

Dragan Blagojević

Uvod u Satelitsku geodeziju

Beograd, 2014. godine

UVOD U SATELITSKU GEODEZIJU

Autor:

V. PROF. DR DRAGAN BLAGOJEVIĆ, DIPL. INŽ. GEOD.

Odsek za Geodeziju i geoinformatiku

Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

Bulevar kralja Aleksandra 73, Beograd

Recenzenti:

V. PROF. DR SINIŠA DELČEV, DIPL. INŽ. GEOD.

V. PROF. DR OLEG ODALOVIĆ, DIPL. INŽ. GEOD.

Izdavač:

GRAĐEVINSKI FAKULTET UNIVERZITETA U BEOGRADU

Za izdavača:

PROF. DR. DUŠAN NAJDANOVIĆ, DIPL. INŽ. GRAĐ.

Priprema:

VANJA MIHAILOVIĆ

Štampa:

DOSIJE STUDIO BEOGRAD

Tiraž: 50

ISBN 978-86-7518-167-5

Beograd 2014

Predgovor

Ova knjiga predstavlja rezultat višegodišnjeg održavanja nastave autora na predmetu Satelitska geodezija, koji se po aktuelnom nastavnom planu sluša u 5. semestru osnovnih akademskih studija Odseka za geodeziju i geoinformatiku Građevinskog fakulteta u Beogradu. U knjizi se, dakle, tretira problematika korišćenja veštačkih Zemljinih satelita u geodetske svrhe, i to tako da svojim obimom i sadržajem pre svega odgovara nastavnim potrebama.

Celokupna materija knjige organizovana je u 9 poglavlja. Može se reći da su poglavlja logički raspoređena u dve celine koje nisu posebno naslovljene, ali se prva odnosi na prethodna znanja i teorijske osnove, dok je druga posvećena konkretnih satelitskim metodama, tehnikama i sistemima.

Poglavlje 1: Uvodna razmatranja definiše satelitsku geodeziju i njene zadatke, zajedno sa osnovnim konceptom i klasifikacijom. Posebno je prikazano mesto satelitskih metoda u odnosu na tradicionalne geodetske tehnike. U ovom poglavlju dat je i sažet hronološki pregled najvažnijih dostignuća u relativno kratkom, ali burnom razvoju satelitske geodezije, počev od lansiranja prvog veštačkog Zemljinog satelita.

Poglavlje 2: Referentni sistemi satelitske geodezije bavi se koordinatnim i vremenskim referentnim sistemima koji su od značaja za satelitsku geodeziju. Prvi deo poglavlja tretira koordinatne sisteme i njihove transformacije kao apstraktne matematičke objekte, da bi u nastavku bile obrađene dve najvažnije klase konkretnih koordinatnih referentnih sistema: inercijalni i terestrički. Koncepti geodetskog datuma i datumske transformacije, kao i praktična potreba za visinama koja vodi definiciji geoida, takođe su predmet ovog poglavlja. Na kraju su obrađene najvažnije skale vremena, počev od onih zasnovanih na rotaciji Zemlje, pa do atomske skale vremena koja čini osnovu funkcionisanja savremenih satelitskih sistema.

Poglavlje 3: Osnovna teorija satelitskih orbita predstavlja materiju koja je od suštinskog značaja za satelitsku geodeziju. Stoga su na početku poglavlja prikazani Keplerovi planetarni zakoni i Njutnovi zakoni mehanike i zakon univerzalnog privlačenja, na osnovu kojih je formulisan problem dva tela i izvedene najvažnije osobine takozvanog normalnog satelitskog kretanja. U nastavku poglavlja opisana su najvažnija gravitaciona i negravitaciona poremećajna ubrzanja satelitskog kretanja, zbog kojih se Keplerovi orbitalni elementi više ne mogu smatrati konstantnim. Na kraju poglavlja izvršena je klasifikacija satelitskih orbita, pri čemu je za svaku klasu objašnjen značaj za geodetsku primenu.

Poglavlje 4: Principi satelitskih merenja može se podeliti u dve celine. Prva je posvećena fizičkim osnovama satelitskih merenja, pre svega onim povezanim sa

karakteristikama kretanja harmonijskih elektromagnetnih talasa. Posebna pažnja posvećena je opisu kretanja signala kroz atmosferu Zemlje, s obzirom na to da je većina mernih metoda u satelitskoj geodeziji usmerena od uređaja na površi Zemlje prema satelitima ili obrnuto. Druga celina prikazuje nekoliko satelitskih metoda kod kojih mernu veličinu predstavlja pravac, dužina ili promena dužine. Za svaku metodu istaknut je princip merenja, i objašnjen način korišćenja u postupku pozicioniranja kao primarnom geodetskom zadatku.

Poglavlje 5: Ocenjivanje parametara u satelitskoj geodeziji poslednje je poglavlje iz kategorije opštih znanja i teorijskih osnova. Iako satelitska geodezija principijelno nije specifična u pogledu metoda ocenjivanja parametara u linearnim modelima, ovo poglavlje izvršeno je u knjigu radi kompletnosti. U prvom delu poglavlja sažeto je prikazana teorija ocenjivanja po metodi najmanjih kvadrata, zajedno sa praktičnim aspektima koji se odnose na rešavanje velikih sistema jednačina. U drugom delu obrađena je diskretna forma Kalmanovog filtera, s posebnim naglaskom na Gaus-Markovljev proces kojim se može opisati veliki broj fizičkih fenomena. I za diskretni Kalmanov filter istaknuta su neka praktična rešenja za prevazilaženje problema kao što su numerička nestabilnost i divergencija filtera.

Poglavlja 6, 7 i 8 su najobimnija i najdetaljnija, jer su posvećena američkom globalnom navigacionom satelitskom sistemu NAVSTAR GPS, prvom potpuno operativnom satelitskom sistemu koji već četiri decenije postavlja standarde u oblasti satelitskog pozicioniranja i navigacije.

Poglavlje 6: Uvod u NAVSTAR GPS daje u prvom delu osnovne informacije o arhitekturi i komponentama, referentnom sistemu i strukturi signala koje sateliti sistema emituju. Drugi deo poglavlja tretira princip kodnih i faznih GPS merenja, i primenjena tehnološka rešenja u tom pogledu. Na kraju poglavlja dat je pregled najvažnijih izvora grešaka koje opterećuju rezultate GPS merenja, a čije je poreklo u kosmičkom segmentu, sredini prostiranja signala i uređajima za njihov prijem i obradu.

Poglavlje 7: Matematički model GPS merenja je geodetski najvažnije poglavlje kada je u pitanju satelitski sistem NAVSTAR GPS. Na samom početku izveden je detaljni funkcionalni model kodnih i faznih pseudodužina. Posebna pažnja posvećena je dominantnom članu funkcionalnog modela koji se odnosi na geometrijsko rastojanje između satelita i prijemnika. U nastavku su prikazani modeli na osnovu kojih se u manjoj ili većoj meri mogu eliminisati pojedini efekti kao što su greška satelitskog časovnika, relativistički uticaji i atmosfersko kašnjenje signala. Funkcionalni model dat je i za linearne i frekvencijske kombinacije originalnih pseudodužina. Na kraju poglavlja prikazan je stohastički model originalnih pseudodužina, čime je kompletiran matematički model merenja.

Poglavlje 8: GPS pozicioniranje, primene i modernizacija završno je poglavlje koje se odnosi na sistem NAVSTAR GPS. Najveći deo poglavlja posvećen je pozicioniranju, i u tom smislu prvo je prikazano autonomno GPS rešenje za koje je sistem pre svega i dizajniran. Precizno apsolutno pozicioniranje predstavljeno je kao alternativa, ali sa svim ograničenjima koje je potrebno

prevazići. Slede forme diferencijalnog i relativnog pozicioniranja, kao i njihova varijanta u višestaničnom okruženju. S obzirom na to da jedino fazna merenja obezbeđuju geodetski kvalitet pozicioniranja, posebno je obrađen problem rešavanja faznih neodređenosti. Na kraju poglavlja istaknute su oblasti primene sistema, a zatim su predstavljeni planovi njegove modernizacije koji se danas praktično već ostvaruju.

Poglavlje 9: Ostali satelitski sistemi i metode predviđeno je za prikaz globalnih navigacionih satelitskih sistema koji su danas već operativni, kao što je ruski GLONASS, ili su u različitim fazama razvoja (evropski GALILEO, kineski BeiDou i japanski QZSS). Za svaki sistem sažeto su opisane komponente, istaknut je princip funkcionisanja i prikazane eventualne specifičnosti. Do kraja poglavlja obrađene su i postojeće, dobro poznate metode satelitska geodezije, kao što su lasersko merenje rastojanja do satelita i satelitska altimetrija, ali i misije posvećene istraživanju Zemljinog gravitacionog polja koje su zasnovane na satelitskom praćenju i satelitskoj gradiometriji.

Rad na ovoj knjizi podrazumevao je ne samo suočavanje autora sa specifičnom materijom, već i rešavanje terminoloških pitanja koja neizostavno prate razvoj novih tehnologija. Stoga upotrebljene prevode određenih engleskih termina treba posmatrati pre svega kao predloge a ne kao želju autora da u tom smislu postavlja standarde. Nadam se da će, uprkos tome, knjiga korisno poslužiti studentima geodezije u upoznavanju jedne tako dinamične i savremene naučno-tehničke discipline kao što je Satelitska geodezija, ali i geodetskim stručnjacima u praksi koji bi želeli da osveže i prodube svoja znanja iz ove oblasti.

Objavljivanje knjige ovakvog obima i sadržaja bilo bi veoma teško bez saradnje, entuzijazma i pomoći određenog broja ljudi. Pre svega, iskreno se zahvaljujem Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, odnosno dekanu prof. dr Dušanu Najdanoviću, dipl. inž. građ. kao izdavaču. Posebnu zahvalnost izražavam recenzentima, dr Siniši Delčevu, dipl. inž. geod. i dr Olegu Odaloviću, dipl. inž. geod. koji su uložili veliki napor da savesnim i detaljnim pregledom rukopisa, a posebno svojim sugestijama i primedbama, značajno poprave kvalitet definitivnog teksta knjige. Za izgled CD izdanja knjige zaslužni su Dosije Studio Beograd i Vanja Mihailović. Konačno, najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici za podršku, razumevanje i strpljenje.

Tokom rada na objavljivanju ovog relativno zahtevnog matematičkog materijala učinjen je svaki napor da u tekstu i formulama ne bude grešaka. Za sve eventualne propuste odgovornost, međutim, snosi isključivo autor.

Sadržaj

1 Uvodna razmatranja.....	1
1.1 Definicija i zadaci satelitske geodezije	2
1.2 Klasifikacija i koncept satelitske geodezije	4
1.3 Istorijski razvoj satelitske geodezije	6
1.4 Primene satelitske geodezije	9
2 Referentni sistemi satelitske geodezije	11
2.1 Koordinatni sistemi i transformacije.....	12
2.2 Globalni referentni sistemi.....	15
2.3 Geodetski datum i datumska transformacija.....	20
2.4 Lokalni referentni sistemi	24
2.5 Pojam geoida i koncept visina	27
2.6 Referentni sistemi vremena.....	29
3 Osnovna teorija satelitskih orbita	33
3.1 Keplerovi i Njutnovi zakoni	34
3.2 Jednačina normalnog kretanja satelita	36
3.3 Osobine normalnog kretanja satelita.....	38
3.4 Opšti oblik satelitskih orbita	40
3.5 Keplerovi orbitalni elementi	42
3.6 Ekscentrična i srednja anomalija	44
3.7 Računanje položaja satelita.....	45
3.8 Perturbacije satelitskog kretanja	48
3.9 Klasifikacija satelitskih orbita.....	51
4 Principi satelitskih merenja	55
4.1 Osnovni pojmovi o signalima	56
4.2 Fazna i grupna brzina.....	59
4.3 Doplerov efekat.....	61
4.4 Kretanje signala kroz atmosferu	64
4.5 Satelitsko merenje pravaca	68
4.6 Satelitsko merenje dužina	71
4.7 Merenje promena dužina	76
4.8 Altimetrijska merenja	79
4.9 Interferometrijska merenja.....	80

5	Ocenjivanje parametara u satelitskoj geodeziji	83
5.1	Metod najmanjih kvadrata	84
5.2	Praktični aspekti metode najmanjih kvadrata	86
5.3	Diskretni Kalmanov filter	90
5.4	Praktični aspekti Kalmanovog filtera.....	96
6	Uvod u NAVSTAR GPS	99
6.1	Razvoj programa NAVSTAR.....	100
6.2	Arhitektura sistema NAVSTAR	103
6.3	Referentni sistem WGS84	107
6.4	Struktura GPS signala.....	109
6.5	Princip kodnih i faznih merenja.....	112
6.6	Osnovni izvori grešaka merenja.....	114
7	Matematički model GPS merenja	119
7.1	Funkcionalni model pseudoduzina	120
7.2	Određivanje položaja GPS satelita.....	123
7.3	Modeli popravaka GPS merenja	127
7.4	Proste, dvostruke i trostruke razlike.....	131
7.5	Frekvencijske kombinacije	136
7.6	Stohastički model GPS merenja.....	140
8	GPS pozicioniranje, primene i modernizacija.....	143
8.1	Autonomno GPS pozicioniranje	144
8.2	Precizno apsolutno pozicioniranje	148
8.3	Diferencijalno GPS pozicioniranje	152
8.4	Relativno GPS pozicioniranje.....	155
8.5	Problem faznih neodređenosti.....	158
8.6	Višestanični DGPS sistemi	161
8.7	GPS primene i modernizacija	163
9	Ostali satelitski sistemi i metode	169
9.1	Globalni navigacioni satelitski sistemi	170
9.2	Lasersko merenje rastojanja (SLR).....	181
9.3	Satelitska altimetrija	189
9.4	Praćenje satelita (SST) i satelitska gradiometrija	195
	Referentna literatura	203

Uobičajene skraćenice

ACP	<u>A</u> rea <u>C</u> orrection <u>P</u> arameter
AFM	<u>A</u> mbiguity <u>F</u> unction <u>M</u> ethod
ARP	<u>A</u> ntena <u>R</u> eference <u>P</u> oint
AS	<u>A</u> nti <u>S</u> poofing
BIH	<u>B</u> ureau <u>I</u> nternational De L' <u>H</u> eure
BIPM	<u>B</u> ureau <u>I</u> nternational Des <u>P</u> oids Et <u>M</u> esures
BNR	<u>B</u> ias To <u>N</u> oise <u>R</u> atio
COD	<u>C</u> enter For <u>O</u> rbital <u>D</u> etermination
DCB	<u>D</u> ifferential <u>C</u> ode <u>B</u> ias
DGPS	<u>D</u> ifferential <u>G</u> PS
DIA	<u>D</u> etection <u>I</u> dentification <u>A</u> daptation
DLL	<u>D</u> elay <u>L</u> ock <u>L</u> oop
DOD	<u>D</u> epartment Of <u>D</u> efense
DOY	<u>D</u> ay Of <u>Y</u> ear
EGM96	<u>E</u> arth <u>G</u> ravitational <u>M</u> odel 1996
EKF	<u>E</u> xtended <u>K</u> alman <u>F</u> ilter
ERP	<u>E</u> arth <u>R</u> otation <u>P</u> arameters
ESA	<u>E</u> uropean <u>S</u> pace <u>A</u> gency
EUREF	<u>E</u> uropean <u>R</u> eference <u>F</u> rame
FARA	<u>F</u> ast <u>A</u> mbiguity <u>R</u> esolution <u>A</u> pproach
FASF	<u>F</u> ast <u>A</u> mbiguity <u>S</u> earch <u>F</u> ilter
FOC	<u>F</u> ull <u>O</u> perational <u>C</u> apability
GIM	<u>G</u> lobal <u>I</u> onosphere <u>M</u> ap
GLONASS	<u>G</u> LObal <u>N</u> avigation <u>S</u> atellite <u>S</u> ystem
GNSS	<u>G</u> lobal <u>N</u> avigation <u>S</u> atellite <u>S</u> ystem
GPS	<u>G</u> lobal <u>P</u> ositioning <u>S</u> ystem
GRS80	<u>G</u> eodetic <u>R</u> eference <u>S</u> ystem 1980
IERS	<u>I</u> nternational <u>E</u> arth <u>R</u> otation <u>S</u> ervice
IGEX	<u>I</u> nternational <u>G</u> lonass <u>E</u> Xperiment
IGS	<u>I</u> nternational <u>G</u> NSS <u>S</u> ervice
IONEX	<u>I</u> ONosphere Map <u>E</u> Xchange Format
ITRF	<u>I</u> nternational <u>T</u> errestrial <u>R</u> eference <u>F</u> rame
ITU	<u>I</u> nternational <u>T</u> elecommunications <u>U</u> nion
IUGG	<u>I</u> nternational <u>U</u> nion Of <u>G</u> eodesy And <u>G</u> eophysics
JPL	<u>J</u> et <u>P</u> ropulsion <u>L</u> aboratory
JPO	<u>J</u> oint <u>P</u> rogram <u>O</u> ffice
LAMBDA	<u>L</u> east Squares <u>A</u> MBiguity <u>D</u> ecorrelation <u>A</u> djustment
LEO	<u>L</u> ow <u>E</u> arth <u>O</u> rbiter
LLR	<u>L</u> unar <u>L</u> aser <u>R</u> anging
LSAST	<u>L</u> east Squares <u>A</u> mbiguity <u>S</u> earch <u>T</u> echnique

MDB	<u>M</u> inimal <u>D</u> etectable <u>B</u> ias
MINQUE	<u>M</u> inimum <u>N</u> orm <u>Q</u> uadratic <u>U</u> nbiased <u>E</u> stimation
MNK	<u>M</u> etod <u>N</u> ajmanjih <u>K</u> vadrata
NASA	<u>N</u> ational <u>A</u> eronautics And <u>S</u> pace <u>A</u> administration
NATO	<u>N</u> orth <u>A</u> tlantic <u>T</u> reaty <u>O</u> rganization
NAVSTAR	<u>N</u> AVigation <u>S</u> ystem With <u>T</u> ime <u>A</u> nd <u>R</u> anging
NDS	<u>N</u> avigation <u>D</u> evelopment <u>S</u> atellites
NGS	<u>N</u> ational <u>G</u> eodetic <u>S</u> urvey
NINT	<u>N</u> earest <u>I</u> N <u>T</u> eger
NMF	<u>N</u> ew <u>M</u> apping <u>F</u> unction
NTS	<u>N</u> avigation <u>T</u> echnology <u>S</u> atellites
NWM	<u>N</u> umerical <u>W</u> eather <u>M</u> odel
OCS	<u>O</u> perational <u>C</u> ontrol <u>S</u> ystem
OMEGA	<u>O</u> ptimal <u>M</u> ethod For <u>E</u> stimating <u>G</u> PS <u>A</u> mbiguities
OTF	<u>O</u> n <u>T</u> he <u>F</u> ly
PCV	<u>P</u> hase <u>C</u> enter <u>V</u> ariation
PDA	<u>P</u> artial <u>D</u> erivative <u>A</u> lgorithm
PLL	<u>P</u> hase <u>L</u> ock <u>L</u> oop
PPP	<u>P</u> recise <u>P</u> oint <u>P</u> ositioning
PRARE	<u>P</u> recise <u>R</u> ANGE And <u>R</u> ange Rate <u>E</u> quipment
PRN	<u>P</u> seudo <u>R</u> andom <u>N</u> oise
RTCM	<u>R</u> adio <u>T</u> echnical <u>C</u> ommission For <u>M</u> aritime Services
RTK	<u>R</u> eal <u>T</u> ime <u>K</u> inematic
SA	<u>S</u> elective <u>A</u> vailability
SINEX	<u>S</u> olution <u>I</u> Ndependent <u>E</u> Xchange Format
SKF	<u>S</u> tandard <u>K</u> alman <u>F</u> ilter
SLM	<u>S</u> ingle <u>L</u> ayer <u>M</u> odel
SNR	<u>S</u> ignal to <u>N</u> oise <u>R</u> atio
SP3	<u>S</u> pecial <u>P</u> roduct <u>3</u>
TAI	<u>T</u> emps <u>A</u> tomique <u>I</u> nternational
TDT	<u>T</u> emps <u>D</u> ynamique <u>T</u> errestre
TEC	<u>T</u> otal <u>E</u> lectron <u>C</u> ontent
TECU	<u>T</u> otal <u>E</u> lectron <u>C</u> ontent <u>U</u> nit
UNAVCO	<u>U</u> niversity <u>N</u> AVstar <u>C</u> onsortium
URE	<u>U</u> ser <u>R</u> ange <u>E</u> rror
USNO	<u>U</u> nited <u>S</u> tates <u>N</u> aval <u>O</u> bservatory
UT	<u>U</u> niversal <u>T</u> ime
UTC	<u>U</u> niversal <u>T</u> ime <u>C</u> oordinated
VLBI	<u>V</u> ery <u>L</u> ong <u>B</u> aseline <u>I</u> nterferometry
VRS	<u>V</u> irtual <u>R</u> eference <u>S</u> tation
VTEC	<u>V</u> ertical <u>T</u> otal <u>E</u> lectron <u>C</u> ontent
WAAS	<u>W</u> ide <u>A</u> rea <u>A</u> ugmentation <u>S</u> ystem
WGS84	<u>W</u> orld <u>G</u> eodetic <u>S</u> ystem 1984

