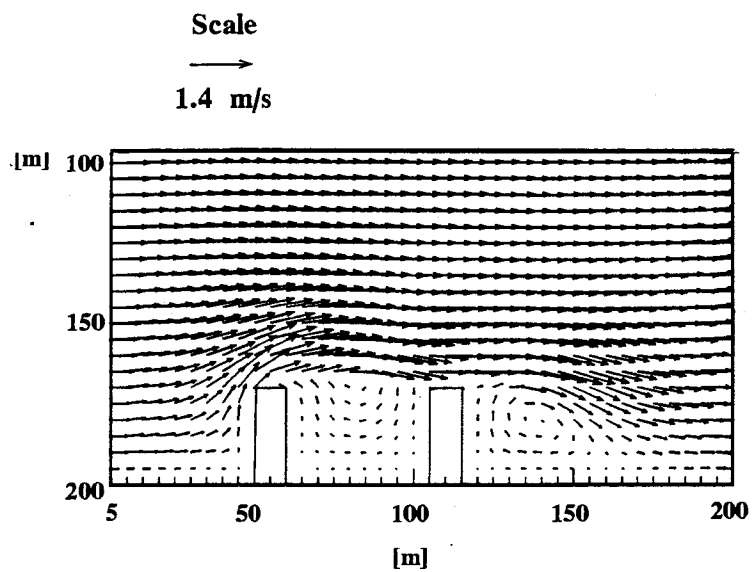
Slika 5. Poprečni presek kroz osu vrtlogâ (presek a-a;  $t=2.3$  min)  
 Figure 5. Cross section through the center-line of the vortices (cross section a-a;  $t=2.3$  min)



Slika 6. Uzdužni presek kroz osu vrtloga (presek b-b;  $t=2.3$  min)  
 Figure 6. Longitudinal cross section through the center-line of the vortex  
 (cross section b-b;  $t=2.3$  min)



Slika 7. Strujna slika u blizini jednog napera ( $t=4.5$  min)  
 Figure 7. Flow field in the vicinity of a groyne ( $t=4.5$  min)



Slika 8. Strujna slika u blizini dva napera ( $t=4.3$  min)

Figure 8. Flow field in the vicinity of two groynes ( $t=4.3$  min)