Uticaj greške u proceni vrednosti koeficijenta trenja na rezultate proračuna otvorenih tokova

Miodrag B. Jovanović
Gradjevinski fakultet - Beograd

Rezime. U ovom radu se analizira uticaj greške u proceni vrednosti koeficijenta trenja na rezultate proračuna blago i naglo promenljivog neustaljenog tečenja u otvorenim kanalima. Analizira se prostorni i vremenski raspored mogućih grešaka u sračunatim dubinama i protocima u zavisnosti od oblika poplavnog talasa i usvojene vrednosti koeficijenta trenja.
Ključne reči: neustaljeno tečenje, numerički modeli, koeficijent trenja

Uvod

Proračun linijskog neustaljenog tečenja u otvorenim tokovima sastoji se u numeričkoj integraciji St. Venantovih jednačina sa zadatim konturnim uslovima. Koeficijent trenja koji figuriše u ovim jednačinama predstavlja parametar čija je vrednost obično nepoznata, a može bitno uticati na rezultate proračuna.

Problem definisanja vrednosti koeficijenta trenja javlja se usled nedostatka snimljenih linija nivoa koje bi poslužile za njegovu kalibraciju [3]. Ovo je posebno prisutno kod proračuna hidrauličkih posledica rušenja brana, gde se radi o ekstrapolaciji protoka i nivoa daleko iznad vrednosti koje se normalno mogu registrovati u prirodi, tako da ne postoji mogućnost objektivne procene vrednosti koeficijenta trenja.

Osnovne jednačine i njihovo rešavanje

Uticija greške u proceni vrednosti koeficijenta trenja na rezultate proračuna može se analizirati rešavanjem sistema diferencijalnih jednačina [4]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h}\right) + g\,h\,\frac{\partial h}{\partial x} + g\,h\,(I_e - I_d) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial S_h}{\partial t} + \frac{\partial S_q}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial S_q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2q\,S_q}{h} - \frac{q^2\,S_h}{h^2}\right) + g\,S_h\,\frac{\partial h}{\partial x} + g\,h\,\frac{\partial S_h}{\partial x} + $$
$$+ \; g\,S_h\,(I_e - I_d) + g\,h\,\frac{\partial I_e}{\partial n} = 0. \tag{4}$$

Jednačine (1)-(2) su St. Venantove jednačine održanja mase i količine kretanja po jedinici širine korita, sa prostornim i vremenskim koordinatama (x, t) kao nezavisnim, a dubinom (h) i jediničnim protokom (q)kao zavisnim promenljivim. Simbol „g" označava gravitaciono ubrzanje, simbol „I_d" uzdužni nagib dna kanala, dok se nagib energetske linije usled trenja najčešće definiše Manningovim izrazom za ustaljeno tečenje:

$$I_e = \frac{n^2\,q^2}{h^{10/3}}, \tag{5}$$

gde je n - Manningov empirijski koeficijent trenja.

Jednačine (3)-(4) su izvedene tako što su svi članovi St. Venantovih jednačina (1)-(2) diferencirani po promenljivoj n. Izvodi:

$$S_h = \frac{\partial h}{\partial n} \quad \text{i} \quad \frac{\partial q}{\partial n} \tag{6}$$

mogu se smatrati „*faktorima osetljivosti*" dubine i protoka od trenja. Njihov vremenski i prostorni raspored definisan je jednačinama (3)-(4).

Izvod $\partial I_e/\partial n$ u jednačini (4) ima sledeći oblik:

$$\frac{\partial I_e}{\partial n} = \frac{2nq}{h^{10/3}}\,(n\,S_q + q) - \frac{10}{3}\,\frac{n^2\,q^2\,S_h}{h^{13/3}}. \tag{7}$$

Jednačine (3)-(4) podsećaju na St. Venantove jednačine, ali su *linearne* i rešavaju se sa jednačinama toka (1)-(2) *istovremeno*, uz odgovarajuće početne i granične uslove. Granični uslov na uzvodnom kraju računske deonice zadat je u obliku hidrograma $q(0, t)$ i funkcije $S_q(0, t)$, a na nizvodnom kraju, u obliku „slobodnog oticaja" (preslikavanjem stanja iz najbližeg uzvodnog profila unutar domena).