Spisak slika

1.1	Mesto i uloga satelitskih metoda u geodeziji.	3
1.2	Ilustracija fundamentalne jednačine satelitske geodezije.	5
1.3	Prvi veštački Zemljin satelit SPUTNIK-1.	6
2.1	Položaj tačke u pravouglom pravolinijskom koordinatnom sistemu.	12
2.2	Transformacija koordinata između sistema koji se međusobno razlikuju po rotaciji oko jedne ose.	13
2.3	Definicija inercijalnog referentnog koordinatnog sistema.	16
2.4	Kretanje pola za period od 1990. do 1993. godine u odnosu na konvencionalni terestrički pol (CTP).	18
2.5	Definicija terestričkog referentnog koordinatnog sistema (CTRS).	18
2.6	Definicija geodetske širine, geodetske dužine i elipsoidne visine.	21
2.7	Datumska transformacija između dva pravougla koordinatna sistema.	23
2.8	Lokalni astronomski referentni koordinatni sistem.	24
2.9	Lokalni elipsoidni referentni koordinatni sistem.	26
2.10	Fizička površ Zemlje, površ geoida i površ elipsoida.	28
2.11	Razlika između srednjeg solarnog i srednjeg zvezdanog vremena.	29
2.12	Odnos između GPS vremena i vremenskih skala TDT, TAI, UTC i UT.	32
3.1	Ilustracija Keplerovih zakona planetarnog kretanja.	34
3.2	Problem dva tela u centralnom polju.	37
3.3	Osnovna geometrijska svojstva Keplerove eliptične putanje.	41
3.4	Ilustracija geometrijskog karaktera Keplerovih parametara.	43
3.5	Geometrijska definicija ekscentrične anomalije.	44
3.6	Koordinatni sistemi kod računanja položaja satelita.	46
3.7	Ilustracija najvažnijih poremećajnih ubrzanja GPS satelita.	48
3.8	Klasifikacija satelitskih orbita po visini leta: (1) niska, (2) srednja, (3) visoka.	51
3.9	Primeri tipova orbita po inklinaciji i smeru kretanja: (1) progradna ekvatorska, (2) progradna nagnuta, (3) polarna, (4) retrogradna nagnuta, (5) retrogradna ekvatorska.	52
3.10	Ilustracija principa heliocentričnosti satelitske orbite.	54
4.1	Period talasa i talasna dužina.	57
4.2	Spektar elektromagnetskih talasa.	58
4.3	Rezultat superpozicije dva talasa različitih frekvencija.	60
4.4	Ilustracija Doplerovog efekta.	62
4.5	Promena primljene frekvencije (Doplerov efekat) kod različitih brzina promena rastojanja između predajnika i prijemnika.	63
4.6	Razlika između putanje signala (S) i geometrijskog rastojanja	64

	(G) usled uticaja atmosfertske refrakcije.	
4.7	Princip određivanja pravaca u satelitskoj geodeziji.	69
4.8	Princip pozicioniranja pomoću satelitski izmerenih pravaca.	70
4.9	Satelitsko merenje dužina.	72
4.10	Princip faznog jednosmernog i dvosmernog merenja dužina.	73
4.11	Nesinhronizacija časovnika kod impulsnog jednosmernog merenja dužina.	74
4.12	Nesinhronizacija časovnika kod impulsnog dvosmernog merenja dužina.	74
4.13	Princip pozicioniranja merenim dužinama uz poznate položaje satelita.	75
4.14	Princip pozicioniranja merenim dužinama uz nepoznate položaje satelita.	76
4.15	Satelitsko merenje promena dužina.	77
4.16	Altimetrijska radarska merenja.	79
4.17	Interferometrijska merenja.	80
6.1	Princip GPS trilateracije. Za određivanje koordinata tačke i greške sinhronizacije neophodne su najmanje četiri merene pseudoduzine.	102
6.2	Nominalna GPS satelitska konstelacija od 24 satelita u 6 orbitalnih ravni.	103
6.3	Raspored stanica kontrolnog GPS segmenta (crni krugovi). Stanice u nadležnosti NGA (beli krugovi) nisu formalno u sastavu kontrolnog segmenta.	105
6.4	Elementi kontrolnog GPS segmenta i njihove funkcije.	106
6.5	WGS84 geoid zasnovan na gravitacionom modelu Zemlje EGM96.	109
6.6	Princip binarnog faznog kodiranja (BPSK). Promene vrednosti bitova sa 0 na 1 i obrnuto, menjaju fazu nosećeg talasa za 180°.	111
6.7	Funkcionalna shema GPS prijemnika.	112
6.8	Princip merenja GPS prijemnika upoređenjem kopije i originala signala.	113
7.1	Ilustracija Sanjakovog efekta koji nastaje kao posledica konačne brzine prostiranja signala.	126
7.2	Ilustracija prostih razlika interferometrijskog tipa (levo) i Doplerskog tipa (desno).	131
7.3	Ilustracija dvostrukih razlika.	134
7.4	Ilustracija trostrukih razlika.	135
8.1	Princip diferencijalnog GPS pozicioniranja.	153
8.2	Tipična prosečna tačnost različitih metoda GPS pozicioniranja.	162
8.3	Struktura GPS signala oko 2015. godine.	167
9.1	GLONASS satelitska konstelacija.	171
9.2	Izgled GLONASS satelita: GLONASS-M (gore), GLONASS-K (dole).	172
9.3	GALILEO satelitska konstelacija.	174
9.4	Izgled prvog GALILEO satelita GIOVE-A.	175

9.5	Projektovana konstelacija BeiDou-2 satelita.	177
9.6	Izgled BeiDou-2 satelita: GEO (gore), MEO (dole).	178
9.7	Izgled QZSS satelita QZS-1.	179
9.8	Funkcionalni dijagram uređaja za lasersko merenje rastojanja.	181
9.9	Primer laserske stanice u Potsdamu.	182
9.10	Izgled satelita LAGEOS-1.	183
9.11	Geometrijske veze kod laserskih merenja.	184
9.12	Formiranje normalnih tačaka.	186
9.13	Princip altimetrijskih merenja.	190
9.14	Altimetrijski sateliti ERS-1 (gore) i TOPEX/POSEIDON (dole).	191
9.15	Geometrijske veze u satelitskoj altimetriji.	192
9.16	Srednji nivo mora iz altimetrijske misije TOPEX/POSEIDON.	194
9.17	Princip metode satelitskog praćenja (SST).	197
9.18	Izgled satelita SST misije CHAMP.	198
9.19	Izgled satelita SST misije GRACE.	199
9.20	Izgled satelita gradiometrijske misije GOCE.	201

Spisak tabela

1.1	Osnovne orbitalne karakteristike satelita SPUTNIK-1.	7
3.1	Najznačajnije poremećajne sile i rezultujuća ubrzanja GPS satelita.	50
4.1	Klasifikacija frekvencijskih opsega radio talasa.	59
6.1	Osnovne karakteristike raznih generacija GPS satelita.	104
6.2	Aktuelne vrednosti fundamentalnih WGS84 parametara.	108
6.3	Odnos fekvencija pojedinih komponenti GPS signala prema osnovnoj frekvenciji.	110
6.4	Kategorije IGS orbitalnih proizvoda.	114
7.1	Podaci navigacione poruke koji omogućuju računanje koordinata GPS satelita u proizvoljnom trenutku vremena.	123
7.2	Odnos standarda frekvencijske kombinacije i standarda faznih merenja.	142
8.1	Evolucija kvaliteta standardnog GPS pozicioniranja.	168
9.1	Parametri referentnog PZ-90 elipsoida.	173
9.2	Frekvencije GALILEO nosećih talasa.	175
9.3	Vrste GALILEO navigacionih poruka.	176
9.4	Osnovni orbitalni parametri QZSS satelita.	180
9.5	Karakteristike satelita STARLETTE i LAGEOS.	183

Poglavlje 1
Uvodna razmatranja

1.1 Definicija i zadaci satelitske geodezije

Satelitska geodezija je oblast geodezije koja obuhvata postupke i obradu preciznih merenja ka satelitima, od satelita i između satelita, koji se izvode u cilju rešavanja različitih geodetskih zadataka. Sam pojam je donekle restriktivan jer podrazumeva prvenstveno korišćenje posebno konstruisanih i lansiranih veštačkih Zemljinih satelita. U širem kontekstu, satelitska geodezija obuhvata isto tako i opažanja prema prirodnom Zemljinom satelitu Mesecu i udaljenim svemirskim objektima kao što su kvazari, zbog čega se ponekad u literaturi naziva i kosmičkom ili globalnom geodezijom.

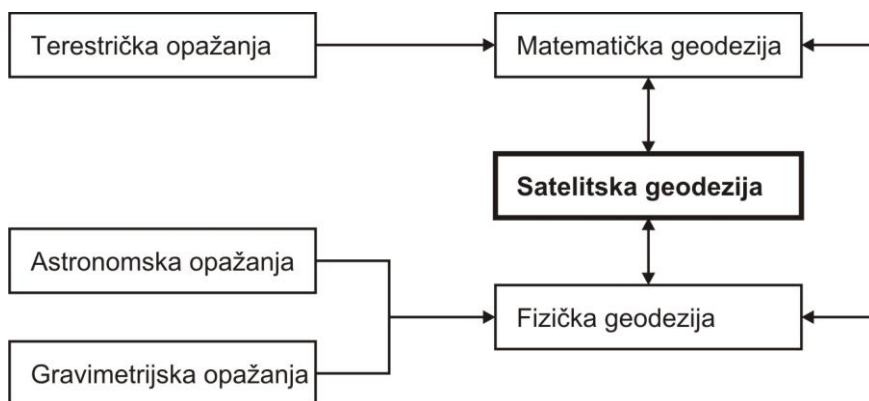
Imajući u vidu da je po savremenoj definiciji geodezija naučna disciplina koja obuhvata ne samo određivanje oblika, veličine i spoljašnjeg gravitacionog polja Zemlje, već i njihovih promena tokom vremena, satelitska geodezija kao svoje osnovne ciljeve ima:

- određivanje preciznih globalnih, regionalnih i lokalnih trodimenzionalnih geodetskih mreža,
- određivanje spoljašnjeg gravitacionog polja Zemlje i njegovih linearnih funkcija kao što su, na primer, undulacije geoida,
- merenje i modeliranje geodinamičkih fenomena (kretanje polova, promene u brzini rotacije Zemlje, savremena pomeranja Zemljine kore i slično).

Ostvarenje ovih ciljeva zahteva izvesne preduslove. S jedne strane, to je detaljno poznavanje kretanja satelita pod dejstvom svih uticajnih sila, a sa druge, jasna definicija položaja satelita i opažачkih stanica na Zemlji u odgovarajućem, isto tako jasno definisanom i reproduktabilnom referentnom koordinatnom sistemu. U tom smislu može se govoriti o naučnom karakteru satelitske geodezije. Ali njene metode isto tako nalaze veliku primenu i u rešavanju brojnih praktičnih geodetskih problema, o čemu naročito svedoči ekspanzija komercijalnog korišćenja američkog satelitskog sistema NAVSTAR GPS. Zbog toga je pravilnije posmatrati satelitsku geodeziju kao naučno-tehničku disciplinu.

Iako je u proteklih nekoliko decenija izrasla u samostalnu i zaokruženu oblast, satelitska geodezija ni u kom slučaju ne predstavlja izolovano polje istraživanja. Umesto toga, metode i rezultati satelitske geodezije tesno su i obostrano povezani ne samo sa ostalim geodetskim oblastima, već i sa geodisciplinama uopšte. Te veze naročito su izražene u razmatranju globalnih problema, jer rezultati satelitske geodezije imaju po prirodi stvari globalni karakter. Kod rešavanja regionalnih i lokalnih problema, metode satelitske geodezije smatraju se više integralnim delom premera i geoinformatike.

Slika 1.1 ilustruje mesto i ulogu koju satelitske metode imaju u geodeziji. Formalna klasifikacija koja je prikazana na slici rezultat je uglavnom istorijskih razloga i zahteva određeno objašnjenje. Tako, na primer, astronomska odnosno



Slika 1.1. Mesto i uloga satelitskih metoda u geodeziji.

astrogeodetska opažanja pripadaju oblasti geodetske astronomije u kojoj se određuje pravac vektora ubrzanja sile teže. Gravimetrijska merenja sastavni su deo gravimetrije, koja se bavi određivanjem intenziteta vektora ubrzanja sile teže. Rezultati astrogeodetskih i gravimetrijskih merenja predstavljaju osnovne veličine za određivanje opšteg oblika Zemlje i dimenzija njenog elipsoida u okviru oblasti koja se tradicionalno naziva fizičkom geodezijom.

S druge strane, terestrička merenja horizontalnih uglova, prostornih dužina, zenitnih odstojanja i visinskih razlika predmet su analize i obrade u matematičkoj geodeziji. Njen osnovni zadatak predstavlja određivanje koordinata tačaka na površi Zemlje u elipsoidnom odnosno trodimenzionalnom koordinatnom sistemu. Rezultati fizičke i matematičke geodezije koriste se u satelitskoj geodeziji za definisanje referentnog sistema i opisivanje geometrije gravitacionog polja Zemlje na visinama satelitskih orbita. Satelitska geodezija sa svoje strane obezbeđuje metode pozicioniranja i određivanja gravitacionog polja Zemlje sa veoma visokom prostornom i vremenskom rezolucijom, čime neposredno unapređuje i fizičku i matematičku geodeziju.

Treba ipak napomenuti da u savremenom poimanju geodetske nauke sve manje ima mesta strogom razdvajanju na različite oblasti. U prilog tome ide i trend da se sva geodetska opažanja, kako terestrička tako i satelitska, tretiraju jedinstveno i simultano u modelu takozvane integralne geodezije. Najnoviji rezultat takvih napora predstavljaju tehnološki kompleksne, mobilne geodetsko-geodinamičke platforme i opservatorije. U svakom slučaju, granice između pojedinih geodetskih oblasti i dalje su prisutne u domenu obrazovanja i istraživanja, ali razlozi su više praktične prirode.

U ovoj knjizi koristićemo pojam satelitske geodezije u njegovom užem smislu. Predmet našeg interesovanja predstavljaće dakle one geodetski relevantne metode prikupljanja, obrade i analize opažanja, koje se odnose isključivo na veštačke Zemljine satelite.

1.2 Klasifikacija i koncept satelitske geodezije

Značaj veštačkih Zemljinih satelita za geodeziju postaje jasniji kada se razmotre sledeća dva aspekta njihovog mogućeg korišćenja:

- Sateliti se pre svega mogu smatrati visokim signalima prema kojima se vrše opažanja. Kada se sa više Zemaljskih stanica simultano izvode merenja, tada nema značaja to što su sateliti pokretna tela, već se prilikom obrade koriste kao poznate, fiksne tačke po analogiji sa klasičnim geodetskim mrežama. Ovakav način korišćenja satelita naziva se geometrijskom ili direktnom metodom satelitske geodezije zbog toga što se koordinate tačaka na Zemljinoj površi dobijaju direktno na osnovu koordinata satelitskih položaja. Prednost geometrijske metode u odnosu na terestričke metode merenja sastoji se u tome što omogućuje ostvarivanje velikih rastojanja, međusobno povezivanje kontinenata, kao i povezivanje kopnenih delova sa usamljenim ostrvima.
- Satelit predstavlja svojevrsni senzor Zemljinog gravitacionog polja. Pošto je privlačno dejstvo Zemlje glavna sila koja upravlja kretanjem satelita, promene i nepravilnosti u njegovoj putanji biće prvenstveno rezultat anomalija u Zemljinom gravitacionom polju. Ta činjenica omogućuje da se na osnovu opažanja ka satelitima odrede istovremeno i koordinate tačaka na Zemlji, i elementi satelitske orbite i parametri Zemljinog gravitacionog polja. Ovakav način korišćenja satelita naziva se dinamičkom ili indirektnom metodom satelitske geodezije, jer se koordinate tačaka na površi Zemlje dobijaju implicitno u kombinaciji sa ostalim nepoznatim parametrima. Prvi značajni rezultat primene dinamičke metode bilo je otkriće da Zemlja nije simetrična u odnosu na ekvator, odnosno da nema jednaku spljoštenost na polovima.

Međutim, podela metoda satelitske geodezije na geometrijske i dinamičke donekle je veštačka i danas nema većeg značaja. Savremeni postupci se u manjoj ili većoj meri karakterišu kombinovanim određivanjem i koordinata tačaka i orbitalnih elemenata i parametara Zemljinog gravitacionog polja.

Druga konceptualna razlika između metoda satelitske geodezije odnosi se na relativni položaj merne opreme u odnosu na uređaje prema kojima se vrše opažanja. U tom pogledu razlikuju se:

- Postupci Zemlja-kosmos koji su vezani za Zemlju na čijoj površini se nalazi oprema za merenje, dok su opažanja usmerena ka satelitima u kosmičkom prostoru. U ove postupke spada merenje pravaca fotografskim putem ili uz pomoć CCD senzora, lasersko merenje rastojanja do satelita,

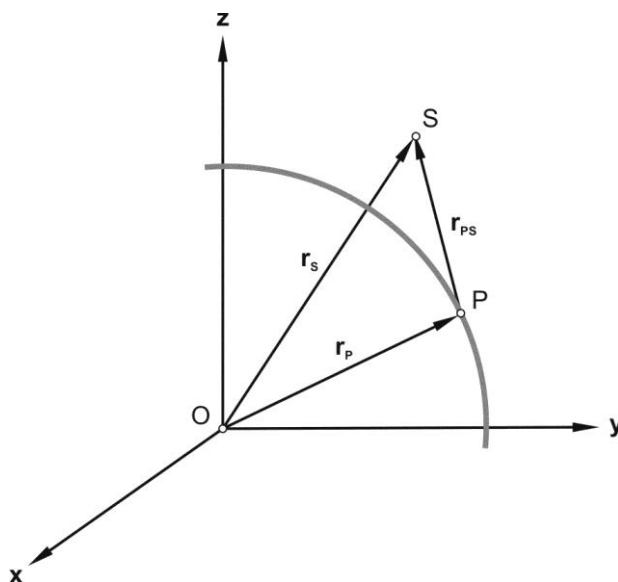
Doplersko pozicioniranje i geodetsko korišćenje satelitskih sistema za globalno pozicioniranje kao što je NAVSTAR GPS.

- Postupci kosmos-Zemlja koji su vezani za kosmički prostor, dok su merenja usmerena od satelita prema uređajima na Zemljinoj površi. U njih spadaju radarska altimetrija, lasersko merenje rastojanja sa satelita i satelitska gradiometrija.
- Postupci kosmos-kosmos koji su čisto kosmički jer se merenja izvode sa jednog, a usmerena su prema drugom satelitu (na primer satelitsko praćenje satelita).

Iako je tehnološki napredak svih navedenih metoda na visokom nivou, za sada su još uvek najrazvijeniji i najtačniji sistemi Zemlja-kosmos jer je kontrola mernog procesa bolja i pouzdanija kada se merni uređaji nalaze na Zemljinoj površi.

Geodetsko korišćenje veštačkih Zemljinih satelita inače je principijelno vrlo jednostavno. Osnovna ideja prikazana je na slici 1.2. U pravouglom koordinatnom sistemu, čiji je početak u centru mase Zemlje, položaj tačke P na fizičkoj površi Zemlje određen je geocentričnim vektorom položaja \mathbf{r}_P , a satelita S geocentričnim vektorom položaja \mathbf{r}_S . Ako se sa \mathbf{r}_{PS} označi topocentrični vektor položaja satelita S u odnosu na tačku P , tada su ova tri vektora u svakom trenutku vremena t povezana relacijom:

$$\mathbf{r}_S(t) = \mathbf{r}_P(t) + \mathbf{r}_{PS}(t). \quad (1.1)$$



Slika 1.2. Ilustracija fundamentalne jednačine satelitske geodezije.

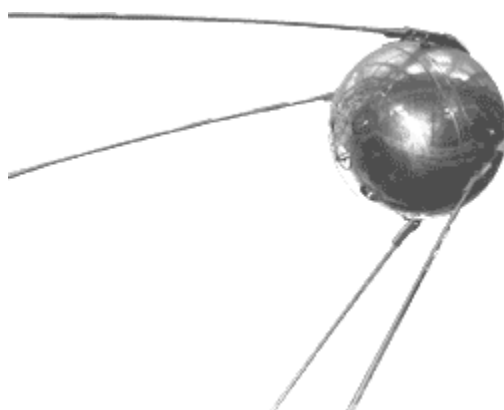
Ova jednakost predstavlja takozvanu fundamentalnu jednačinu satelitske geodezije. U njoj su komponente topocentričnog vektora \mathbf{r}_{PS} poznate, jer su to upravo veličine koje se mere metodama satelitske geodezije. Preostala dva vektora, \mathbf{r}_S i \mathbf{r}_P , načelno određuju neku od sledećih situacija:

- Ako je poznat položaj satelita \mathbf{r}_S , tada se iz fundamentalne jednačine lako može odrediti vektor položaja tačke na površi Zemlje \mathbf{r}_P .
- Obrnuto, ako je poznat položaj tačke na površi Zemlje \mathbf{r}_P , može se odrediti vektor položaja satelita \mathbf{r}_S . Kako je vektor položaja satelita inače funkcija orbitalnih elemenata i parametara Zemljinog gravitacionog polja, sve ove veličine se takođe mogu na određeni način oceniti.
- Konačno, ako je poznat i položaj tačke na površi Zemlje \mathbf{r}_P , i položaj satelita \mathbf{r}_S , pruža se mogućnost da se izvršena merenja kontrolišu, da se oceni njihov kvalitet i da se na osnovu njihove analize izoluju različite korisne informacije, kao što su one o stanju atmosfere, greškama časovnika satelita i slično.

1.3 Istorijski razvoj satelitske geodezije

Satelitska geodezija je relativno mlada disciplina. Njen pravi razvoj praktično započinje 04.10.1957. godine, kada je bivši SSSR lansirao prvi veštački Zemljin satelit, SPUTNIK-1 (slika 1.3).

Osnovna misija satelita SPUTNIK-1 sastojala se u istraživanju atmosfere, i tom cilju bile su podređene satelitske i orbitalne karakteristike (tabela 1.1). Satelitske performanse prevazišle su, međutim, sva očekivanja. SPUTNIK-1 je tokom tri meseca obišao Zemlju 1440 puta na visinama od 200 km do 1000 km, i za to vreme emitovao radio signale čiji je Doplerski pomak pružao mogućnost naučnicima da



Slika 1.3. Prvi veštački Zemljin satelit SPUTNIK-1.

Tabela 1.1. Osnovne orbitalne karakteristike satelita SPUTNIK-1.

Karakteristika	Vrednost
Prečnik satelita	60 cm
Masa satelita	83.6 kg
Frekvencije signala	20 MHz, 40 MHz
Visina leta u perigeumu	215 km
Visina leta u apogeumu	939 km
Ekscentricitet orbite	0.05201
Nagib orbitalne ravni	65.1 ⁰
Period obilaska	96.2 minuta
Projektovano trajanje misije	3 meseca

odrede njegovu orbitu. Satelitska geodezija nastala je ustvari onog momenta kada je utvrđeno da se Doplerskim opažanjima satelita čija je orbita poznata mogu odrediti koordinate stanice na površi Zemlje.

U samo nekoliko narednih godina lansirano je više satelita (SPUTNIK-2, EXPLORER-1, TRANSIT-1B, ECHO-1, ANNA-1B), i detaljno je razrađena teorija kretanja satelita i satelitskih orbita. Do 1964. godine, satelitske metode već su bile testirane na svim važnijim geodetskim problemima: dobijena je precizna vrednost Zemljine spljoštenosti, određen je opšti oblik globalnog geoida i ostvarena je veza između značajnijih geodetskih datuma sa tačnošću od oko 50 m.

Međutim, ako se satelitska geodezija posmatra u širem smislu te reči, koreni njenog razvoja mogu se identifikovati čak u ranom devetnaestom veku. Još 1802. godine Laplas je odredio spljoštenost Zemlje na osnovu analize kretanja Mesečevih čvorova, koristeći metodu koju danas nazivamo dinamičkom. Geometrijski pristup satelitske geodezije takođe je imao prethodnika u vidu takozvane lunarne metode, kod koje su se pravci od opažača prema Mesecu fotografski određivali relativno u odnosu na okolne zvezde.

Sa današnje tačke gledišta, razvoj satelitske geodezije od vremena lansiranja satelita SPUTNIK-1 prolazio je kroz nekoliko faza, od kojih je svaka trajala približno desetak godina:

1958-1970: Ovaj period karakteriše nagli razvoj metoda satelitskih opažanja i teorije kretanja satelita. Naročito je bila usavršena metoda fotografskog određivanja pravaca ka satelitima. Važni rezultati postignuti u to doba bili su globalni geopotencijalni modeli Zemlje (SAO SE I, II i III, GEM), kao i svetska satelitska mreža koja je određena opažanjima satelita PAGEOS balističkom kamerom BC4.

1970-1980: Ova decenija razvoja satelitske geodezije predstavlja period mnogobrojnih naučnih projekata u okviru kojih su razvijeni i usavršeni novi merni

postupci, kao što su lasersko merenje rastojanja do satelita i Meseca, Doplersko pozicioniranje i satelitska altimetrija. Paralelno su određeni i novi geopotencijalni modeli Zemlje (GEM 10, GRIM). U međuvremenu je tačnost merenja dostigla takav nivo da je postalo moguće praćenje geodinamičkih pojava i kontrola postojećih osnovnih državnih mreža (merne kampanje EDOC, DOEDOC).

1980-1990: Od 1980. godine nastupa period operacionalizacije satelitskih metoda u geodeziji i geodinamici. Naročito su značajna dva aspekta ovog razvoja. Prvi se sastoji u činjenici da su pojedini sistemi, a naročito GPS, doživeli takva poboljšanja u performansama i tačnosti da su praktično u potpunosti zamenili tradicionalne terestričke metode državnog premera. Drugi aspekt odnosi se na nivo tačnosti metode laserskog merenja rastojanja i VLBI, koji omogućuje precizno određivanje parametara Zemljine rotacije, zamenjujući na taj način klasične astrometrijske optičke metode. Ova decenija je, osim toga, karakteristična i po širokoj upotrebi satelitskih metoda za određivanja globalnih i regionalnih savremenih pomeranja Zemljine kore.

1990-2000: Ovaj period označava deceniju osnivanja nacionalnih i međunarodnih permanentnih službi. Dve takve službe naročito su u međuvremenu evoluirale. Međunarodna služba Zemljine rotacije (IERS) utemeljena je 1987. godine sa zadatkom da određuje parametre Zemljine rotacije sa visokom vremenskom rezolucijom, i održava odnosno konstantno unapređuje inercijalni i terestrički referentni okvir na osnovu kosmičkih i satelitskih tehnika opažanja. Međunarodna GNSS služba (IGS), osnovana 1994. godine, zadužena je za održavanje globalne mreže od preko 300 permanentno operativnih referentnih GNSS stanica, i danas predstavlja glavni izvor podataka satelitskih orbita. U pojedinim zemljama uspostavljene su u ovom periodu i nacionalne mreže permanentnih stanica (CORS u SAD, CACS u Kanadi ili SAPOS u Nemačkoj), i njihov broj stalno raste.

2000-: I nakon skoro pet decenija satelitske geodezije, razvoj satelitskih metoda nastavlja se nesmanjenom brzinom. Početkom novog milenijuma tačnost satelitskih opažanja već je značajno poboljšana, jednako kao i njihova prostorna i vremenska rezolucija. Pojavljuju se brojna nova polja primene u nauci i praksi. Iako je na duže staze praktično nemoguće predvideti sve implikacije koje tehnološki napredak može imati na razvoj satelitske geodezije, očigledno je da će se on u bliskoj budućnosti odvijati u sledećim pravcima:

- lansiranje specijalizovanih satelitskih misija za određivanje gravitacionog polja Zemlje sa visokom rezolucijom,
- uspostavljanje nove generacije globalnih navigacionih satelitskih sistema (GNSS), u vidu modernizovanog američkog sistema NAVSTAR GPS,

ruskog sistema GLONASS i novih komponenti kao što je evropski satelitski sistem GALILEO,

- postavljanje mreža permanentnih stanica za geodetsko pozicioniranje, navigaciju, praćenje seizmičkih procesa i osmatranje životne sredine,
- integracija satelitskih tehnika u mobilne geodetske i geodinamičke sisteme.

1.4 Primene satelitske geodezije

Mogućnosti primene neke geodetske metode zavise od mnogih faktora, među kojima su tačnost koja se može postići, ekonomičnost postupka i obrade rezultata, trajanje opažanja ili kompleksnost mernih uređaja. S obzirom na to da su po svakom od ovih kriterijuma satelitske metode već dostigle vrlo visoki nivo, bilo kakav pokušaj iscrpnog opisa mogućih primena satelitske geodezije neizostavno bi bio nepotpun. Stoga su u nastavku navedene samo one oblasti primene koje u manjoj ili većoj meri odgovaraju osnovnim zadacima satelitske geodezije.

Globalna geodezija:

- opšti oblik Zemljine figure i gravitacionog polja,
- dimenzije opšteg Zemljinog elipsoida,
- uspostavljanje globalne terestričke referentne osnove,
- određivanje detaljnog geoida na kopnu i moru,
- povezivanje različitih postojećih geodetskih datuma.

Geodetske mreže:

- uspostavljanje fundamentalnih nacionalnih mreža,
- uspostavljanje homogenih trodimenzionalnih mreža,
- analiza i poboljšanje postojećih terestričkih mreža,
- geodetsko povezivanje kopna i ostrva,
- progušćenje postojećih mreža.

Geodinamika:

- određivanje savremenih pomeranja Zemljine kore,
- permanentno trodimenzionalno praćenje seizmičkih zona,
- određivanje pomeranja polova i Zemljine rotacije,
- praćenje plimatskog disanja Zemljine kore.

Praktična i primenjena geodezija:

- detaljni premer za potrebe katastra, planiranja i projektovanja, geografskih informacionih sistema, urbanizma, razgraničenja i slično,
- uspostavljanje specijalnih lokalnih mreža za potrebe inženjerstva,
- uspostavljanje terestričkih mreža orijentacionih tačaka za fotogrametrijske potrebe i daljinsku detekciju,

- pozicioniranje i orijentacija senzora kao što su fotogrametrijske kamere za snimanje iz vazduha,
- pozicioniranje različite tačnosti za potrebe šumarstva, poljoprivrede, arheologije, kartografije i slično.

Navigacija i marinska geodezija:

- precizna navigacija na kopnu, moru i u vazduhu,
- precizno pozicioniranje za potrebe morskog dna, hidrografije, okeanografije, marinske geologije i geofizike,
- povezivanje i kontrola mareografa, odnosno povezivanje i unifikacija različitih vertikalnih referentnih sistema.

Ostale primene:

- pozicioniranje i određivanje brzina za potrebe geofizičkih osmatranja (gravimetrijski, geomagnetski i seizmički premer) na kopnu, moru i u vazduhu,
- određivanje kretanja leda u glaciologiji i istraživanju Antarktika,
- određivanje parametara satelitskih orbita,
- tomografija atmosfere (istraživanje jonosfere i troposfere).

Poglavlje 2

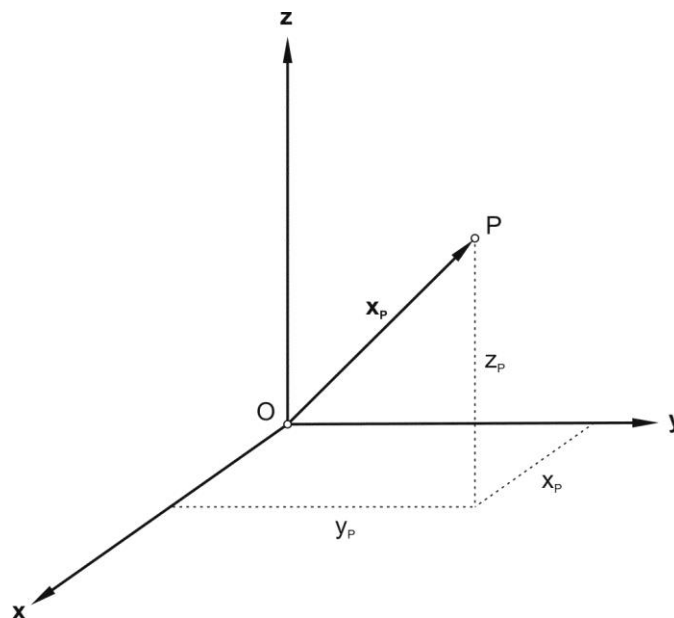
Referentni sistemi satelitske geodezije

2.1 Koordinatni sistemi i transformacije

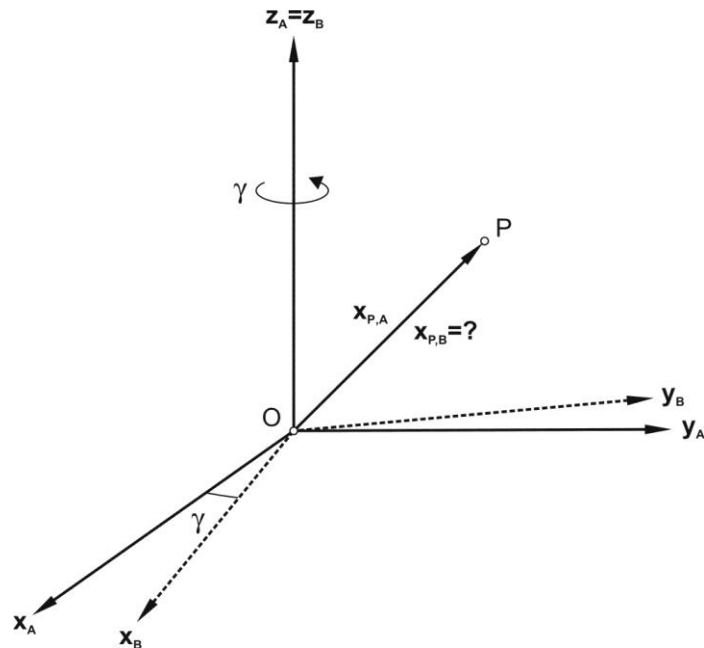
Položaj neke tačke u trodimenzionalnom prostoru jedinstveno je određen uređenom trojkom realnih brojeva koji se nazivaju njenim koordinatama. Uređena trojka predstavlja istovremeno i komponente vektora položaja tačke po koordinatnim osama, kada se takav vektor ne posmatra kao geometrijski objekat već u svojoj algebarskoj predstavi. Skup jasno utvrđenih pravila po kojima se tačkama pridružuju koordinate predstavlja, ustvari, matematičku definiciju koordinatnog sistema.

Pojedini elementi koordinatnog sistema, kao što su koordinatne ose ili koordinatne površi, mogu imati različite oblike i stajati u različitim međusobnim odnosima. Mi ćemo se ovde ograničiti pre svega na klasu pravouglavih pravolinijskih koordinatnih sistema, odnosno onih sistema čije su koordinatne ose prave linije koje međusobno zaklapaju prav ugao. Na slici 2.1 prikazan je primer takvog pravouglog pravolinijskog koordinatnog sistema A, u kojem je proizvoljna tačka P definisana svojim vektorom položaja \mathbf{x}_P , sa komponentama $\mathbf{x}_P = [x_P \ y_P \ z_P]^T$.

Posmatrajmo sada koordinatni sistem B koji je nastao od koordinatnog sistema A rotacijom oko ose z za ugao γ , pri čemu im je koordinatni početak zajednički (slika 2.2). Rotacija se smatra pozitivnom ako se izvodi suprotno od smera kazaljke na satu kada se osa rotacije posmatra u pravcu koordinatnog početka. Neka su oba koordinatna sistema osim toga i desno orijentisana. Označimo vektor položaja



Slika 2.1. Položaj tačke u pravouglom pravolinijskom koordinatnom sistemu.



Slika 2.2. Transformacija koordinata između sistema koji se međusobno razlikuju po rotaciji oko jedne ose.

proizvoljne tačke P u koordinatnom sistemu A sa $\mathbf{x}_{P,A}$, i vektor položaja iste tačke u koordinatnom sistemu B sa $\mathbf{x}_{P,B}$.

Koordinate tačke P , odnosno komponente njenog vektora položaja u novom koordinatnom sistemu, dobijaju se transformacijom komponenti vektora položaja u početnom koordinatnom sistemu po izrazu:

$$\mathbf{x}_{P,B} = \mathbf{R}_3(\gamma)\mathbf{x}_{P,A}. \quad (2.1)$$

Matrica elementarne rotacije $\mathbf{R}_3(\gamma)$ pomoću koje se vrši ova linearna transformacija ima članove:

$$\mathbf{R}_3(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Ukoliko je novi koordinatni sistem rezultat rotacije početnog sistema oko ose x za ugao α ili oko ose y za ugao β , transformacija koordinata izvodi se na sličan način odgovarajućim matricama elementarnih rotacija $\mathbf{R}_1(\alpha)$ i $\mathbf{R}_2(\beta)$:

$$\mathbf{R}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Uloga svake od matrica elementarnih rotacija sastoji se u rotiranju koordinatnog sistema oko jedne koordinatne ose, sve dok preostale dve koordinatne ose ne zauzmu položaj koji je pogodan za rešavanje konkretnog problema. Shodno tome, dva koordinatna sistema sa zajedničkim početkom i proizvoljno orijentisanim koordinatnim osama uvek se mogu dovesti do potpunog poklapanja serijom uzastopnih elementarnih rotacija čiji je rezultat takozvana matrica ukupne rotacije u oznaci $\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_1(\alpha)\mathbf{R}_2(\beta)\mathbf{R}_3(\gamma). \quad (2.4)$$

Potrebno je, međutim, imati na umu da redosled množenja matrica u izrazu (2.4) nije proizvoljan. U ovom slučaju radi se prvo o rotaciji oko ose z koju sledi rotacija oko ose y , da bi se na kraju izvršila i rotacija oko ose x .

Matrice elementarnih rotacija su antisimetrične, i determinanta im je jednaka jedinici. Pored toga, očigledno je da one ne menjaju dužinu (intenzitet) vektora. Od ostalih njihovih osobina mogu se izdvojiti sledeće:

- Proizvod matrica elementarnih rotacija oko dve različite koordinatne ose i i j nije komutativan:

$$\mathbf{R}_i(\mu)\mathbf{R}_j(\nu) \neq \mathbf{R}_j(\nu)\mathbf{R}_i(\mu), \quad (2.5)$$

- Rotacije oko iste koordinatne ose su aditivne:

$$\mathbf{R}_i(\mu)\mathbf{R}_i(\nu) = \mathbf{R}_i(\mu + \nu), \quad (2.6)$$

- Matrice elementarnih rotacija su ortogonalne, što znači da im se inverzija svodi na transpoziciju:

$$\mathbf{R}_i^{-1}(\mu) = \mathbf{R}_i^T(\mu) = \mathbf{R}_i(-\mu). \quad (2.7)$$

Orijentacija koordinatnih osa nije jedini kriterijum po kojem se dva koordinatna sistema mogu razlikovati. Ostali slučajevi su, međutim, srazmerno jednostavniji. Ako dva koordinatna sistema A i B nemaju zajednički koordinatni početak, ili im se razlikuje razmera, ili su im pojedine koordinatne ose suprotno usmerene, elementarne transformacije vektora položaja proizvoljne tačke P imaju respektivno sledeći oblik:

$$\mathbf{x}_{P,B} = \mathbf{x}_{P,A} + \mathbf{t}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{x}_{P,B} = (1 + dm)\mathbf{x}_{P,A}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{x}_{P,B} = \mathbf{S}\mathbf{x}_{P,A}. \quad (2.10)$$

U ovim izrazima $\mathbf{t} = [t_x \ t_y \ t_z]^T$ označava vektor translacije, odnosno koordinate početka sistema A u koordinatnom sistemu B; dm je razlika u razmeri dva sistema, a \mathbf{S} je matrica polarnosti koja za pojedine koordinatne ose iznosi:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Dva koordinatna sistema mogu se, dakle, u opštem slučaju međusobno razlikovati po lokaciji, orijentaciji, razmeri i polarnosti. Izraz za transformaciju koordinata tada ima oblik:

$$\mathbf{x}_{P,B} = \mathbf{t} + (1 + dm)\mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{x}_{P,A}. \quad (2.12)$$

2.2 Globalni referentni sistemi

Da bi se koordinatni sistemi o kojima je bilo reči definisali u trodimenzionalnom prostoru, neophodno je propisati koordinatni početak (tri elementa), orijentaciju koordinatnih osa (tri elementa) i razmeru (obično jedan element). Tako usvojeni koordinatni sistemi, uz neophodne konstante, parametre, konvencije i teorije koje definišu koordinate i nedvosmisleno određuju na koji se način one pridružuju tačkama i objektima, nazivaju se referentnim sistemima.

Referentni sistem, međutim, sam po sebi ne obezbeđuje nikakvu praktičnu mogućnost određivanja koordinata novih tačaka. Stoga se u modernoj terminologiji razlikuje još i pojam referentnog okvira ili referentne osnove. Referentni okvir materijalizuje odgovarajući referentni sistem, i na taj način ga čini dostupnim korisnicima. Realizacija referentnog okvira najčešće se postiže skupom fizički stabilizovanih tačaka ili kosmičkih tela i objekata, zajedno sa spiskom njihovih koordinata koje se upravo odnose na referentni sistem koji se materijalizuje.

Kada su u pitanju teorija i praksa satelitske geodezije, od interesa su pre svega dva tipa referentnih sistema: inercijalni, u kojem se opisuje kretanje satelita, i terestrički, koji služi za predstavljanje položaja tačaka na površi Zemlje.

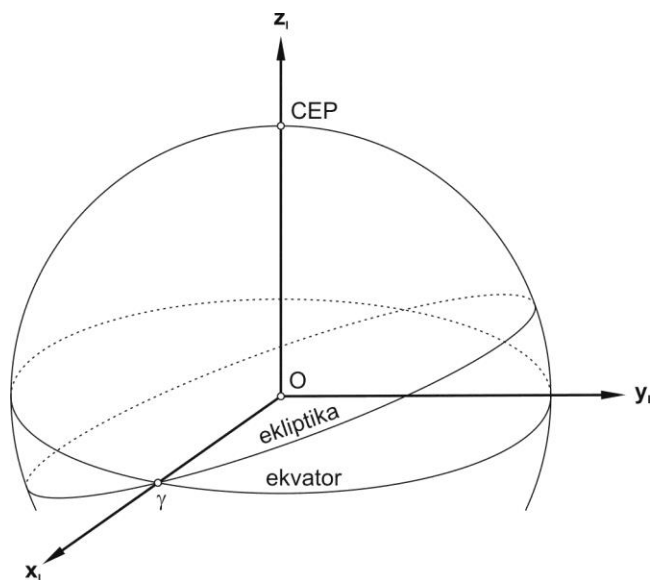
Inercijalni referentni sistem. Inercijalni referentni sistem (IRS) definiše se kao koordinatni sistem koji je nepomičan u prostoru, ili se u njemu translatorno kreće konstantnom brzinom. To je sistem u kojem se izražavaju vektori sile, ubrzanja, brzine i položaja, u skladu sa jednačinama Njutnove mehanike. Položaji udaljenih

zvezda i kosmičkih objekata su u odnosu na IRS u principu nepromenljivi. Imajući to u vidu, inercijalni referentni sistem definiše se na sledeći način:

- koordinatni početak je u centru mase Zemlje (geocentrična definicija),
- osa z_I poklapa se sa osom rotacije Zemlje,
- osa x_I usmerena je u pravcu tačke prolećne ravnodnevnice (γ tačka),
- osa y_I kompletira pravougli sistem desne orijentacije.