Numeričko rešavanje sistema (1)-(4) obavljeno je u ovom radu pomoću implicitne Preissmannove metode konačnih razlika [2].

Na osnovu dobijenog rešenja, sračunate su vrednosti relativnih grešaka dubina i protoka:

$$\varepsilon_h = S_h \left(\frac{n}{h}\right) \varepsilon_n \quad \text{i} \quad \varepsilon_q = S_q \left(\frac{n}{q}\right) \varepsilon_n \tag{8}$$

u funkciji relativne greške koja je načinjena u izboru vrednosti koeficijenta trenja ε_n (videti Prilog). Izrazi (8) pokazuju da grešci Manningovog koeficijenta od 1% odgovara greška u dubini od $S_h(n/h)$ procenata, odnosno u protoku od $S_q(n/h)$ procenata. Veličine $S_h(n/h)$ i $S_q(n/h)$ mogu se zato smatrati multiplikacionim ,,*faktorima greške*".

Računski primer

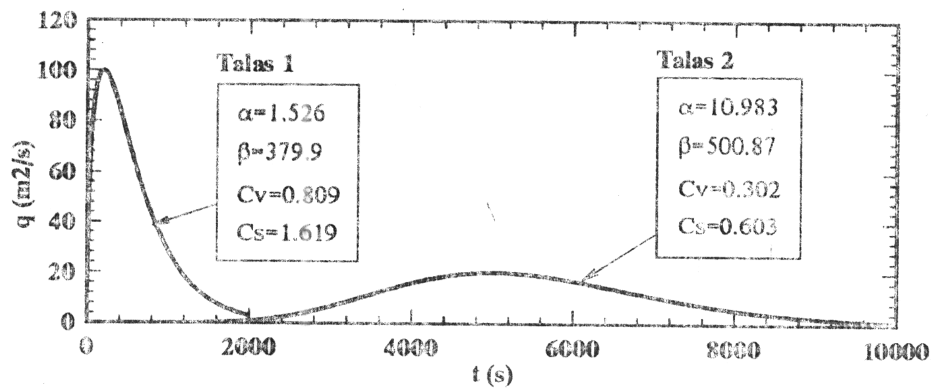
Razmatra se hipotetički slučaj tečenja u horizontalnom kanalu dužine 30 km. Početna dubina iznosi 1 m i voda miruje. Ulazni hidrogram je zadat u obliku Γ funkcije:

$$q(t) = \frac{\forall}{\beta\,\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-(t/\beta)}, \tag{9}$$

pri čemu se vrednosti parametara α i β odredjuju na osnovu zadatih graničnih uslova - zapremine talasa $\forall$, maksimalne ordinate funkcije $q(t)$ i vremena njene pojave [1].

Na Slici 1 prikazana su dva talasa iste zapremine sa odgovarajućim vrednostima parametara. Talas sa većim maksimalnim protokom (,,Talas 1") odgovara po obliku talasu koji nastaje rušenjem brane, dok talas sa nižim maksimalnim protokom (,,Talas 2") odgovara prirodnom poplavnom talasu. Proračunom su obuhvaćene vrenosti Manningovog koeficijenta $n = 0.020$, 0.025 i 0.040 $\mathrm{m}^{-1/3}\mathrm{s}$. Na Slici 2(a)-(c) prikazani su rezultati proračuna za Talas 1. Na Slici 2-(a) i (b) prikazana je prostorna i vremenska evolucija veličina h i q (deblje linije) i veličina $\varepsilon_h/\varepsilon_n$ i $\varepsilon_q/\varepsilon_n$ (tanje linije) za vrednost $n = 0.025\ \mathrm{m}^{-1/3}\mathrm{s}$.