Slika 2.3 ilustruje navedenu definiciju. Koordinatni početak smešten je u centru mase Zemlje O. Osa z_I poklapa se sa trenutnom osom rotacije Zemlje i prodire kroz zamišljenu nebesku sferu u severnom nebeskom polu (CEP). Osa x_I usmerena je prema takozvanoj γ tački, odnosno tački prolećne ravnodnevnice, čiji se pravac definiše kao presek ravni Zemljinog ekvatora sa ravni putanje Zemlje oko Sunca (ekliptike). Osa y_I kompletira pravougli koordinatni sistem desne orijentacije.

Interesantniji deo definicije inercijalnog sistema odnosi se na činjenicu da osa Zemljine rotacije ustvari ne zauzima fiksni pravac u inercijalnom prostoru. Gravitacioni uticaj Sunca i Meseca na nehomogenu i blago spljoštenu Zemlju uzrokuje složeno periodično kretanje njene ose rotacije u odnosu na zvezde i ekstragalaktičke objekte. Ono se može razložiti na dve komponente. Prva se naziva precesijom, i označava konstantnu rotaciju γ tačke u ravni ekliptike, sa periodom od oko 25 800 godina, odnosno 50.3" godišnje. Precesiono kretanje kombinovano je sa nutacijom, koja predstavlja periodičnu promenu nagiba ravni ekvatora u odnosu na ravan ekliptike, sa osnovnim periodom od 18.6 godina i amplitudom od



Slika 2.3. Definicija inercijalnog referentnog koordinatnog sistema.

9.2". Da je Zemlja savršeno homogena sfera, ne bi bilo ni precesije ni nutacije.

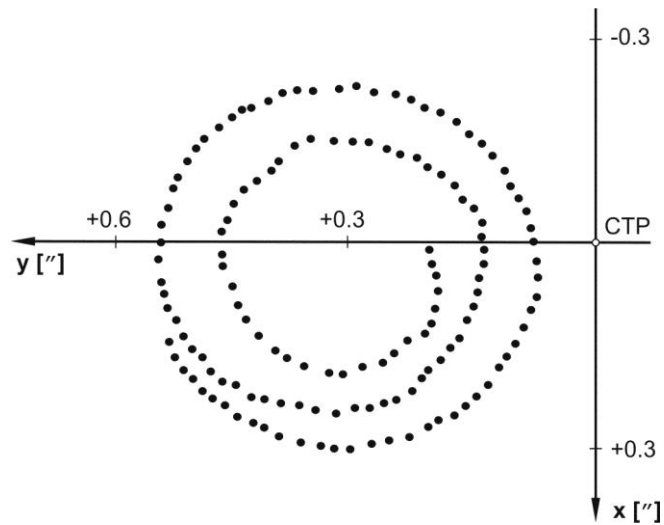
Činjenica da Zemljina osa rotacije ipak menja svoj položaj zahteva da se za IRS definiše i referentni vremenski trenutak na koji će se svoditi opažanja i položaji. Međunarodnim dogovorom utvrđeno je da to bude epoha 1. januara 2000. godine u 12 časova UT vremena (J2000). Ovako definisan inercijalni referentni sistem naziva se konvencionalnim inercijalnim referentnim sistemom (CIRS).

CIRS se naravno materijalizuje konvencionalnim inercijalnim referentnim okvirom (CIRF). Njega je do 1997. godine definisao katalog položaja i sopstvenih kretanja skupa fundamentalnih zvezda, kvazara i drugih ekstragalaktičkih objekata, pod nazivom FK5. Kada je Međunarodna astronomska unija odlučila 1991. godine da uspostavi novi, kinematički definisan međunarodni nebeski referentni sistem (ICRS), uveden je i odgovarajući međunarodni nebeski referentni okvir (ICRF). ICRF čini katalog položaja za 608 ekstragalaktičkih radio izvora određenih VLBI tehnikom, kao i takozvani Hipparcos katalog sa položajima i sopstvenim kretanjem za 118 218 zvezda.

Terestrički referentni sistem. Inercijalni sistem nije pogodan za predstavljanje položaja tačaka na fizičkoj površi Zemlje, zato što bi se u tom slučaju njihove koordinate neprekidno menjale usled Zemljine rotacije. Za te svrhe neophodan je referentni sistem koji je na unapred definisani način čvrsto vezan za Zemljinu koru, tako da su u odnosu na njega koordinate stacionarnih tačaka u principu konstantne. Takav sistem poznat je kao terestrički referentni sistem (TRS).

Terestrički referentni sistem može se inače definisati sasvim proizvoljno ako je zadovoljen osnovni uslov da bude čvrsto fiksiran u odnosu na Zemljino telo. Logično je, međutim, da koordinatni početak bude smešten u centru mase Zemlje, a da se z osa podudara sa Zemljinom osom rotacije. Osa x može se izabrati tako da prolazi kroz tačku preseka ekvatora i početnog Griničkog meridijana, čime se obezbeđuje da sistem rotira zajedno sa Zemljom. Konačno, y osa se bira na taj način da kompletira sistem desne orijentacije.

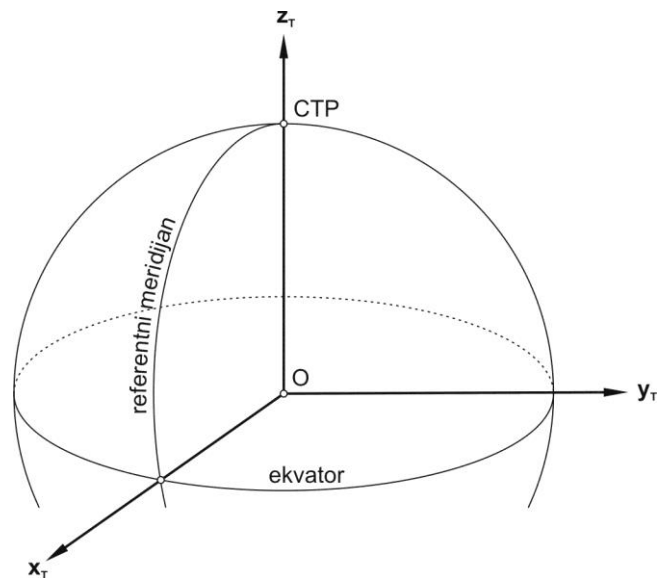
Ovakva definicija terestričkog referentnog sistema bila bi sasvim dovoljna da nema jedan krupan nedostatak: osa Zemljine rotacije ne zauzima fiksni položaj u telu Zemlje. Pol rotacije pomera se tokom vremena u odnosu na okolnu Zemljinu koru po približno spiralnoj putanji čiji poluprečnik ne prelazi 15 m. Ovaj fenomen naziva se kretanjem pola. Za razliku od precesije i nutacije, tačan mehanizam kretanja pola nije poznat, ali se veruje da je rezultat neke vrste preraspodele masa unutar Zemljinog tela. Problem je u svakom slučaju prevaziđen na taj način što je međunarodnim dogovorom definisan srednji položaj pola za period od 1900. do 1905. godine, pod nazivom konvencionalni terestrički pol (CTP). CTP dakle određuje orijentaciju koordinatnih osa terestričkog referentnog sistema na koje se svode opažanja i položaji. Pošto ne postoje modeli kojima se kretanje Zemljine ose rotacije može dovoljno tačno prognozirati, položaj trenutnog pola mora se direktno određivati. Više od sto godina u te svrhe su se tradicionalno koristila astronomska



Slika 2.4. Kretanje pola za period od 1990. do 1993. godine u odnosu na konvencionalni terestrički pol (CTP).

merenja. Danas se kretanje trenutnog pola u odnosu na CTP određuje sa visokom tačnošću i rezolucijom pomoću satelitskih metoda (slika 2.4).

Sa tako usvojenim srednjim položajem pola rotacije, sada možemo definisati konvencionalni terestrički referentni sistem (CTRS), na sledeći način (slika 2.5):



Slika 2.5. Definicija terestričkog referentnog koordinatnog sistema (CTRS).

- koordinatni početak smešten je u centru mase Zemlje (uključujući i masu okeana i atmosfere),
- osa z_T poklapa se sa srednjom osom rotacije Zemlje za period od 1900. do 1905. godine, odnosno prolazi kroz CTP,
- osa x_T prolazi kroz tačku preseka CTP ekvatora i CTP početnog Griničkog meridijana,
- osa y_T nalazi se u ekvatorskoj ravni i kompletira pravougli koordinatni sistem desne orijentacije.

Od 1988. godine, kada je definisanje i održavanje referentnih sistema povereno Međunarodnoj službi Zemljine rotacije (IERS), u nauci i praksi se koristi gotovo isključivo takozvani međunarodni terestrički referentni sistem (ITRS). Formalna ITRS definicija glasi:

- sistem je geocentričan, pri čemu je centar mase definisan za celu Zemlju uključujući okeane i atmosferu,
- jedinica dužine je SI metar, sa razmerom koja je definisana u kontekstu relativističke teorije gravitacije,
- orijentacija koordinatnih osa zadata je inicijalnom orijentacijom bivše Međunarodne službe vremena (BIH) za epohu 1984.0,
- vremenska evolucija orijentacije koordinatnih osa definisana je tako da nema globalnih rezidualnih rotacija u odnosu na Zemljinu koru.

Materijalizacija ovako definisanog sistema, odnosno realizacija odgovarajućeg međunarodnog terestričkog referentnog okvira (ITRF), takođe spada u nadležnost IERS. Uspostavljanje ITRF praktično se ostvaruje pomoću pravougljih koordinata i linearnih brzina za skup globalno raspoređenih opažачkih stanica opremljenih različitim satelitskom i kosmičkom mernom opremom. S obzirom na to da su stanice smeštene na litosfernim pločama koje se međusobno kreću, primena poslednjeg kriterijuma u gornjoj ITRS definiciji obezbeđuje stabilnost orijentacije koordinatnih osa u odnosu na Zemljinu koru. Geodinamički procesi su istovremeno i razlog što IERS periodično realizuje ITRF. Rezultati se publikuju pod oznakom ITRF $_{xx}$, gde xx predstavlja poslednju godinu čiji su podaci opažanja korišćeni.

ITRS može biti materijalizovan kako globalno tako i regionalno. Globalna verzija, pod nazivom Svetski geodetski sistem 1984 (WGS84), posebno je značajna u pozicioniranju i navigaciji satelitskim sistemom NAVSTAR GPS. Regionalne ITRS realizacije, kao što su na primer EUREF i SIRGAS, koriste se kao osnova za geodetske i kartografske radove na evropskom odnosno južnoameričkom prostoru.

Transformacija između sistema. Inercijalni i terestrički referentni sistemi imaju praktičnu operativnu vrednost tek onda kada su poznate relacije koje omogućuju njihove međusobne transformacije. Takva potreba pojavljuje se, na primer, kod modeliranja satelitski izmerenih dužina. Koordinate stanica na površi Zemlje izražavaju se u odnosu na terestrički referentni sistem, za razliku od satelitskih orbita koje su obično zadate u inercijalnom referentnom sistemu. Da bi se dužina između stanice i satelita izrazila u funkciji koordinata, one se moraju odnositi na jedinstveni koordinatni sistem.

Pošto su u pitanju sistemi sa zajedničkim koordinatnim početkom i istom razmerom i polarnošću, transformacija iz inercijalnog u terestrički referentni sistem sastoji se jedino u rotacijama. Matrica ukupne rotacije, u oznaci \mathbf{R}_I^T , takođe je u principu funkcija tri ugla rotacije. Međutim, ona se iz fenomenoloških razloga prikazuje u funkciji čak devet argumenata, i razdvaja se obično na sledeće četiri komponente:

- matrica precesije \mathbf{P} ,
- matrica nutacije \mathbf{N} ,
- matrica Zemljine rotacije \mathbf{S} ,
- matrica kretanja pola \mathbf{W} ,

U skladu s tim, transformacija vektora položaja iz inercijalnog u terestrički sistem vrši se po izrazu:

$$\mathbf{x}_T = \mathbf{R}_I^T \mathbf{x}_I = \mathbf{W} \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{P} \mathbf{x}_I. \quad (2.13)$$

Svaka od navedenih komponenti je takođe sama po sebi rezultat više elementarnih rotacija, sa argumentima čije se vrednosti u konkretnom trenutku vremena računaju po komplikovanim algoritmima. Svi neophodni detalji u vezi transformacije (2.13) mogu se naći u oficijelnoj IERS periodičnoj publikaciji pod nazivom IERS Conventions.

2.3 Geodetski datum i datumska transformacija

Iako su sa matematičke tačke gledišta veoma jednostavne, pravougle koordinate terestričkog referentnog sistema nisu najpogodnije za svakodnevnu upotrebu. Na osnovu njih se, na primer, ne može lako proceniti gde se tačka nalazi u odnosu na Zemljino telo, i na kojoj je visini iznad njene površi. S obzirom na to da je Zemlja sfernog oblika, ima smisla definisati sistem koordinata koji jasno razdvaja horizontalni položaj tačke od njene visine.

Zemljina površ je, međutim, suviše nepravilna i promenljiva da bi poslužila za definisanje koordinata. Ono što je potrebno je model. Prvobitno su navigatori i kartografi koristili sferu kao model Zemlje, ali je još od vremena Njutna poznato da

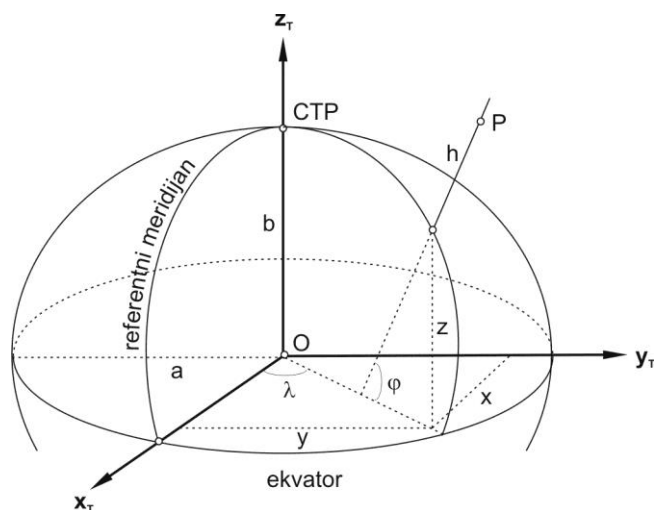
je Zemlja spljoštena na polovima. Najjednostavnija geometrijska figura koja u dovoljnoj meri aproksimira pravi oblik Zemlje je dakle obrtni elipsoid koji nastaje rotacijom elipse oko njene male ose. On se često naziva geodetskim datumom, jer predstavlja referencu ili osnovu za definisanje trodimenzionalnih koordinata u okviru globalnog elipsoidnog koordinatnog sistema.

Obrtni elipsoid pridružuje se terestričkom referentnom sistemu tako što se propiše da je geometrijski centar u koordinatnom početku, a da se mala osa poklapa sa z osom. Kada mu se na taj način uspostavi tačna lokacija i orijentacija u odnosu na Zemlju, obrtni elipsoid naziva se apsolutnim datumom. Za potpunu definiciju apsolutnog datuma preostaju tada još samo dva parametra, velika i mala poluosa elipsoida, a i b . Umesto male poluose često se koriste izvedeni parametri, kao što su spljoštenost f ili prvi numerički ekscentricitet e :

$$f = \frac{a-b}{a}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (2.14)$$

Geodetske (elipsoidne ili geografske) koordinate globalnog elipsoidnog sistema možemo sada definisati na sledeći način (slika 2.6):

- geodetska latituda (elipsoidna ili geografska širina) je ugao koga zaklapa normala tačke na elipsoid sa ekvatorskom ravni,
- geodetska longituda (elipsoidna ili geografska dužina) je ugao koga zaklapa ravan meridijana tačke sa ravni referentnog meridijana,
- elipsoidna (geodetska) visina je rastojanje mereno duž normale tačke do površi obrtnog elipsoida.



Slika 2.6. Definicija geodetske širine, geodetske dužine i elipsoidne visine.

Geodetska širina φ može uzimati vrednosti od 0 do $+\pi/2$ severno od ekvatora, odnosno od 0 do $-\pi/2$ južno od ekvatora. Postoje dakle severne i južne širine. Geodetska dužina λ ima vrednosti od 0 do $+\pi$ istočno od početnog meridijana i od 0 do $-\pi$ zapadno od njega, što znači da postoje istočne i zapadne dužine. Tačke iste geodetske širine obrazuju kružnicu pod nazivom paralela. Tačke sa konstantnom geodetskom dužinom leže na elipsi koja se naziva meridijanom. Elipsoidna visina h smatra se pozitivnom ako je tačka iznad površi elipsoida.

Između pravouglanih koordinata (x, y, z) i geodetskih koordinata (φ, λ, h) postoji direktna transformaciona veza:

$$\begin{aligned}x &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda, \\z &= [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi\end{aligned}\tag{2.15}$$

pri čemu N označava poluprečnik krivine po prvom vertikalnu koji se računa kao:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.\tag{2.16}$$

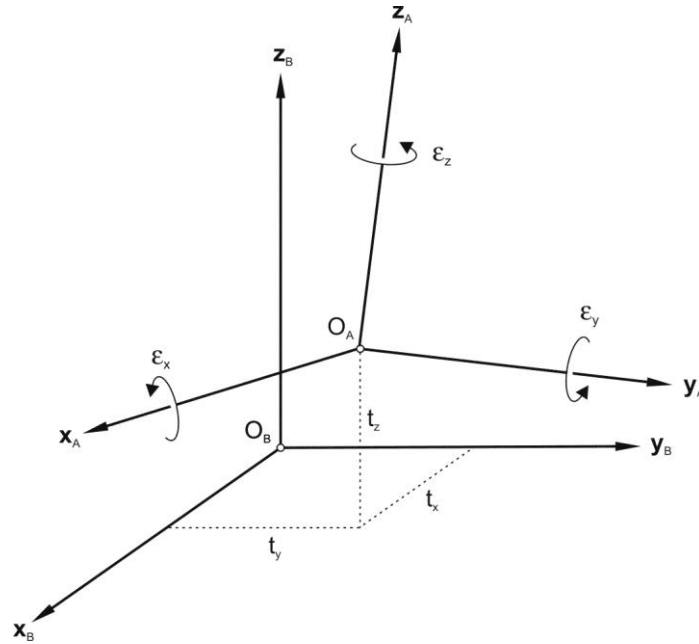
Obrnuta transformacija može se, međutim, realizovati na više načina. Geodetska dužina određuje se u svakom slučaju jednoznačno kao $\tan \lambda = y/x$, ali se računanje geodetske širine i elipsoidne visine najčešće vrši iterativno, jer ove veličine zavise jedna od druge:

$$h = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - N,\tag{2.17}$$

$$\tan \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 - e^2 \frac{N}{N + h} \right)^{-1}.\tag{2.18}$$

Iteracije u tom slučaju mogu započeti sa vrednošću elipsoidne visine $h = 0$. Proces veoma brzo konvergira za $h \ll N$.

Datumska transformacija. U praksi je izuzetno teško ispuniti stroge kriterijume iz definicije apsolutnog datuma. To se naročito odnosi na nacionalne geodetske datume, koje je većina država uspostavila u vreme kada se geocentričnost obrtnog elipsoida i paralelnost njegovih osa sa osama terestričkog referentnog sistema mogla obezbediti samo približno. Stoga se klasično definisanje datuma sastojalo uglavnom u praktičnom zahtevu da izabrani elipsoid svojom lokacijom, oblikom i dimenzijama što bolje aproksimira Zemljinu figuru na ograničenoj državnoj teritoriji. Rezultat tog pristupa je činjenica da se lokalni geodetski datumi, koji su



Slika 2.7. Datumaska transformacija između dva pravouglata koordinatna sistema.

danas u upotrebi, ne podudaraju po lokaciji, orijentaciji i razmeri ni sa apsolutnim datumom, ni međusobno.

Prelazak iz jednog geodetskog datuma u drugi može se ostvariti takozvanom datumskom transformacijom. Iako su u pitanju elipsoidni koordinatni sistemi, sama transformacija se operativno izvodi pomoću odgovarajućih pravouglavih koordinata (slika 2.7). Za potpunu datumsku transformaciju neophodno je svih sedam parametara: tri translacije po koordinatnim osama (t_x, t_y, t_z), tri ugla rotacije oko koordinatnih osa ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$) i jedan parametar razmere (dm).