Može se uočiti da se najveće greške u dubini i protoka javljaju u zoni čela talasa. Anvelopa maksimalnih vrednosti na Slici 2-(c) pokazuje da se greška u izboru vrednosti koeficijenta trenja množi faktorom čja je najveća vrednost

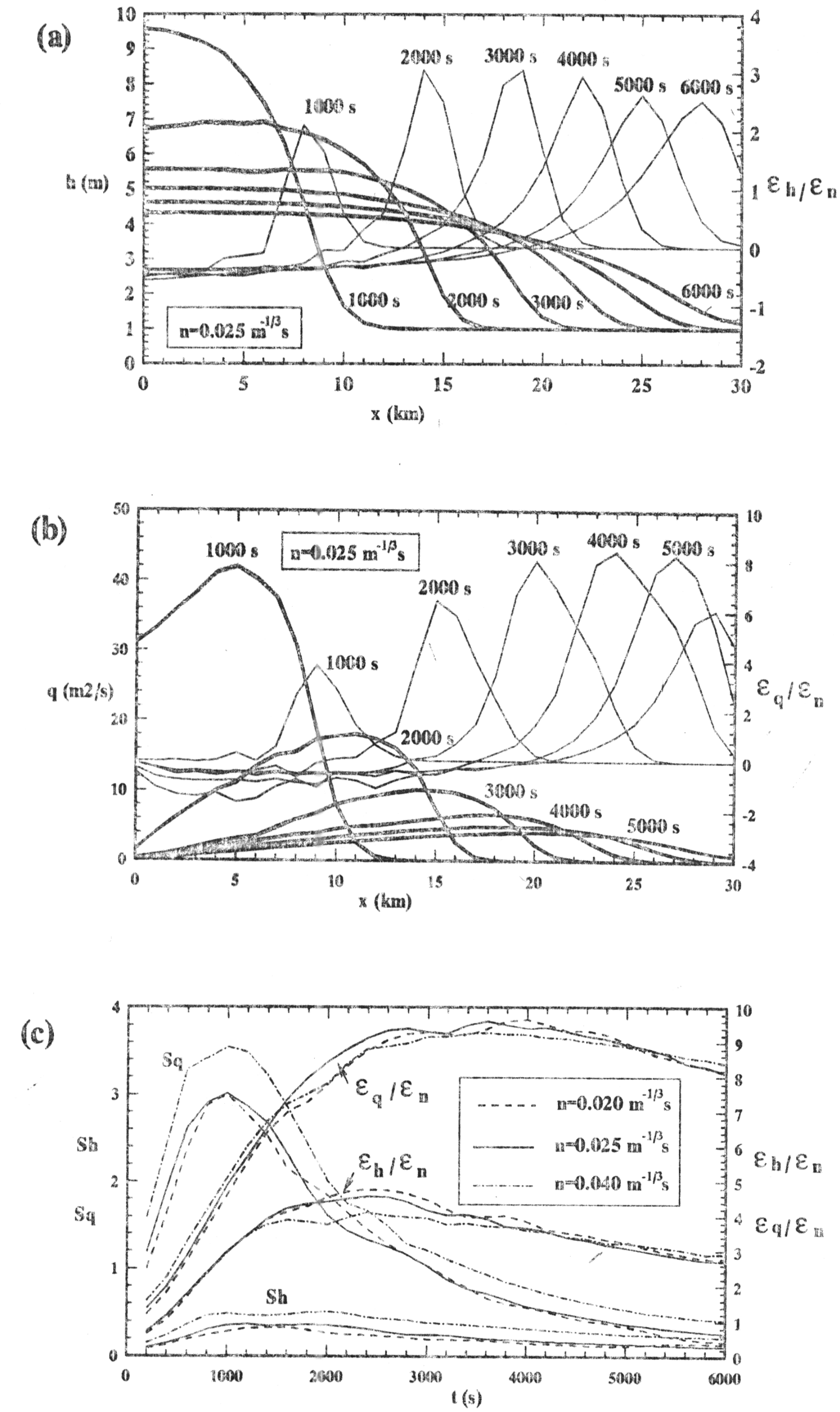


Slika 1: *Sintetički hidrogrami*

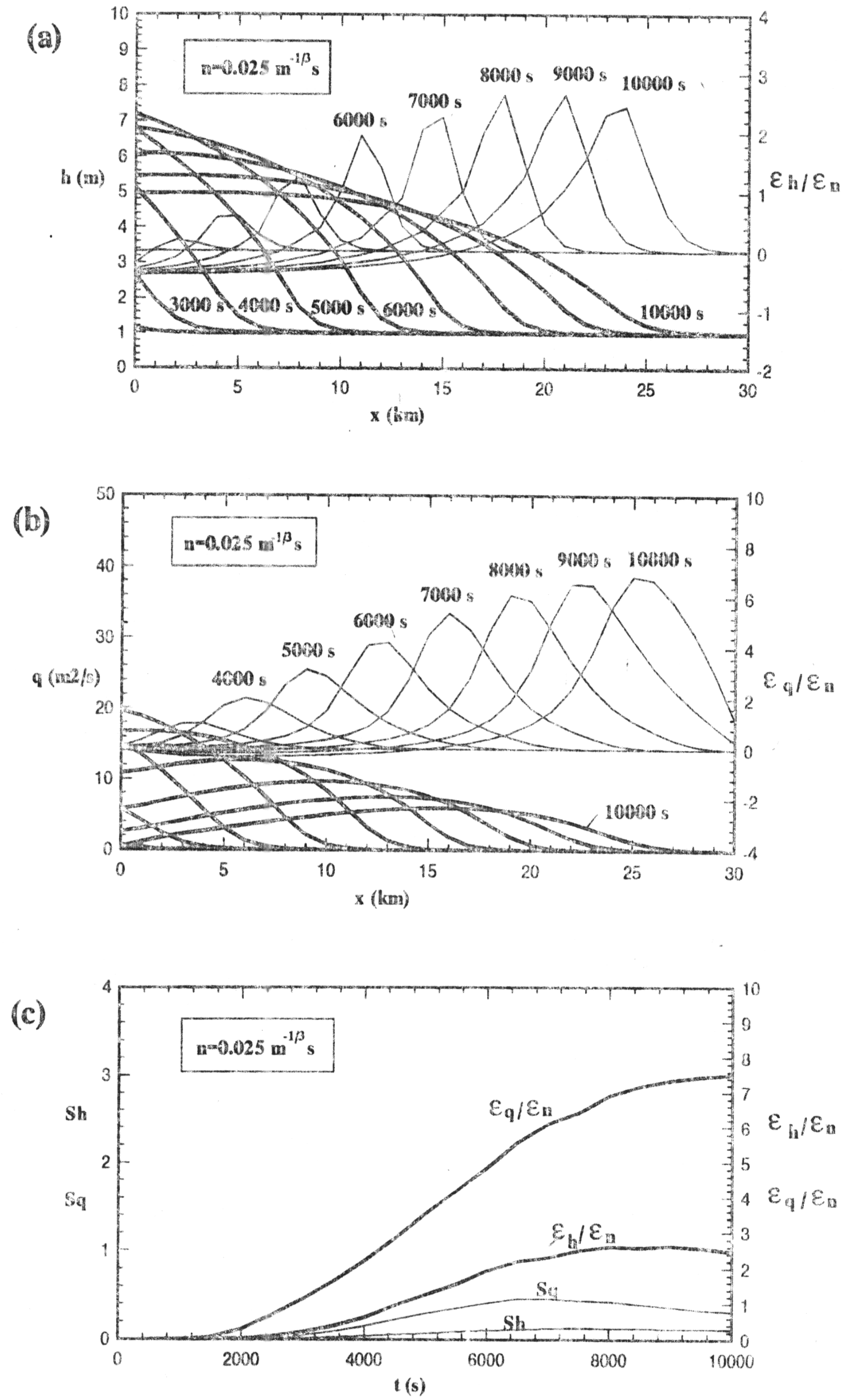
4–4.8 kada su u pitanju dubine, a 9–9.6 kada su u pitanju protoci. Iz istog dijagrama se vidi da funkcije vremenskog rasporeda promeljnivih S_h i S_q imaju oblik deformisanog ulaznog hidrograma. Sa porastom vrednosti koeficijenta trenja, vrednosti faktora osetljivosti S_h i S_q rastu, a faktora greške $\varepsilon_h/\varepsilon_n$ i $\varepsilon_q/\varepsilon_n$ opadaju. Najveće je smanjenje vrednosti faktora $\varepsilon_h/\varepsilon_n = S_h(n/h)$ usled činjenice da dubine rastu sa povećanjem uticaja trenja.