Pošto uglovi rotacija ϵ imaju po pravilu male vrednosti ($< 1'$), obično se mogu sa dovoljnom tačnošću usvojiti aproksimacije $\cos \epsilon \approx 1$ i $\sin \epsilon \approx \epsilon$, čime struktura matrice ukupne rotacije \mathbf{R} postaje znatno jednostavnija:

$$\mathbf{R}(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z) = \mathbf{R}_1(\epsilon_x) \mathbf{R}_2(\epsilon_y) \mathbf{R}_3(\epsilon_z) = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 1 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

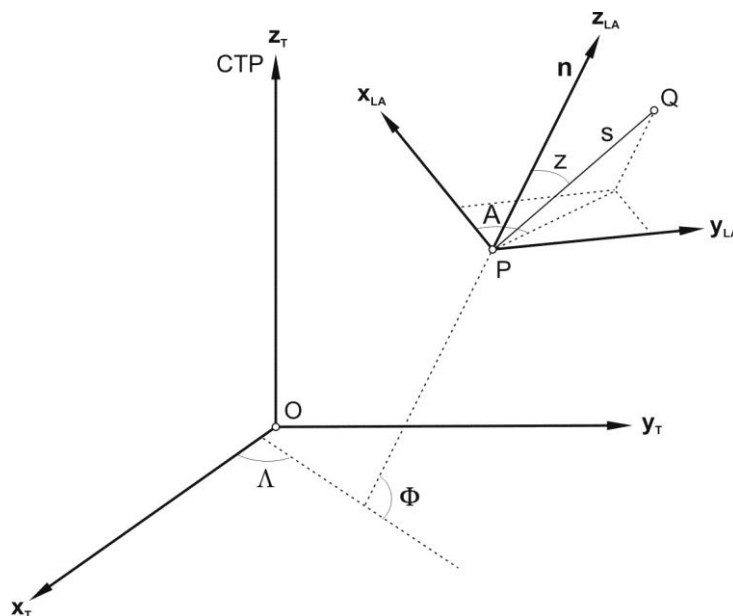
Primitimo, takođe, da i proizvod matrica elementarnih rotacija postaje komutativan u slučaju aproksimacije trigonometrijskih funkcija malih uglova, tako da redosled množenja u izrazu (2.19) nema više značaja. Datumaska transformacija pravouglavih koordinata proizvoljne tačke P iz datuma A u datum B, sada ima sledeći oblik:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}_{A,B} + (1 + dm) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}_A. \quad (2.20)$$

Datumska transformacija ne mora biti ograničena na sedam parametara. U lokalnim primenama često su, na primer, dovoljna samo tri parametra translacije. Broj parametara povećava se na devet ako se transformacija izvodi u elipsoidnim koordinatama, jer je tada neophodno razmatrati i razlike u velikim poluosama i spljoštenostima dva elipsoida. Koeficijenti razvoja potencijala Zemljinog polja teže i fundamentalne konstante kao što su brzina svetlosti u vakuumu, brzina rotacije Zemlje ili geocentrična gravitaciona konstanta, takođe mogu biti sastavni deo datumske definicije, naročito onda kada se informacije o datumu dobijaju analizom satelitskih orbita. U ovu grupu spada, na primer, svetski geodetski sistem WGS84.

2.4 Lokalni referentni sistemi

Gotovo sva terestrička geodetska merenja suštinski zavise od geometrije Zemljinog gravitacionog polja. Referentni sistem koji je najpogodniji za njihovo matematičko modeliranje oslanja se na pravac lokalne vertikale u tački opažanja, i poznat je pod imenom lokalni astronomski referentni sistem (slika 2.8).



Slika 2.8. Lokalni astronomski referentni koordinatni sistem.

Lokalni astronomski referentni sistem definiše se na sledeći način:

- koordinatni početak smešten je u tački opažanja P na površi Zemlje,
- osa z_{LA} zauzima pravac vektora lokalne vertikale \mathbf{n} u tački opažanja P ,
- osa x_{LA} usmerena je prema astronomskom severu (CTP),
- osa y_{LA} usmerena je prema astronomskom istoku.

Orijentacija same vertikale u okviru terestričkog referentnog sistema određena je astronomskom širinom Φ i dužinom Λ , koje se inače mogu meriti metodama geodetske astronomije. Primetimo da je lokalni astronomski referentni sistem levo orijentisan. Slika 2.8 takođe ilustruje i činjenicu da projekcija vertikale na ravan ekvatora u opštem slučaju ne prolazi kroz centar mase Zemlje O zbog nepravilnog oblika astronomskih meridijana.

Posmatrajmo sada proizvoljnu susednu tačku Q u istom sistemu. Njen položaj se očigledno može definisati polarnim ili pravouglim koordinatama. Interesantno je da polarne koordinate predstavljaju azimut A , zenitno odstojanje z i prostorna dužina s , dakle veličine koje se inače mogu direktno meriti teodolitom, distomatom ili totalnom stanicom. Polarne i pravouglove koordinate povezane su poznatim relacijama:

$$x_{LA} = s \sin z \cos A, \quad y_{LA} = s \sin z \sin A, \quad z_{LA} = s \cos z$$

$$s = \sqrt{x_{LA}^2 + y_{LA}^2 + z_{LA}^2}, \quad \tan A = \frac{y_{LA}}{x_{LA}}, \quad \tan z = \frac{z_{LA}}{\sqrt{x_{LA}^2 + y_{LA}^2}}. \quad (2.21)$$

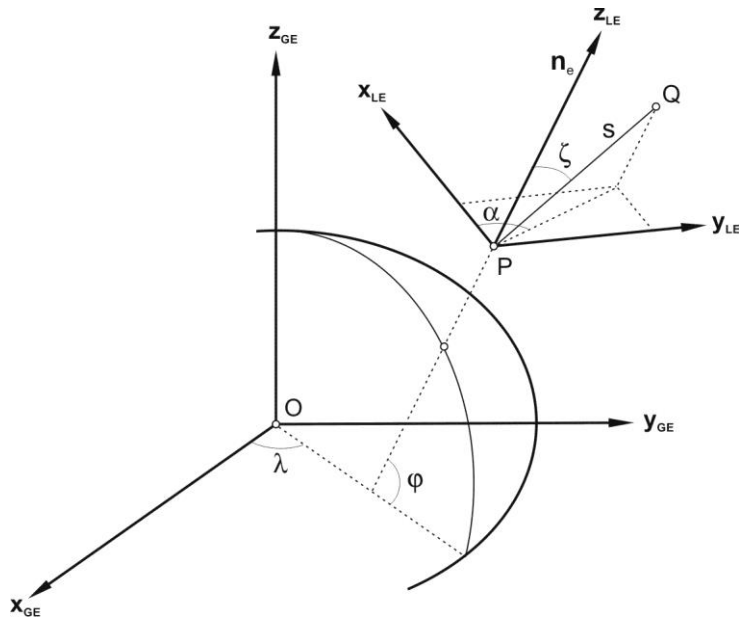
Da bi se vektor položaja tačke Q transformisao iz lokalnog astronomskog sistema u terestrički referentni sistem, mora se uzeti u obzir njihova razlika u lokaciji, orijentaciji i polarnosti. Transformacija se dakle izvodi u nekoliko koraka. Sistemi se prvo svode na istu polarnost y osa pomoću matrice \mathbf{S}_2 . Nakon toga se lokalni astronomski sistem dovodi u položaj paralelan terestričkom referentnom sistemu pomoću dve sukcesivne rotacije: prva se izvodi oko ose y_{LA} za ugao $(90^\circ - \Phi)$, a druga oko novog položaja z_{LA} ose za ugao $(180^\circ - \Lambda)$. Sistemi se konačno dovode do poklapanja pomoću koordinata početka P u terestričkom referentnom sistemu.

Kompletna transformacija, prema tome, glasi:

$$\mathbf{x}_{Q,T} = \mathbf{x}_{P,T} + \mathbf{R}_3(180^\circ - \Lambda)\mathbf{R}_2(90^\circ - \Phi)\mathbf{S}_2\mathbf{x}_{Q,LA} = \mathbf{x}_{P,T} + \mathbf{A}\mathbf{x}_{Q,LA}, \quad (2.22)$$

sa matricom \mathbf{A} čiji je eksplicitni oblik:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sin \Phi \cos \Lambda & -\sin \Lambda & \cos \Phi \cos \Lambda \\ -\sin \Phi \sin \Lambda & \cos \Lambda & \cos \Phi \sin \Lambda \\ \cos \Phi & 0 & \sin \Phi \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$



Slika 2.9. Lokalni elipsoidni referentni koordinatni sistem.

Formula za obrnutu transformaciju dobija se jednostavno kao:

$$\mathbf{x}_{Q,LA} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_{Q,T} - \mathbf{x}_{P,T}) = \mathbf{A}^T(\mathbf{x}_{Q,T} - \mathbf{x}_{P,T}). \quad (2.24)$$

Izrazi (2.21), (2.22) i (2.24) omogućuju kombinovanu obradu rezultata terestričkih i satelitskih merenja, bilo da se ona vrši u lokalnom astronomskom ili u globalnom terestričkom referentnom sistemu.

Tačka opažanja P može se usvojiti kao koordinatni početak još jednog sistema, pod nazivom lokalni elipsoidni referentni sistem. Za razliku od prethodnog, ovaj sistem oslanja se svojom osom z_{LE} na elipsoidnu normalu \mathbf{n}_e , dok su ose x_{LE} i y_{LE} usmerene respektivno prema elipsoidnom severu i istoku (slika 2.9).

Orijentacija elipsoidne normale u okviru pridruženog globalnog elipsoidnog koordinatnog sistema određena je geodetskom širinom φ i dužinom λ . One se inače veoma malo razlikuju od svojih astronomskih ekvivalenata Φ i Λ , a naročito kada izabrani elipsoid globalno aproksimira Zemljinu figuru u vidu apsolutnog datuma. Slično su definisane i polarne koordinate susedne tačke Q, s tim što su astronomski azimut A i zenitno odstojanje z zamenjeni elipsoidnim azimutom α i zenitnim odstojanjem ζ . Prostorna dužina s ne zavisi od razlike između vertikale i normale, tako da ostaje ista.

Kada se astronomske veličine u formulama (2.21) i matrici \mathbf{A} (2.23) zamene elipsoidnim, dobijaju se ekvivalentni izrazi za relacije između polarnih i pravougljih koordinata, i za transformaciju lokalnog u globalni elipsoidni referentni sistem:

$$x_{LE} = s \sin \zeta \cos \alpha, \quad y_{LE} = s \sin \zeta \sin \alpha, \quad z_{LE} = s \cos \zeta$$

$$s = \sqrt{x_{LE}^2 + y_{LE}^2 + z_{LE}^2}, \quad \tan \alpha = \frac{y_{LE}}{x_{LE}}, \quad \tan \zeta = \frac{z_{LE}}{\sqrt{x_{LE}^2 + y_{LE}^2}}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

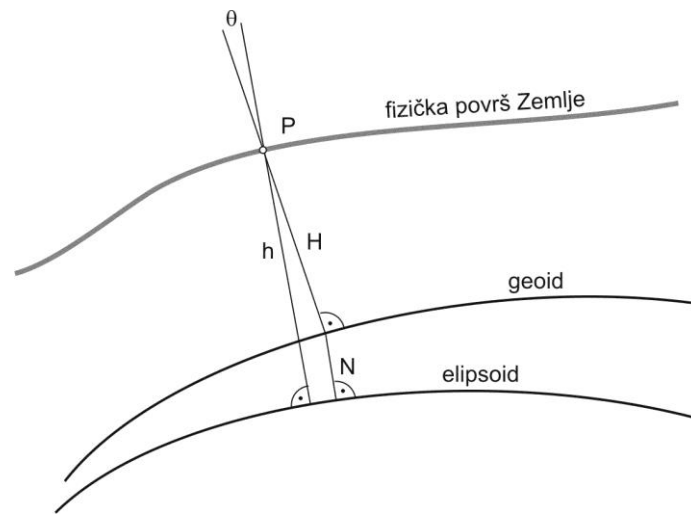
Lokalni elipsoidni referentni sistem najčešće se koristi za opisivanje situacije u relativnoj blizini koordinatnog početka, jer je tada dovoljno poznavati njegove koordinate samo približno. Takav slučaj javlja se, na primer, kod merenja sa ekscentrično postavljenim mernim instrumentima, određivanja položaja prepreka i visokih objekata u okolini opažачke stanice, ili izravnjanja lokalnih terestričkih trodimenzionalnih mreža u kojima su međusobna rastojanja tačaka mala.

2.5 Pojam geoida i koncept visina

Iako su geodetske koordinate pogodne za odvojeno predstavljanje horizontalnih položaja i visina tačaka, ni one nisu bez ograničenja. Geodetska dužina, na primer, nije definisana za tačke na polovima. Odnosi dužina takođe nisu konstantni, jer promeni od 1° u geodetskoj širini odgovara rastojanje od oko 110 km na ekvatoru, a svega 80 km na širini od 45° . Glavni nedostatak geodetskih koordinata povezan je ipak sa elipsoidnom visinom, zato što je to geometrijska veličina koja se odnosi na isto tako geometrijski definisani elipsoid. Vertikalni datum, odnosno referentna površ od koje se računaju visine, mora biti zasnovan na Zemljinom gravitacionom polju, jer jedino u njemu pojmovi horizontalnog i vertikalnog imaju fizički smisao.

Kada bi Zemlja bila savršeno homogena sfera njeno gravitaciono polje bi se veoma lako moglo opisati. U svakoj tački prostora vektor sile teže bio bi usmeren ka centru mase Zemlje, a intenzitet privlačenja zavisio bi samo od udaljenosti. Realna Zemlja je, međutim, nepravilnog oblika sa nehomogenim rasporedom masa, tako da je njeno gravitaciono polje vrlo komplikovana funkcija položaja koja se ne može predstaviti u zatvorenom obliku.

Umesto vektorskog polja sile teže može se koristiti ekvivalentno skalarno polje potencijala sile Zemljine teže. Potencijal se definiše kao polje čiji prostorni gradijent u svakoj tački daje komponente vektora sile teže duž koordinatnih osa. Geometrijsko mesto tačaka sa istim potencijalom zove se ekvipotencijalna površ. To su zatvorene, konveksne površi konstantnog potencijala, na međusobnom rastojanju koje zavisi od intenziteta sile Zemljine teže. Pravac vertikale u svakoj tački je upravan na ekvipotencijalnu površ koja kroz tu tačku prolazi, odakle sledi da su vertikale prostorne krive linije. Od beskonačno mnogo ekvipotencijalnih



Slika 2.10. Fizička površ Zemlje, površ geoida i površ elipsoida.

površni može se izabrati jedna koja se poklapa sa idealizovanim srednjim nivoom svetskih mora i okeana. Ta površ naziva se geoidom, i ona predstavlja prirodan izbor za referencu od koje će se računati visine tačaka. Rastojanje tačke na fizičkoj površi Zemlje do geoida, mereno po vertikali, naziva se ortometrijskom visinom te tačke.

Odnos između tri fundamentalne površi (fizička površ Zemlje, površ geoida i površ elipsoida) prikazan je na slici 2.10. Treba primetiti da se elipsoidna visina h meri po normali na elipsoid, dok ortometrijska visina H predstavlja rastojanje po zakrivljenoj vertikali tačke. Normalna udaljenost površi geoida od elipsoida, N , naziva se undulacijom geoida. Ugao između vertikale i normale, θ , zove se vertikalni otklon ili odstupanje vertikale. Iako se dakle ove linije ne poklapaju, ugao između njih je veoma mali, tako da za sve praktične potrebe važi jednostavna relacija:

$$h = H + N. \quad (2.27)$$

Određiti geoid znači ustvari poznavati njegovu undulaciju u svakoj tački. Tada se izraz (2.27) može upotrebiti za transformaciju elipsoidnih visina u ortometrijske.

Geoid nije jedini izbor za referentnu površ visina. Za njegovo određivanje i računanje ortometrijskih visina neophodne su određene pretpostavke o rasporedu gustina unutar Zemljine kore, koji nikad nije u potpunosti poznat. Kada se umesto realnog Zemljinog gravitacionog polja koristi gravitaciono polje obrtnog elipsoida, koje je analitički definisano u svakoj tački, rezultat su takozvane normalne visine. Njihova referentna površ naziva se kvazigeoidom. Rastojanje između kvazigeoida i elipsoida, mereno po normali, poznato je pod nazivom anomalija visine. Za razliku

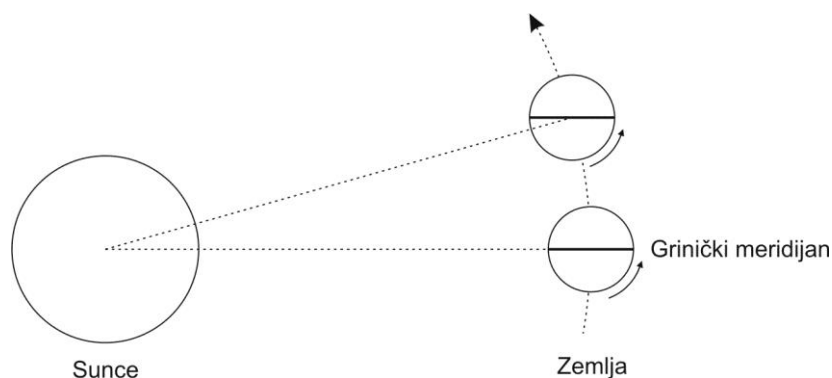
od geoida i ortometrijskih visina, određivanje kvazigeoida i računanje normalnih visina mogu se u principu izvršiti bez ikakvih pretpostavki o građi Zemljine kore. Međutim, nedostatak kvazigeoida je to što ne predstavlja ekvipotencijalnu površ. Na moru i okeanima se geoid i kvazigeoid poklapaju. Na kontinentima se razlikuju u onoj meri u kojoj se razlikuju realno i modelsko gravitaciono polje Zemlje.

2.6 Referentni sistemi vremena

Metode satelitske geodezije suštinski zavise od sposobnosti mernog sistema da generiše precizno sinhronizovane signale i meri njihovo vreme puta. Da bi se, na primer, ostvarila metarska tačnost pozicioniranja, časovnici satelita moraju biti sinhronizovani na nivou od nekoliko nanosekundi. Definisanje i održavanje precizne vremenske skale ima prema tome fundamentalni značaj za funkcionisanje satelitskih sistema kao što je GPS.

Astronomske vremenske skale. Zemlja načini jedan pun obrt oko svoje ose u odnosu na udaljene zvezde za period koji se zove zvezdani dan. Zvezdani dan se dakle definiše kao interval vremena između dva uzastopna prolaza neke udaljene zvezde, ili ekvivalentno γ tačke, kroz meridijan opažača. Ako se posmatra prolaz γ tačke kroz Grinički meridijan, ova vremenska skala naziva se prividnim Griničkim zvezdanim vremenom (GAST). Prividni zvezdani dan nije konstantne dužine zbog precesije i nutacije Zemljine ose rotacije. Kada se obračuna efekat nutacije, dobija se vremenska skala koja se zove srednje Griničko zvezdano vreme (GMST).

Zvezdano vreme nije pogodno kao praktična vremenska skala jer je celokupna ljudska aktivnost vezana za ritam smenjivanja dana i noći. Druga skala vremena koja je zasnovana na Zemljinoj rotaciji naziva se solarnim vremenom. Solarni dan se definiše kao interval vremena između dva uzastopna prolaza središta Sunca kroz Grinički meridijan. Međutim, ni solarni dan nije konstantne dužine zbog toga što



Slika 2.11. Razlika između srednjeg solarnog i srednjeg zvezdanog vremena.

Zemlja obilazi oko Sunca promenljivom brzinom. Osim toga, ni njena osa rotacije nije upravna na ravan ekliptike. Uniformnija vremenska skala, pod nazivom srednje solarno vreme ili univerzalno vreme (UT), definiše se pomoću hipotetičke Zemlje čija je osa rotacije upravna na ravan ekliptike, i koja ima kružnu orbitu oko Sunca sa periodom obilaska kao realna Zemlja. Univerzalno vreme popravljeno za efekat kretanja pola označava se kao UT1.

Solarno i zvezdano vreme nemaju jednaku razmeru. Slika 2.11 ilustruje zašto je to tako. Za vreme dok načini pun obrt u odnosu na inercijalni prostor, Zemlja istovremeno pređe deo puta na svojoj orbiti oko Sunca. Da bi Sunce ponovo prošlo kroz Grinički meridijan, neophodno je da se Zemlja dodatno obrne za ugao koji je približno jednak $1/365.25$ od punog ugla. Srednji solarni dan je prema tome duži od zvezdanog za nešto manje od 4 minuta.

Iako su još u prvoj polovini dvadesetog veka otkrivene fluktuacije u brzini Zemljine rotacije, sekunda je sve do 1960. godine bila definisana kao $1/86\,400$ deo srednjeg solarnog dana. Kada su rastući zahtevi za preciznošću nametnuli potrebu za redefinicijom osnovnog intervala vremena, uvedeno je takozvano efemeridsko vreme. Ova vremenska skala bazirala se na periodu obilaska Zemlje oko Sunca, što znači da je bila oslobođena uticaja kretanja Zemljine ose i brzine njene rotacije. Efemeridska sekunda definisana je kao $1/31\,556\,925.9747$ deo godine 1900. Efemeridsko vreme predstavljalo je realizaciju teorijske skale pod nazivom terestričko dinamičko vreme (TDT), koje figuriše u relativističkim jednačinama planetarnog kretanja kao nezavisan parametar. Ispostavilo se, međutim, da je efemeridsko vreme isuviše nepraktično, tako da se nije dugo zadržalo u upotrebi. Zamenilo ga je mnogo tačnije i pogodnije atomsko vreme.