Da bi se utvrdilo u kojoj meri karakteristike talasa utiču na razmatrani fenomen, proračun je ponovljen za Talas 2, sa vrednošću $n = 0.025$ m$^{-1/3}$s. Rezultati su prikazani na Slici 3 (a)-(c). Može se konstatovati da greška u izboru vrednosti koeficijenta trenja ima manji uticaj na sračunate dubine i protoke u osnosu na grešku iz prethodnog slučaja. Faktor greške iznosi 2.5 kada su u pitanju dubine, odnosno, 7.5, kada su u pitanju protoci, u najosetljivijoj oblasti (čelo talasa).

Iz dobijenih rezultata proizilazi konstatacija da greške nisu male; na primer, greška u vrednosti Manningovog koeficijenta od 10% izazvaće grešku dubine u zoni čela talasa od 25%, a u protoku čak od 75% ! (Treba medjutim imati u vidu da u slučaju naglo promenljivog neustaljenog tečenja, osnovne jednačnine ne važe u oblasti čela talasa, jer su tu značajna vertikalna ubrzanja, a raspored pritiska po dubini nije hidrostatički).



Slika 2: *Prostiranje Talasa 1:* (a) *nivogrami i faktor greše dubine;* (b) *hidrogrami i faktor greške protoka;* (c) *anvelope maksimalnih vrednosti za različite vrednosti koeficijenta trenja*



Slika 3: *Prostiranje Talasa 2:* (a) *nivogrami i faktor greše dubine;* (b) *hidrogrami i faktor greške protoka;* (c) *anvelope maksimalnih vrednosti za vrednost koeficijenta trenja* $n = 0.025\ \mathrm{m}^{-1/3}\mathrm{s}$

Zaključci

1. Uticaj greške u proceni vrednosti koeficijenta trenja na računske dubine i protoke može se analizirati istovremenom integracijom St. Venantovih jednačina linijskog neustaljenog toka i jednačinama u kojima su zavisno promenljive ,,faktori osetljivosti" $S_h = \partial h/\partial n$ i $S_q = \partial q/\partial n$.

2. Najveće greške se manifestuju u zoni čela talasa, pri čemu treba imati u vidu da osnovne jednačine na važe za čelo talasa kod naglo promenljivog neustaljenog tečenja. Greške u protocima su veće od grešaka u dubinama.

3. Za dati talas, greške računskih dubina i protoka se smanjuju sa povećanjem vrednosti koeficijenta trenja.

4. Greške koje su posledica proizvoljnog izbora vrednosti koeficijenta trenja su manje kod blago promenljivog neustaljenog tečenja nego kod naglo promenljivog neustaljenog tečenja (što se može i očekivati, s obzirom na problem numeričke simulacije strmog čela).

Literatura

1. Croley II, T. *Synthetic-Hydrograph Computations on Small Programmable Calculators*, Iowa Institute of Hydraulic Research, 1980.

2. Cunge, J.A., Holly, F.M., Verwey, A., *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman, 1980.

3. French, R.H., *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, 1985.

4. Ganoulis, J., Koutitas, C., *Sensitivity of Flood Wave Propagation Model to Errors in Friction Coefficient Estimation*, IAHR Symposium on River Engineering and its Interaction with Hydrological and Hydraulic Research, Belgrade, 1980.

Prilog

Posmatrajući malu promenu koeficijenta grenja δn, zavisno promenljive h i q biće u proizvoljnom trenutku i proizvoljnom profilu:

$$\begin{aligned} h\,(n+\delta n) &= h(n) + \frac{\partial h}{\partial n}\delta n + O(\delta\, n^2) \\ q\,(n+\delta n) &= q(n) + \frac{\partial q}{\partial n}\delta n + O(\delta\, n^2). \end{aligned}$$

Ako se zanemare članovi višeg reda, relativne greške se mogu definisati u obliku:

$$\begin{aligned} \varepsilon_h &= [h\,(n+\delta n) - h(n)]/h(n) \\ \varepsilon_q &= [q\,(n+\delta n) - q(n)]/q(n) \\ \varepsilon_n &= \delta n/n. \end{aligned} \tag{10}$$

Uvodjenjem obeležavanja $S_h = \partial h/\partial n$ i $S_q = \partial q/\partial n$ („faktori osetljivosti"), dobija se:

$$\varepsilon_h = S_h \left(\frac{n}{h}\right) \varepsilon_n \quad \varepsilon_q = S_q \left(\frac{n}{q}\right) \varepsilon_n,$$

što je trebalo pokazati.