Kada je potrebno izraziti trenutak ili epohu vremena, neophodno je da bude definisan referentni početak. Međutim, ne postoji nikakav prirodni događaj koji bi sugerisao početak vremena, tako da se on mora dogovorno usvojiti. Tako se epoha u svakodnevnom životu obično izražava godinom, mesecom, danom, časom, minutom i sekundom, u okviru strukture brojanja koja se naziva kalendarom. Za naučne primene pogodniji je oblik izražavanja epohe u vidu celog broja dana i njegovog decimalnog dela, jer se na taj način izbegava kompleksnost kalendara sa mesecima i godinama nejednake dužine. Struktura koja se u te svrhe koristi je Julijanski datum (JD), čiji vek po definiciji sadrži 36 525 dana. JD se definiše kao neprekidni broj srednjih solarnih dana i decimalnog dela, počev od 12 časova UT, 01. januara 4713. godine pre nove ere. Ovakav početak izabran je zato što seže u prošlost daleko pre pisane istorije. Za razliku od civilnog dana koji počinje u ponoć, Julijanski datum se računa od podneva do podneva. Tako je na primer:

$$01.01.2000\ 12:00:00\ \text{UT} = \text{JD}2451545.0. \quad (2.28)$$

Da bi se izbeglo računanje velikim brojevima i početak smestio u ponoć umesto u podne, uveden je pedesetih godina modifikovani Julijanski datum (MJD). Njegov

početak smešten je po definiciji u ponoć 17. novembra 1858. godine, što odgovara Julijanskom datumu JD2400000.5.

Atomska skala vremena. Savremena definicija osnovnog vremenskog intervala od jedne sekunde zasnovana je na rezonantnoj frekvenciji atoma cezijuma. Međunarodnim sporazumom iz 1967. godine, sekunda je definisana kao vreme trajanja 9 192 631 770 perioda zračenja koje odgovara prelazu između dva hiperfina nivoa stanja atoma cezijuma Cs-133. Broj perioda odabran je tako da je ukupno trajanje jednako jednoj efemeridskoj sekundi. Kontinualna vremenska skala bazirana na ovoj definiciji zove se atomsko vreme (TAI). Atomsko vreme predstavlja realizaciju terestričkog dinamičkog vremena, ali se od njega po definiciji razlikuje za konstantni iznos od 32.184 s, tako da je:

$$\text{TAI} = \text{TDT} - 32.184 \text{ s} . \quad (2.29)$$

TAI je veoma precizna i uniformna skala vremena koja je potpuno nezavisna od Zemljine rotacije i njenog kretanja oko Sunca. Međutim, ta nezavisnost je istovremeno i nedostatak, jer se atomsko vreme sve više razilazi sa UT vremenom prema kome se upravlja sva ljudska aktivnost. Procenjeno je, na primer, da bi kroz 4000 godina razlika između TAI i UT dostigla čitavih 12 časova, tako da bi časovnici atomskog vremena pokazivali ponoć u trenutku kada je Sunce visoko na nebu.

Kompromis je pronađen u vidu koordiniranog univerzalnog vremena (UTC). UTC sekunda definisana je na potpuno isti način kao kod atomskog vremena, ali je zato UTC skala postavljena tako da se podudara sa skalom UT1 vremena za epohu 01. januara 1958. godine u 00 časova. Od 1972. godine, UTC se sinhronizuje sa UT1 pomoću takozvane prestupne sekunde. Kad god apsolutna vrednost razlike između UTC i UT1 dostigne 0.9 s, UTC skala se popravljala za 1 s. Prestupna sekunda može u principu biti pozitivna ili negativna. Do sada je u praksi uvek imala pozitivan znak, što znači da minut sa prestupnom sekundom traje 61 s.

UTC je prema tome atomska vremenska skala, ali nije uniformna jer se povremenim uvođenjem prestupne sekunde održava bliskom UT vremenu. Veza između TAI i UTC glasi:

$$\text{TAI} = \text{UTC} + n \cdot 1 \text{ s} , \quad (2.30)$$

gde n označava celi broj. Prestupna sekunda se po međunarodnom sporazumu primenjuje u junu ili decembru, a ako to nije moguće onda u martu ili septembru. Opažanja iz poslednjih 100 godina sugerišu opšti trend usporavanja Zemljine rotacije u iznosu od 1 s godišnje, ali to ne znači da se prestupna sekunda uvodi svake godine pošto nepravilnosti u brzini rotacije nisu kratkoročno predvidive. Do 2006. godine ukupan broj dodatih prestupnih sekundi iznosio je $n = 33$.

UTC je rezultat međunarodne saradnje jer se naknadno generiše na osnovu vremena koje održava preko 250 cezijumskih časovnika i vodoničnih mazera u 65

laboratorija širom sveta. Prikupljanje podataka, njihovu obradu i generisanje TAI i UTC vremena vrši Međunarodni biro za tegove i mere (BIPM). Za određivanje prestupne sekunde zadužena je Međunarodna služba Zemljine rotacije (IERS).

GPS skala vremena. GPS vremenska skala (GPST) takođe predstavlja vreme zasnovano na atomskoj skali vremena kao i UTC. Postoje, međutim, dve važne razlike. Prvo, UTC vreme se generiše naknadno, dok se kod GPS vremena obrada i ocenjivanje vrše u realnom vremenu. Drugo, GPST je uniformna vremenska skala koja ne sadrži prestupne sekunde.

GPS vreme je definisano na osnovu merenja skupa cezijumskih i rubidijumskih časovnika na stanicama za praćenje i u samim GPS satelitima. Skala je izjednačena sa UTC vremenom u standardnoj GPS epohi koja predstavlja ponoć između 05. i 06. januara 1980. godine (JD2444244.5). U tom trenutku je broj prestupnih sekundi iznosio $n = 19$, tako da veza između GPST i TAI glasi:

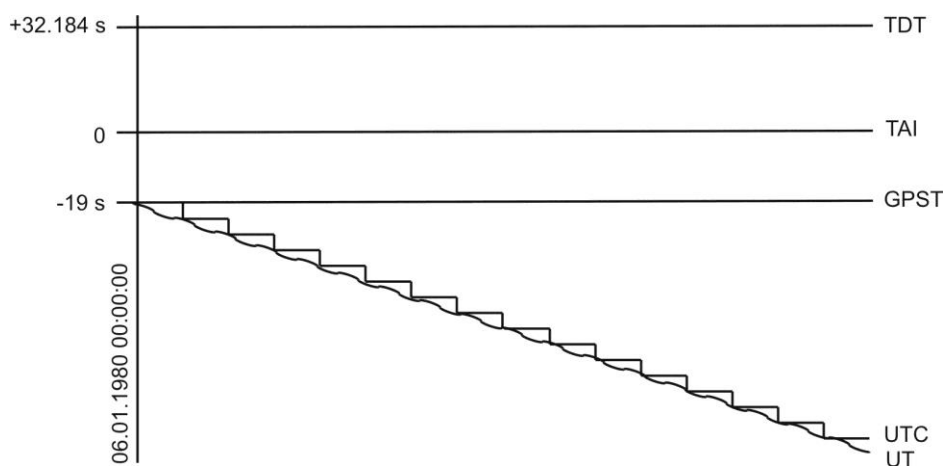
$$\text{TAI} = \text{GPST} + 19 \text{ s} . \quad (2.31)$$

Kontrolni GPS segment neprekidno održava GPST u granicama od $1 \mu\text{s}$ u odnosu na UTC (modulo 1 s). Shodno tome postoji sledeća relacija između GPST i UTC:

$$\text{GPST} = \text{UTC} + n \cdot 1 \text{ s} + \delta, \quad (2.32)$$

pri čemu je n ponovo ceo broj sekundi, dok δ označava kvalitet sa kojim se GPST održava u okviru UTC, a koji je poslednjih godina na nivou od oko 10 ns. Broj celih sekundi na početku 2006. godine iznosio je $n = 14$.

Odnos skale GPS vremena i ostalih vremenskih skala koje su od interesa za satelitsku geodeziju prikazan je na slici 2.12.



Slika 2.12. Odnos između GPS vremena i vremenskih skala TDT, TAI, UTC i UT.

Poglavlje 3

Osnovna teorija satelitskih orbita

3.1 Keplerovi i Njutnovi zakoni

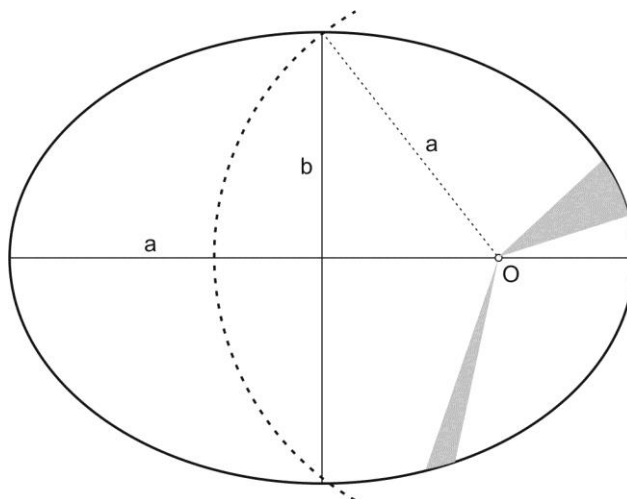
Naučni pogled na kosmos i mesto Zemlje u njemu sastojao se sve do Kopernika u geocentričnom učenju po kome se sva nebeska tela kreću oko Zemlje koja je u središtu vasiona. Odlučujuća promena ovog shvatanja dogodila se u šesnaestom i sedamnaestom veku, zahvaljujući pre svega naučnicima kao što su Brahe, Kepler i Njutn. Brahe je zaslužan za ogroman opažački materijal koji je prikupio strpljivim dugogodišnjim merenjima u doba kada još nije postojao teleskop niti časovnici sa klatnom. Na osnovu njegovih merenja Kepler je bio u stanju da opiše kretanje planeta oko Sunca. Krunski doprinos dao je Njutn, koji je objasnio uzroke.

Analizirajući Braheova opažanja Marsa i drugih planeta, Kepler je formulisao sledeća tri zakona koji nose njegovo ime:

- Sve planete kreću se po orbitama koje su oblika elipse, pri čemu je Sunce u jednoj od žiža.
- Linija koja spaja središta Sunca i planete opisuje jednake površine za isti vremenski interval.
- Kvadrati perioda obilaska planeta proporcionalni su kubovima njihovih srednjih odstojanja od Sunca.

Do potpuno istih zaključaka Kepler je došao i kada je u pitanju kretanje Meseca i Jupiterovih satelita. Njegovi zakoni se sa prilično dobrom aproksimacijom mogu primeniti čak i na kretanje veštačkih satelita oko Zemlje.

Keplerovi zakoni planetarnog kretanja ilustrovani su na slici 3.1. Otkriće da se



Slika 3.1. Ilustracija Keplerovih zakona planetarnog kretanja.

planeta kreće po elipsi velike poluose a i male poluose b sa Suncem u žiži O , iznenadilo je Keplera i njegove savremenike koji su očekivali da putanje planeta budu kružnice ili krive linije zasnovane na kružnicama. Galilej, koji je živio u vreme kad i Kepler, nikad, na primer, nije prestao da veruje u kružni oblik orbita. Osim toga, stavljajući Sunce u centar kretanja, Kepler je raskinuo sa Aristotelovom dogmom koja je važila dve hiljade godina, a po kojoj je to privilegovano mesto pripadalo Zemlji.

Shodno drugom Keplerovom zakonu, planeta se kreće oko Sunca promenljivom linearnom brzinom koja zavisi od njenog položaja na putanji. Što je planeta udaljenija od Sunca, to se sporije kreće. Međutim, površinska brzina planete, ilustrovana na slici 3.1 osenčenim isečcima, ostaje konstantna.

Iz trećeg zakona sledi da dve planete imaju isti period obilaska bez obzira na oblik njihovih orbita, pod uslovom da im je isto srednje odstojanje od Sunca. Planeta koja se kreće eliptičnom putanjom sa slike 3.1 imala bi, prema tome, isti period obilaska oko Sunca kao planeta kružne putanje označene isprekidanom linijom na istoj slici, jer je u oba slučaja srednje odstojanje od Sunca jednako velikoj poluosi a . Međutim, iako su izvanredno elegantni i jednostavni, drugi i treći Keplerov zakon bili su suviše daleko van domašaja kapaciteta nauke tog doba da bi bili prihvaćeni.

Tek je pedeset godina nakon Keplerove smrti Njutn ponudio teorijsku osnovu Keplerovih zakona, pokazavši da se svaki od njih može izvesti iz njegove teorije univerzalnog privlačenja. Njutn je takođe osnovao oblast diferencijalnog računa da bi dokazao da se planete kreću oko Sunca po eliptičnim orbitama, i formulisao svoja čuvena tri zakona mehanike.

Centralno mesto u Njutnovom učenju o kretanju zauzima izraz:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}, \quad (3.1)$$

u kojem je \mathbf{K} takozvana količina kretanja, koja je jednaka proizvodu iz mase tela m i njegove brzine \mathbf{v} , a \mathbf{F} predstavlja rezultantu svih sila koje deluju na telo. Da bi se, dakle, promenila količina kretanja tela neophodno je dejstvo sile, nasuprot starom Aristotelovom shvatanju po kojem je sila potrebna da bi se kretanje tela uopšte održavalo. Ako se masa tela smatra vremenski nepromenljivom, izraz (3.1) dobija poznati oblik drugog Njutnovog zakona mehanike:

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (3.2)$$

gde $\ddot{\mathbf{r}}$ označava drugi izvod vektora položaja po vremenu. Potrebno je napomenuti da (3.1) važi ustvari za materijalnu tačku, dakle za telo sa masom ali bez dimenzija, čije se kretanje u inercijalnom koordinatnom sistemu može opisati vremenski promenljivim vektorom položaja \mathbf{r} .

Drugi Njutnov zakon mehanike (3.2) očigledno predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda koja se može rešiti po nepoznatoj funkciji $\mathbf{r}(t)$ ako je poznata sila \mathbf{F} . U najjednostavnijem slučaju na materijalnu tačku ne deluje nikakva sila, tako da je $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Tada se integracijom dobija da je $\dot{\mathbf{r}} = \text{const}$. Ovaj rezultat pokazuje da će se materijalna tačka u odsustvu sile kretati pravolinijski i konstantnom brzinom, što nije ništa drugo do formulacija prvog Njutnovog zakona mehanike. Konačno, po trećem Njutnovom zakonu, sili akcije \mathbf{F} odgovara sila reakcije $-\mathbf{F}$, koja je istog intenziteta i pravca, ali suprotnog smera.

Istorijski posmatrano, drugi zakon mehanike prvo je iskorišćen za rešavanje obrnutog problema: određivanje sile \mathbf{F} u situaciji kada je poznato kretanje tela $\mathbf{r}(t)$. Upravo razmatrajući ovo pitanje na primeru Keplerove teorije planetarnog kretanja Njutm je otkrio svoj poznati zakon univerzalnog privlačenja. Po njemu se svake dve materijalne tačke masa m_1 i m_2 , koje su na međusobnom rastojanju r , privlače silom čiji je intenzitet:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3.3)$$

pri čemu $G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ predstavlja univerzalnu gravitacionu konstantu. Sila privlačenja je, prema tome, direktno proporcionalna masama tela a obrnuto proporcionalna kvadratu njihovog rastojanja.

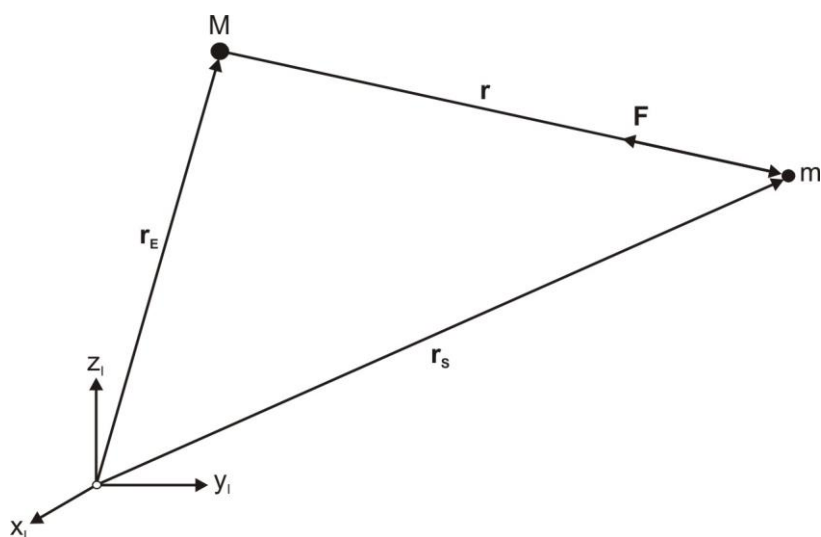
3.2 Jednačina normalnog kretanja satelita

S obzirom na to da je sila privlačenja dominantna sila u kosmičkim razmerama, kretanje satelita oko Zemlje gotovo u potpunosti se povinuje Njutnovim zakonima.

U svom najjednostavnijem slučaju, koji se obično naziva problemom dva tela u centralnom polju, Zemlja i satelit se mogu posmatrati kao tačkasta tela koje se kreću samo pod dejstvom međusobne gravitacije (slika 3.2). Ako se mase Zemlje i satelita označe sa M i m , a njihovi vektori položaja u inercijalnom referentnom sistemu sa \mathbf{r}_E i \mathbf{r}_S , tada je po Njutnovom zakonu univerzalnog privlačenja sila kojom Zemlja privlači satelit jednaka:

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}, \quad (3.4)$$

gde je $\mathbf{r} = \mathbf{r}_E - \mathbf{r}_S$ vektor položaja satelita u odnosu na Zemlju, a r je njegov intenzitet. Negativan predznak u gornjem izrazu potiče od činjenice da je sila privlačenja \mathbf{F} suprotno orijentisana od vektora \mathbf{r} . Satelit sa svoje strane takođe privlači Zemlju silom koja shodno zakonu akcije i reakcije iznosi $-\mathbf{F}$. Po drugom Njutnovom zakonu, sila je jednaka proizvodu iz mase i ubrzanja, tako da su sile kojima se Zemlja i satelit međusobno privlače:



Slika 3.2. Problem dva tela u centralnom polju.

$$m\ddot{\mathbf{r}}_S = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}, \quad M\ddot{\mathbf{r}}_E = G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}. \quad (3.5)$$

Iz ovog para jednačina dobija se sledeći izraz za vektor ubrzanja satelita u odnosu na Zemlju:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{M+m}{r^3} \mathbf{r}. \quad (3.6)$$

Kada se uzme u obzir da je masa satelita ($\sim 10^3$ kg) beznačajna u poređenju sa masom Zemlje ($\sim 10^{24}$ kg), sledi da je sa odličnom aproksimacijom:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}, \quad (3.7)$$

gde proizvod $GM = 3\,986\,004.418 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ označava geocentričnu gravitacionu konstantu.

Izraz (3.7) predstavlja vektorsku diferencijalnu jednačinu drugog reda koja se naziva jednačinom normalnog satelitskog kretanja. Njena prva integracija uvodi tri integracione konstante, odnosno tri komponente vektora brzine u datom trenutku. Druga integracija donosi još tri konstante koje su komponente vektora položaja u istom trenutku. Orbita satelita je, dakle, u potpunosti određena pomoću šest elemenata u formi početnih uslova zadatih za epohu t_0 :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= (x_0, y_0, z_0) \\ \dot{\mathbf{r}}_0 &= (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)\end{aligned}\quad (3.8)$$

Uz pomoć ovih početnih uslova, diferencijalnu jednačinu kretanja satelita moguće je integraliti u oba vremenska smera da bi se odredio položaj satelita za proizvoljni trenutak vremena. Na taj način bi problem dva tela bio formalno rešen. Treba još jednom napomenuti da se jednačina (3.7) odnosi na idealizovanu situaciju u kojoj se Zemlja i satelit smatraju materijalnim tačkama na koje osim međusobnog privlačenja ne deluje nikakva druga sila.

3.3 Osobine normalnog kretanja satelita

U normalno satelitsko kretanje može se steći dublji uvid ako se na jednačinu (3.7) primeni nekoliko vektorskih operacija. Rezultat takvih matematičkih manipulacija su izrazi koji su vremenski konstantni i nazivaju se prvim integralima.

Formirajmo prvo skalarni proizvod obe strane jednačine kretanja vektorom brzine $\dot{\mathbf{r}}$:

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (3.9)$$

Leva i desna strana ove jednakosti mogu se napisati na sledeći način:

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right), \quad (3.10)$$

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{2} \right) = r \cdot \dot{r}, \quad (3.11)$$

što se lako potvrđuje direktnim diferenciranjem. Zamenom u (3.9) dobija se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\frac{GM}{r^3} r \cdot \dot{r} = -\frac{GM}{r^2} \dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{GM}{r} \right), \quad (3.12)$$

odakle sledi da mora biti ispunjeno:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = C = const. \quad (3.13)$$

Članovi na levoj strani predstavljaju respektivno kinetičku i potencijalnu energiju tela jedinične mase. Njihov zbir je ukupna mehanička energija kretanja koju smo

obeležili sa C , a koja je shodno izrazu (3.13) konstantna. Drugim rečima, normalno satelitsko kretanje je takvo da je očuvana njegova ukupna mehanička energija.

Vratimo se sada jednačini kretanja (3.7), i formirajmo njen vektorski proizvod vektorom položaja \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (3.14)$$

Pošto se leva strana ove jednačine može napisati u obliku:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

to znači da je:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} = \text{const}. \quad (3.16)$$

Vektorski proizvod vektora položaja i vektora brzine predstavlja takozvani vektor momenta količine kretanja tela jedinične mase kojeg smo obeležili sa \mathbf{h} , i koji je po gornjem izrazu vremenski konstantan. Vektori položaja i brzine definišu orbitalnu ravan u kojoj se satelit kreće. Pošto je po definiciji vektorskog proizvoda vektor \mathbf{h} upravan na orbitalnu ravan, njegova vremenska konstantnost istovremeno znači da je orbitalna ravan fiksirana i da tokom vremena ne menja svoju orijentaciju u inercijalnom prostoru.

I konačno, formirajmo vektorski proizvod jednačine kretanja i konstantnog vektora momenta \mathbf{h} :

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{h}. \quad (3.17)$$

Lako se pokazuje da se leva strana ove jednačine može se napisati kao:

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}). \quad (3.18)$$

Na desnoj strani pojavljuje se dvostruki vektorski proizvod:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{h} = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r}(r \cdot \dot{r}) - \dot{\mathbf{r}}(r^2), \quad (3.19)$$

tako da se zamenom (3.18) i (3.19) u izraz (3.17) dobija:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = GM \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot r - \mathbf{r} \cdot \dot{r}}{r^2} = \frac{d}{dt} \left(GM \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (3.20)$$

odnosno:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - GM \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{q} = \text{const}. \quad (3.21)$$

Konstantni vektor \mathbf{q} naziva se Hamiltonovim vektorom. Pažljivom inspekcijom gornjeg izraza lako se utvrđuje da Hamiltonov vektor leži u orbitalnoj ravni jer se dobija kao linearna kombinacija vektora položaja i vektora brzine koji takođe leže u orbitalnoj ravni.

Integrali energije (3.13), momenta količine kretanja (3.16) i Hamiltonov integral (3.21) omogućuju dakle da se i bez formalnog rešavanja diferencijalne jednačine izvedu sledeći zaključci o normalnom satelitskom kretanju:

- Položaj i brzina kretanja satelita oko Zemlje su takvi da mu je u svakom trenutku vremena očuvana ukupna mehanička energija.
- Orbitalna ravan u kojoj se satelit kreće prolazi kroz centar mase Zemlje, i ima konstantnu orijentaciju u odnosu na inercijalni prostor.
- Satelitska orbita leži u orbitalnoj ravni i u okviru nje ima konstantnu orijentaciju.

3.4 Opšti oblik satelitskih orbita

Na osnovu prvih integrala može se očigledno dosta saznati o osobinama normalnog kretanja satelita, ali konkretan geometrijski oblik satelitskih orbita i dalje ostaje nepoznat. Do njega se dolazi dodatnim matematičkim manipulacijama izraza za Hamiltonov vektor \mathbf{q} .

Ako se Hamiltonov integral (3.21) skalarno pomnoži vektorom položaja \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) - GM \frac{\mathbf{r}^2}{r} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}, \quad (3.22)$$

i tom prilikom iskoriste sledeće definicije i osobine poznate iz vektorske algebre:

$$\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = qr \cos \upsilon, \quad (3.25)$$

gde υ predstavlja ugao između vektora \mathbf{q} i \mathbf{r} , izraz (3.22) dobija nešto jednostavniju formu:

$$h^2 = GMr + qr \cos \upsilon. \quad (3.26)$$

Odavde za rastojanje r sledi:

$$r = \frac{h^2}{GM + q \cos v}. \quad (3.27)$$

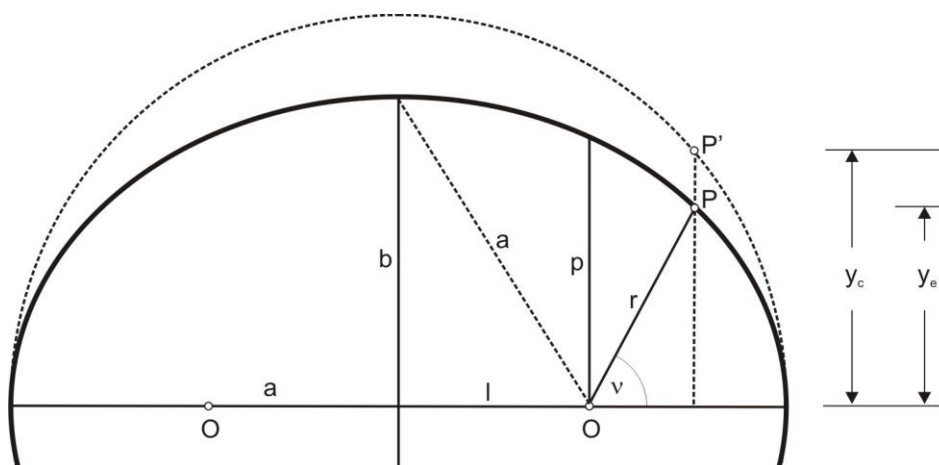
Kada se brojilac i imenilac ovog razlomka podele sa GM , i uvedu skraćene oznake $p = h^2/GM$ i $e = q/GM$, dobija se definitivni izraz za rastojanje r u funkciji ugla v :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (3.28)$$

što nije ništa drugo do polarna jednačina krive koja nastaje konusnim presekom. Veličina p je parametar krive, a e njen prvi numerički ekscentricitet. Koji je to konkretni tip krive linije u pitanju određuje u opštem slučaju upravo vrednost ekscentriciteta:

- $e = 0$: kružnica,
- $0 < e < 1$: elipsa,
- $e = 1$: parabola,
- $e > 1$: hiperbola.

S obzirom na to da parabola i hiperbola predstavljaju otvorene krive, mi ćemo se ograničiti na takozvane Keplerove eliptične putanje koje se normalno sreću kod satelita koji orbitiraju oko Zemlje (slika 3.3). Na taj način izraz (3.28) praktično potvrđuje prvi Keplerov zakon. Kružne putanje se u svakom slučaju mogu posmatrati kao specijalni slučaj eliptičnih putanja kod kojih je $e = 0$.



Slika 3.3. Osnovna geometrijska svojstva Keplerove eliptične putanje.

Dakle, opšti oblik satelitske putanje u problemu dva tela opisuje Keplerova elipsa čija je matematička formulacija data jednačinom (3.28). Osim što predstavlja konusni presek, elipsa kao zatvorena kriva linija poseduje i nekoliko konstitutivnih osobina od kojih su najznačajnije sledeće dve:

- Elipsa je geometrijsko mesto tačaka sa osobinom da je zbir njihovih rastojanja do jedne i druge žiže konstantan, i iznosi $2a$. Pored velike poluose a i male poluose b , elipsu karakterišu i druge veličine kao što su spljoštenost f , linearni ekscentricitet l , parametar elipse p i prvi numerički ekscentricitet e . Imajući u vidu definicije $f = (a - b)/a$ i $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$, sa slike 3.3 lako se izvode relacije:

$$l = \sqrt{a^2 - b^2} = ae$$

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) \quad (3.29)$$

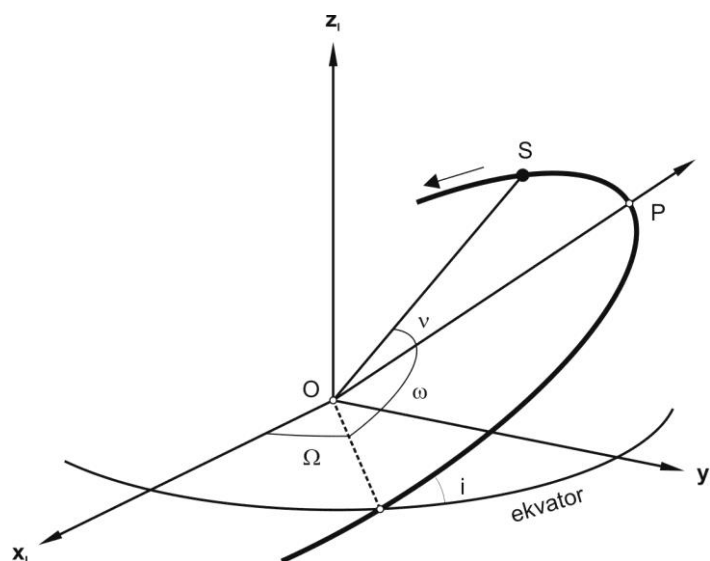
- Elipsa može nastati afinom transformacijom kružnice u određenom pravcu, kao što je to ilustrovano na slici 3.3. Faktor proporcionalnosti affine transformacije iznosi b/a . Drugim rečima, ako normalno rastojanje tačke P' na kružnici do njenog prečnika iznosi y_c , normalno rastojanje odgovarajuće tačke P na elipsi iznosiće $y_e = (b/a) \cdot y_c$.

Bilo bi, međutim, pogrešno smatrati da je jednačinom elipse rešena diferencijalna jednačina normalnog satelitskog kretanja (3.7). U okviru problema dva tela nepoznata je vektorska funkcija $\mathbf{r}(t)$, dok nam polarna jednačina elipse opisuje samo skalarnu funkciju $r(v)$. Za kompletno formalno rešenje neophodne su još i informacije o orijentaciji Keplerove elipse u inercijalnom prostoru i vremenskoj zavisnosti položaja satelita na putanji.

3.5 Keplerovi orbitalni elementi

Početni uslovi u vidu šest elemenata vektora položaja i brzine satelita nisu jedini izbor za konstante integracije. Iz teorije diferencijalnih jednačina poznato je da jedan skup integracionih konstanti može zameniti drugi, pod uslovom da između ovih skupova postoji obostrano jednoznačna veza.

Alternativni i geometrijski mnogo očigledniji skup integracionih konstanti predstavljaju Keplerovi elementi. Pet Keplerovih elemenata definiše veličinu, oblik i orijentaciju satelitske orbite, dok šesti određuje mesto satelita na putanji. Na taj način je fiksirano svih šest stepeni slobode kretanja, tako da se uz pomoć Keplerovih elemenata mogu odrediti položaj i brzina satelita za bilo koji trenutak vremena.



Slika 3.4. Ilustracija geometrijskog karaktera Keplerovih parametara.

Slika 3.4 prikazuje orbitu satelita S u inercijalnom referentnom sistemu sa početkom u centru mase Zemlje, i istovremeno ilustruje geometrijski karakter Keplerovih elemenata.

Prva dva elementa određuju oblik i veličinu eliptične putanje. To su velika poluosa a i ekscentricitet e . Umesto njih se ravnopravno mogu upotrebiti kombinacije sa drugim parametrima kao što su mala poluosa b , parametar p ili spljoštenost f , ali pod uslovom da u izabranom paru barem jedan element ima dimenzije dužine.

Sledeća tri Keplerova elementa, inklinacija i , rektascenzija uzlaznog čvora Ω i argument perigeuma ω , definišu orijentaciju orbitalne ravni u inercijalnom prostoru, odnosno orijentaciju eliptične putanje u orbitalnoj ravni. Ove veličine imaju sledeća značenja:

- Inklinacija i je ugao pod kojim je orbitalna ravan nagnuta u odnosu na ravan ekvatora.
- Rektascenzija uzlaznog čvora Ω predstavlja ugao u ravni ekvatora između pravca ka γ tački (x osa inercijalnog sistema) i pravca ka uzlaznom čvoru satelitske orbite. Uzlazni čvor je tačka u kojoj satelit prolazi kroz ekvatorsku ravan pri svom kretanju iz južne prema severnoj hemisferi. Odgovarajuća tačka na suprotnoj strani zove se silazni čvor. Uzlazni i silazni čvor definišu takozvanu nodalnu liniju.
- Argument perigeuma ω je ugao u orbitalnoj ravni između pravca ka uzlaznom čvoru i pravca ka perigeumu P . Perigeum je tačka orbite u kojoj je satelit najbliži Zemlji. Tačka u kojoj je satelit najudaljeniji od Zemlje

zove se apogeum. Perigeum i apogeum definišu duž koja prolazi kroz geometrijski centar Keplerove elipse i naziva se apsidnom linijom.

Poslednji od šest Keplerovih elemenata određuje položaj satelita na putanji. To je prava ili istinita anomalija v , koja se definiše kao ugao u orbitalnoj ravni između pravca ka perigeumu P i pravca ka satelitu S . Potrebno je primetiti da perigeum kod kružnih orbita nije definisan, pa samim tim nije ni prava anomalija. Položaj satelita je u tom slučaju određen uglom $u = \omega + v$ koji se naziva argumentom širine.

3.6 Ekscentrična i srednja anomalija

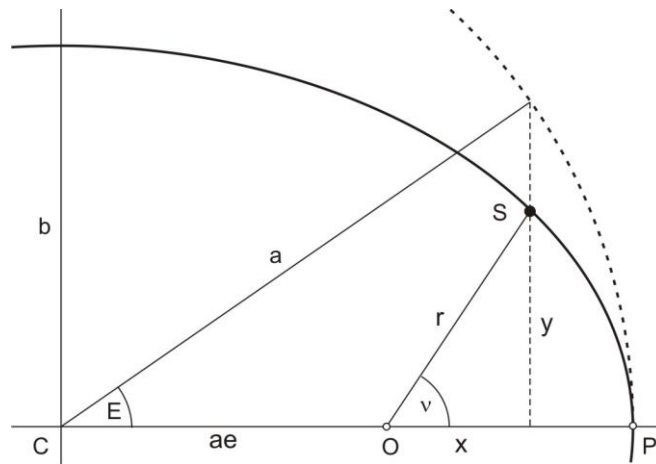
Prava anomalija ne menja se linearno sa vremenom jer se satelit kreće po elipsi promenljivom brzinom u skladu sa drugim Keplerovim zakonom. Zbog toga se alternativno koriste i dve druge veličine kojima se takođe može utvrditi položaj satelita u orbiti: ekscentrična anomalija E i srednja anomalija M .

Definicija ekscentrične anomalije E prikazana je na slici 3.5. To je ugao u ravni orbite koga grade pravci iz geometrijskog centra elipse C prema perigeumu P i prema projekciji položaja satelita S na kružnicu s centrom u C i poluprečnika jednakog velikoj poluosi elipse a . Do veze između prave i ekscentrične anomalije može se doći ako se preko njih izraze odsečci x i y sa slike 3.5:

$$x = r \cos v = a \cos E - ae = a(\cos E - e), \quad (3.30)$$

$$y = r \sin v = b \sin E = a\sqrt{1-e^2} \sin E. \quad (3.31)$$

Kada se ova dva izraza prvo podele, a zatim i kvadriraju i saberu, dobijaju se



Slika 3.5. Geometrijska definicija ekscentrične anomalije.

sledeće formule za pravu anomaliju v i geometrijsko rastojanje r :

$$\tan v = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e}, \quad (3.32)$$

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (3.33)$$

Prava i ekscentrična anomalija imaju iste vrednosti kada je satelit u perigeumu ili apogeumu, a potpuno se podudaraju jedino kod kružnih orbita.

Srednja anomalija M je negeometrijska veličina koja se definiše kao prava anomalija fiktivnog satelita koji se kreće konstantnom uglovnom brzinom n po kružnoj putanji čiji je centar u žiži elipse, i osim toga ima period obilaska T identičan realnom satelitu. Pošto se fiktivni satelit kreće konstantnom brzinom, srednja anomalija se menja linearno sa vremenom:

$$M = n(t - t_p), \quad (3.34)$$

pri čemu t_p označava referentni trenutak vremena, kao što je, na primer, trenutak prolaska satelita kroz perigeum. Upravo je ova ravnomernost promene razlog zašto se od tri anomalije koje smo do sada definisali najčešće koristi srednja anomalija. Za srednje kretanje satelita n može se na osnovu trećeg Keplerovog zakona napisati:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}. \quad (3.35)$$

Srednja i ekscentrična anomalija povezane su Keplerovom jednačinom:

$$M = E - e \sin E, \quad (3.36)$$

iz koje se srednja anomalija može direktno sračunati na osnovu zadate ekscentrične anomalije. Obrnuti problem nema rešenje u zatvorenom obliku jer se ekscentrična anomalija pojavljuje istovremeno i kao argument trigonometrijske funkcije. Keplerova jednačina se u tom slučaju mora rešavati iterativno, ili se ekscentrična anomalija izražava u obliku reda.

3.7 Računanje položaja satelita

Kao što je već pomenuto, skup Keplerovih elemenata $(a, e, i, \Omega, \omega, M)_0$ zadatih za neki trenutak vremena t_0 , ekvivalentan je skupu od ukupno šest komponenti vektora položaja i vektora brzine $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})_0$ zadatih za isti vremenski trenutak. Uslov za to je, naravno, da između ovih skupova postoji obostrana i jednoznačna veza:

$$(a, e, i, \Omega, \omega, M)_0 \leftrightarrow (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})_0. \quad (3.37)$$

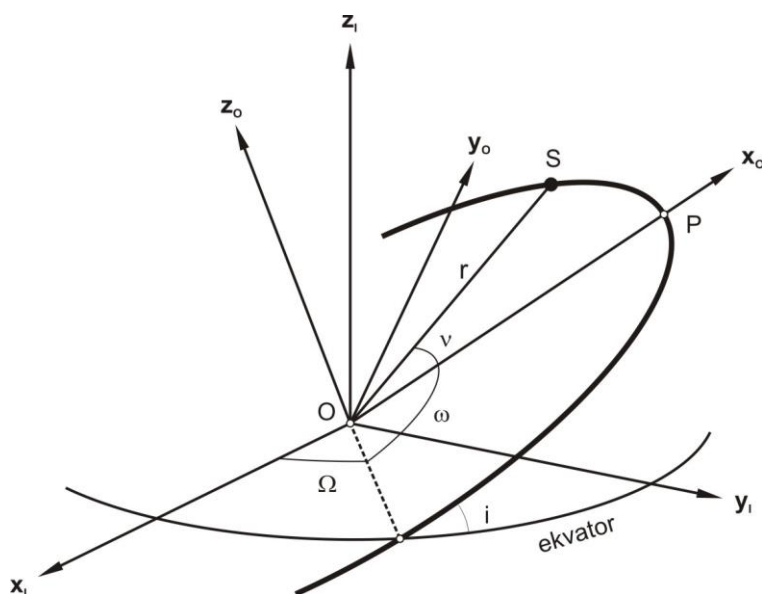
Ova veza zaista postoji, što znači da se pomoću nje mogu određivati kako položaji i brzine satelita na osnovu zadatih Keplerovih elemenata, tako i elementi satelitskih putanja na osnovu poznatih položaja i brzina. Time je obezbeđeno kompletno rešenje problema dva tela.

Ekvivalentnost pomenutih skupova ilustrovaćemo na primeru određivanja položaja satelita u inercijalnom referentnom sistemu pomoću Keplerovih elemenata zadatih za neki trenutak vremena t_0 . Treba napomenuti da od zadatog trenutka vremena t_0 zavisi samo srednja anomalija M , pošto su, shodno prvim integralima, svi ostali Keplerovi elementi vremenski konstantni. Problem se po ugledu na (3.37) može napisati u obliku:

$$(a, e, i, \Omega, \omega, M)_0 \rightarrow (\mathbf{r}_f)_0. \quad (3.38)$$

Na slici 3.6 prikazani su inercijalni i orbitalni koordinatni sistem koji učestvuju u računanju. Oba sistema imaju koordinatni početak u centru mase Zemlje, koji je istovremeno i jedna žiža Keplerove eliptične putanje satelita. Ose x_0 i y_0 orbitalnog sistema leže u orbitalnoj ravni, pri čemu je osa x_0 definisana tako da prolazi kroz perigeum P . Osa z_0 upravna je na orbitalnu ravan i zajedno sa prethodne dve ose formira pravougli koordinatni sistem desne orijentacije. Vektor položaja satelita u inercijalnom i orbitalnom koordinatnom sistemu obeležićemo respektivno sa \mathbf{r}_0 i \mathbf{r}_f .

Za određivanje položaja satelita u inercijalnom referentnom sistemu potrebno je



Slika 3.6. Koordinatni sistemi kod računanja položaja satelita.

prvo odrediti njegov položaj u orbitalnom koordinatnom sistemu. Ono se odvija u sledećim koracima:

- Računanje ekscentrične anomalije E na osnovu date srednje anomalije M pomoću Keplerove jednačine (3.36). Ovo računanje se po pravilu vrši iterativno. Za početnu vrednost ekscentrične anomalije E_0 usvaja se data srednja anomalija. U i -toj iteraciji ekscentrična anomalija se određuje po izrazu:

$$E_i = M + e \sin E_{i-1}. \quad (3.39)$$

- Računanje istinite anomalije υ i geometrijskog rastojanja r na osnovu prethodno sračunate ekscentrične anomalije E . Za ovo računanje koriste se izrazi (3.32) i (3.33).
- Određivanje komponenti vektora položaja \mathbf{r}_0 u orbitalnom koordinatnom sistemu, imajući pri tom u vidu da je koordinata z_0 uvek jednaka nuli pošto se celokupno satelitsko kretanje odvija u orbitalnoj ravni:

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \upsilon \\ r \sin \upsilon \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Sada je još preostalo da se vektor položaja satelita transformiše iz orbitalnog u inercijalni koordinatni sistem. Pošto oba sistema imaju zajednički koordinatni početak, transformacija se sastoji u rotacijama orbitalnog koordinatnog sistema sve dok mu se ose ne poklope sa odgovarajućim osama inercijalnog koordinatnog sistema. Sa slike 3.6 se vidi da je u tom pogledu potreban sledeći redosled:

- rotacija orbitalnog sistema oko ose z_0 za ugao $-\omega$,
- rotacija oko novog položaja x_0 ose za ugao $-i$,
- rotacija oko novog položaja z_0 ose za ugao $-\Omega$.

Matrica ukupne rotacije $\mathbf{R}(\omega, i, \Omega)$ imaće dakle oblik proizvoda matrica pomenutih elementarnih rotacija:

$$\mathbf{R}(\omega, i, \Omega) = \mathbf{R}_3(-\Omega) \cdot \mathbf{R}_1(-i) \cdot \mathbf{R}_3(-\omega), \quad (3.41)$$

i pomoću nje se vektor položaja satelita u inercijalnom koordinatnom sistemu konačno dobija kao:

$$\mathbf{r}_I = \mathbf{R}(\omega, i, \Omega) \cdot \mathbf{r}_0, \quad (3.42)$$

odnosno u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} x_I &= (\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega) \cdot x_0 \\ &\quad - (\cos \Omega \sin \omega + \sin \Omega \cos i \cos \omega) \cdot y_0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

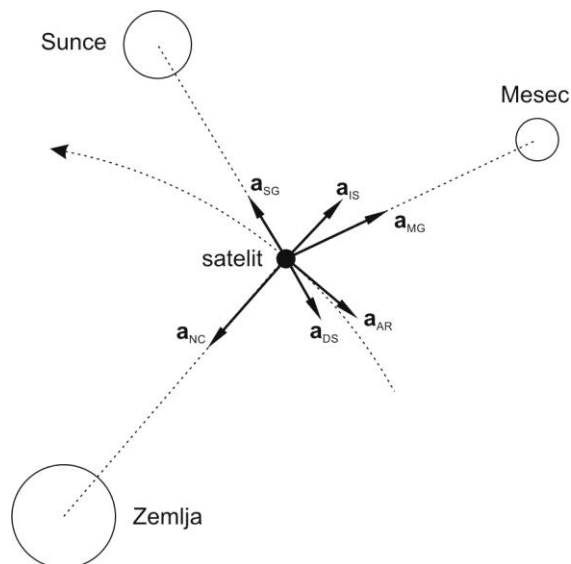
$$\begin{aligned} y_I &= (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega) \cdot x_0 \\ &\quad - (\sin \Omega \sin \omega - \cos \Omega \cos i \cos \omega) \cdot y_0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$z_I = \sin i \sin \omega \cdot x_0 + \sin i \cos \omega \cdot y_0. \quad (3.45)$$

3.8 Perturbacije satelitskog kretanja

Da je Zemlja savršeno homogena sfera, satelit bi se u njenom gravitacionom polju zaista kretao u potpunom skladu sa Keplerovim zakonima. Realna Zemlja je međutim nepravilnog oblika, nehomogene unutrašnje građe, a postoje još i druge uticajne sile osim sile njenog privlačenja. Orbita satelita menja se tokom vremena pod ukupnim dejstvom poremećajnih faktora, i stoga se mora opisivati skupom vremenski promenljivih parametara. Uticaji najvažnijih izvora poremećaja na kretanje satelita ilustrovani su na slici 3.7 na primeru GPS satelita.

Najveći poremećajni efekat na satelitsko kretanje ima spljoštenost Zemlje. Odgovarajuće poremećajno ubrzanje označeno je na slici 3.7 sa \mathbf{a}_{NC} . Uticaj spljoštenosti Zemlje može se proceniti ako se u razvoju potencijala sile Zemljine teže zadrži samo član V_{20} koji je stepena 2 i reda 0, a zatim nađe njegova razlika T_{20}



Slika 3.7. Ilustracija najvažnijih poremećajnih ubrzanja GPS satelita.

u odnosu na geopotencijal savršeno homogene sferne Zemlje $V = GM/r$. Može se pokazati da ta razlika iznosi:

$$T_{20} = V_{20} - \frac{GM}{r} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{GMa^2}{r^3} C_{20} (1 - 3 \sin^2 \varphi'). \quad (3.46)$$

gde φ' označava takozvanu geocentričnu širinu, a C_{20} odgovarajući koeficijent čija je brojna vrednost poznata. Prostorni gradijent poremećajnog potencijala T_{20} predstavlja komponente vektora poremećajnog ubrzanja, sa intenzitetom koji za GPS satelite iznosi oko $5 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$.

Spljoštenost Zemlje dvostruko deluje na orbite GPS satelita. Prvo, kada se satelit nađe u blizini ekvatorske ravni, sila privlačenja Zemlje postaje jača i ubrjava njegovo kretanje. Kako se satelit udaljava od ekvatora brzina mu se smanjuje. Rezultat ovakvog ponašanja je spora i postepena promena argumenta perigeuma, odnosno rotacija eliptične putanje u orbitalnoj ravni. Druga posledica spljoštenosti Zemlje ogleda se u tome što vektor sile privlačenja nije usmeren prema njenom središtu zbog viška masa oko ekvatora. Rezultujući spreg sila nastoji da dovede do poklapanja orbitalnu i ekvatorsku ravan, što kod GPS satelita ima za posledicu promenu rektascencije uzlaznog čvora odnosno rotaciju nodalne linije brzinom od oko 1.2° mesečno.

Sledeći važan poremećajni faktor predstavljaju gravitaciona privlačenja Sunca i Meseca, \mathbf{a}_{SG} i \mathbf{a}_{MG} . Iako ima mnogo manju masu od Sunca, Mesec je bliži Zemlji, tako da je njegov uticaj na kretanje GPS satelita veći. Rezultujuće poremećajno ubrzanje iznosi:

$$\mathbf{a}_{MG} = Gm_M \left(\frac{\mathbf{r}_M - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_M|^3} \right), \quad (3.47)$$

gde m_M označava masu Meseca, a \mathbf{r}_M njegov geocentrični vektor položaja. Sličan izraz važi i za uticaj Sunca ili drugih kosmičkih tela. Gravitaciono privlačenje Sunca i Meseca takođe dovodi do plime okeana i čvrste Zemljine kore. Ovako veliko premeštanje masa menja gravitaciono polje Zemlje, a samim tim i satelitske orbite. Kod GPS satelita je međutim ovaj indirektni efekat praktično beznačajan.

Poslednja grupa poremećajnih faktora odnosi se na nekoliko uticaja koji nisu gravitacionog porekla. Najznačajniji je direktni pritisak Sunčevog zračenja (\mathbf{a}_{DS}), koji nastaje kada se fotoni emitovani sa Sunca sudaraju sa satelitom. Rezultujuće poremećajno ubrzanje zavisi od efektivne površine satelita i njene reflektivnosti, ali je potpuno odsutno kada se GPS satelit nađe u Zemljinoj senci. Sunčevo zračenje se jednim delom odbija od površi Zemlje i na taj način takođe utiče na satelitsko kretanje (\mathbf{a}_{IS}). Ova pojava zove se albedo. S obzirom na to da se zbog Zemljine rotacije stalno menja površ odbijanja, modeliranje albeda veoma je teško. Najmanji efekat pokazuje sila trenja usled otpora vazduha (\mathbf{a}_{AR}), jer je na visinama leta GPS satelita atmosfera veoma razređena.

Tabela 3.1. Najznačajnije poremećajne sile i rezultujuća ubrzanja GPS satelita.

Izvor poremećaja	Poremećajno ubrzanje	Uticaj na orbitu za 1h
Spljoštenost Zemlje	$5 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$	250 m
Lunisolarno privlačenje	$5 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-2}$	25 m
Pritisak Sunčevog zračenja	$1 \cdot 10^{-7} \text{ ms}^{-2}$	0.5 m
Albedo	$1 \cdot 10^{-9} \text{ ms}^{-2}$	0.01 m

Prema tome, realno kretanje veštačkih satelita adekvatnije opisuje proširena vektorska diferencijalna jednačina:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (3.48)$$

u kojoj $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ označava rezultantu svih poremećajnih sila, koja u opštem slučaju zavisi od položaja satelita i njegove brzine. Imajući u vidu da je ukupni intenzitet poremećajnih sila, $|\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)|$, veoma mali u poređenju sa centralnim gravitacionim članom GM/r^2 , Keplerova putanja može poslužiti kao dobra približna vrednost u blizini početnih uslova, ali se greška znatno nagomilava tokom vremena. Iz tabele 3.1 vidi se da su najznačajnija poremećajna ubrzanja GPS satelita mala u odnosu na vrednost centralnog ubrzanja koje iznosi 0.56 ms^{-2} . Kontrolni GPS segment ih, međutim, mora uzeti u obzir jer uticaji na orbitu mogu postati značajni već posle jednog časa.

Iz ove kratke diskusije poremećajnih faktora može se steći utisak da realnu satelitsku orbitu nije moguće predstaviti ograničenim brojem parametara. Ustvari, u tu svrhu se i dalje mogu koristiti Keplerovi parametri, ali se moraju smatrati vremenski promenljivim, tako da formalno imaju oblik $a(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $\Omega(t)$, $\omega(t)$, $M(t)$. Ako bilo koji od njih označimo sa I , i izvršimo njegov razvoj u red u blizini tačke t_0 zadržavajući pri tome samo linearni član:

$$I(t) = I(t_0) + \left(\frac{dI}{dt} \right)_0 (t - t_0) + \dots \quad (3.49)$$

videćemo da se svaki Keplerov element može sračunati za proizvoljni trenutak vremena t ako su mu vrednost i brzina promene poznati u referentnom trenutku vremena t_0 . Skup $a(t_0)$, $e(t_0)$, $i(t_0)$, $\Omega(t_0)$, $\omega(t_0)$, $M(t_0)$ naziva se skupom oskulatornih orbitalnih elemenata. To su parametri one Keplerove eliptične putanje kojom bi satelit nastavio da se kreće kada bi u trenutku vremena t_0 nestali uticaji svih poremećajnih sila. Samo po sebi je razumljivo da zbog razvoja u red (3.49) oskulatorni elementi važe samo ograničeno vreme. Ono kod GPS satelita iznosi jedan čas.

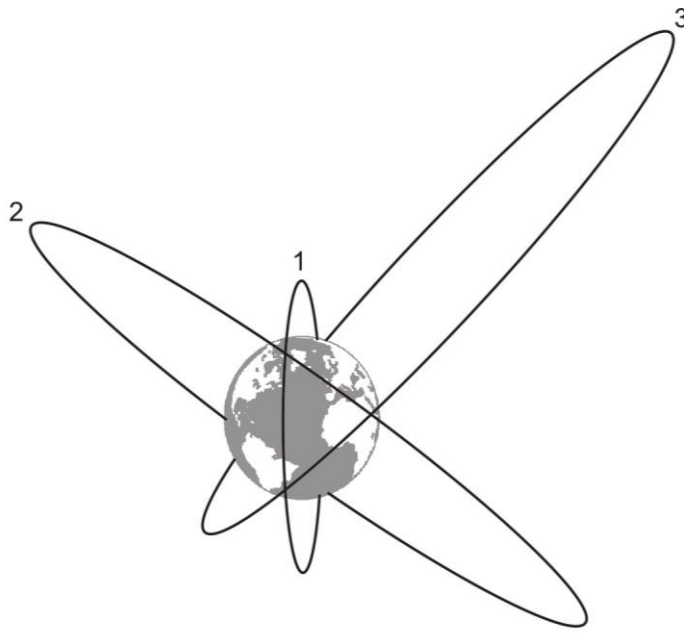
3.9 Klasifikacija satelitskih orbita

Veličina, oblik i orijentacija satelitske orbite predstavljaju najznačajnije parametre u fazi planiranja jedne satelitske misije. Kada su jednom definisani, ovi parametri, između ostalog, u potpunosti određuju način i vremenski okvir lansiranja, količinu neophodnog goriva, strukturu satelitskog hardvera i softvera, životni vek satelita, potrebe za korekcijama orbite, a samim tim i troškove misije odnosno njen opšti uspeh. Naravno, tip satelitske orbite zavisi prvenstveno od namene. Izviđački, komunikacioni, navigacioni ili meteorološki sateliti, samo su neki primeri potrebe za potpuno različitim tipovima satelitskih orbita.

Nažalost, stroga tipizacija satelitskih orbita nije ni jednostavna ni jedinstvena. Najčešće se kao osnov opšte klasifikacije koriste Keplerovi orbitalni parametri. Stoga ćemo se u nastavku ograničiti na nekoliko tipičnih primera koji mogu biti od značaja za satelitsku geodeziju.

Kada se kao kriterijum podela uzme visina leta satelita, $h = a - R$, gde je a velika poluosa, a R Zemljin poluprečnik, satelitske orbite mogu biti (slika 3.8):

- niske ($0 \text{ km} < h < 2000 \text{ km}$),
- srednje ($2000 \text{ km} < h < 35\,786 \text{ km}$),
- visoke ($h > 35\,786 \text{ km}$).



Slika 3.8. Klasifikacija satelitskih orbita po visini leta: (1) niska, (2) srednja, (3) visoka.

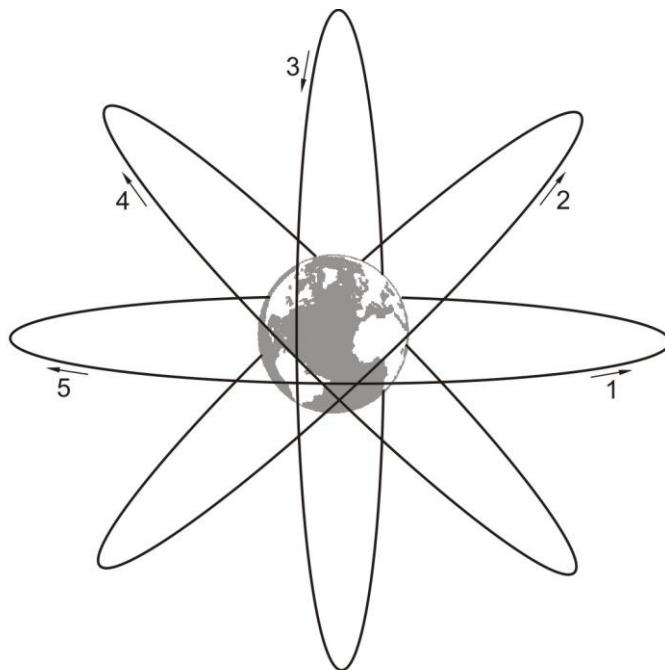
Niske orbite karakteristične su za izviđačke satelite kod kojih se zahteva velika brzina kretanja i visoka rezolucija snimaka. Navigacioni sateliti imaju po pravilu srednje orbite da bi potpuna pokrivenost Zemljine površi mogla da se postigne relativno malobrojnom satelitskom konstelacijom. Visoke orbite mogu se sresti kod nekih komunikacionih satelita koji u jednom delu svoje orbite dostižu visine leta od preko 36 000 km.

Sa podelom orbita na osnovu njihovih ekscentriciteta e već smo se upoznali. Od kružnih, eliptičnih, paraboličnih i hiperboličnih satelitskih orbita, samo se prva dva tipa normalno sreću u geodetskoj prameni.

Prema inklinaciji i , satelitske orbite dele se na (slika 3.9):

- ekvatorske ($i = 0^{\circ}$),
- nagnute ($0^{\circ} < i < 180^{\circ}$),
- polarne ($i = 90^{\circ}$).

Sateliti u ekvatorskim orbitama veoma dobro pokrivaju široki ekvatorijalni pojas Zemljine površi, ali je pokrivenost polarnih oblasti slaba. Iz tog razloga većina



Slika 3.9. Primeri tipova orbita po inklinaciji i smeru kretanja: (1) progradna ekvatorska, (2) progradna nagnuta, (3) polarna, (4) retrogradna nagnuta, (5) retrogradna ekvatorska.

komunikacionih satelita ima taj tip orbite. Nagnute orbite imaju sateliti čija je osnovna namena da što veći deo svog orbitalnog perioda provedu iznad oblasti Zemlje koja je predmet istraživanja. U nagnutim orbitama kreću se takođe i navigacioni sateliti. Polarne orbite često se koriste kada je potrebno da satelit bude uvek iznad određenog područja Zemlje u redovnim vremenskim intervalima što je glavna karakteristika satelita za daljinsku detekciju.

Smer kretanja satelita duž svoje putanje takođe može biti kriterijum podele orbita na:

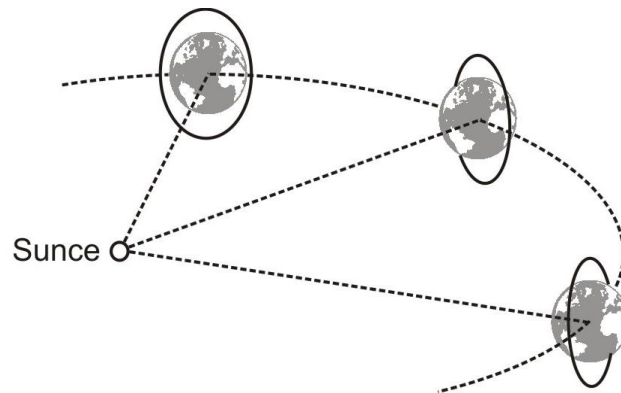
- progradne,
- retrogradne.

Ako se, posmatrajući sa lokacije iznad severnog pola, satelit kreće u smeru u kojem se Zemlja obrće, takve orbite nazivaju se progradnim. Retrogradne orbite imaju sateliti sa smerom kretanja suprotnim od smera Zemljine rotacije. Ovakva podela je donekle neodređena jedino kod polarnih orbita. Razlozi ekonomičnosti nameću da u najvećem broju slučajeva satelitske orbite budu progradne, jer je u suprotnom neophodna velika količina energije da bi se prilikom lansiranja satelita savladao inicijalni efekat rotacije Zemlje. Slika 3.9 ilustruje progradno i retrogradno kretanje satelita u kombinaciji sa orbitama različitog nagiba.

Priroda određenih satelitskih misija često je takva da je neophodno da period obilaska satelita stoji u celobrojnom odnosu sa periodom rotacije Zemlje. Razlog za to može biti zahtev da se satelitska konstelacija ponavlja svakog dana, ili da u pravilnim vremenskim intervalima satelit bude uvek iznad istog mesta Zemljine površi. Orbite sa ovakvim svojstvima nazivaju se geosinhronim. Jasno je da sinhronizacija satelitskog kretanja sa rotacijom Zemlje zavisi u prvom redu od velike poluose orbite, odnosno od visine leta satelita. Sateliti navigacionog sistema NAVSTAR GPS predstavljaju tipičan primer, jer im je period obilaska jednak polovini perioda jedne pune rotacije Zemlje (12 zvezdanih časova). Da bi postigli ovakav period obilaska, GPS sateliti moraju biti smešteni na visinu od 20 200 km iznad Zemljine površi.

Geostacionarne orbite su posebna vrsta geosinhronih orbita koje leže u ravni ekvatora ($i = 0^0$), i kod kojih je period obilaska tačno jednak periodu jedne pune rotacije Zemlje (24 zvezdana časa). Da bi geostacionarni satelit imao ovakav period, mora da bude udaljen od Zemljine površi 35 786 km. Za posmatrača sa Zemlje, geostacionarni sateliti imaju uvek iste položaje na nebu, zbog čega gotovo svi komunikacioni sateliti pripadaju ovoj klasi.

Poslednju grupu orbita po kriterijumu sinhronizacije čine heliosinhronne orbite. Satelit se lansira u heliosinhronu orbitu onda kada je potrebno da njegovi paneli imaju neprestano napajanje Sunčevom energijom. Da se ne bi našao u Zemljinoj senci, ovakav satelit mora pre svega imati polarnu putanju, uz dodatni uslov da orbitalna ravan bude uvek pod pravim uglom u odnosu na liniju koja povezuje



Slika 3.10. Ilustracija principa heliocentričnosti satelitske orbite.

centar mase Zemlje i Sunca. Očigledno je da će ovakav položaj orbitalne ravni biti obezbeđen jedino ako se za vreme jednog obilaska Zemlje oko Sunca, dakle za godinu dana, rektascenzija uzlaznog čvora orbite promeni 360° , odnosno za skoro 1° dnevno. Slika 3.10 ilustruje ovu situaciju. Heliosinhronne orbite često se sreću kod satelita za daljinsku detekciju.

Poglavlje 4

Principi satelitskih merenja

4.1 Osnovni pojmovi o signalima

Opažanje veštačkih Zemljinih satelita sastoji se u registraciji ili merenju signala koje sateliti emituju. Fizički posmatrano, satelitski signali su elektromagnetni talasi. Njihove karakteristike mogu se po potrebi modifikovati kako bi se omogućio prenos informacija.

Elektromagnetni talas predstavlja periodični poremećaj elektromagnetnog polja koji se u vakuumu kreće brzinom svetlosti. Tipično je za elektromagnetne talase da se poremećaj elektromagnetnog polja periodično ponavlja kako u vremenu, tako i u prostoru. U navigacionoj i komunikacionoj satelitskoj tehnici isključivo se koristi takozvani harmonijski tip talasa koji se matematički može predstaviti na sledeći način:

$$y = A \sin \left[2\pi \left(ft - f \frac{x}{v} + \phi_0 \right) \right], \quad (4.1)$$

pri čemu y označava intenzitet poremećaja u trenutku vremena t , A je amplituda talasa ili maksimalni intenzitet poremećaja polja, f je frekvencija talasa ili broj ponavljanja poremećaja u jedinici vremena, x je rastojanje koje je talas prešao do trenutka vremena t , v je brzina kretanja talasa, a ϕ_0 je početna faza talasa odnosno stanje talasa u trenutku vremena $t_0 = 0$. Član u malim zagradama izraza (4.1) očigledno je bezdimenzionalan, i naziva se fazom talasa. Kada se pomnoži sa 2π dobija se takozvani fazni ugao izražen u radijanima.

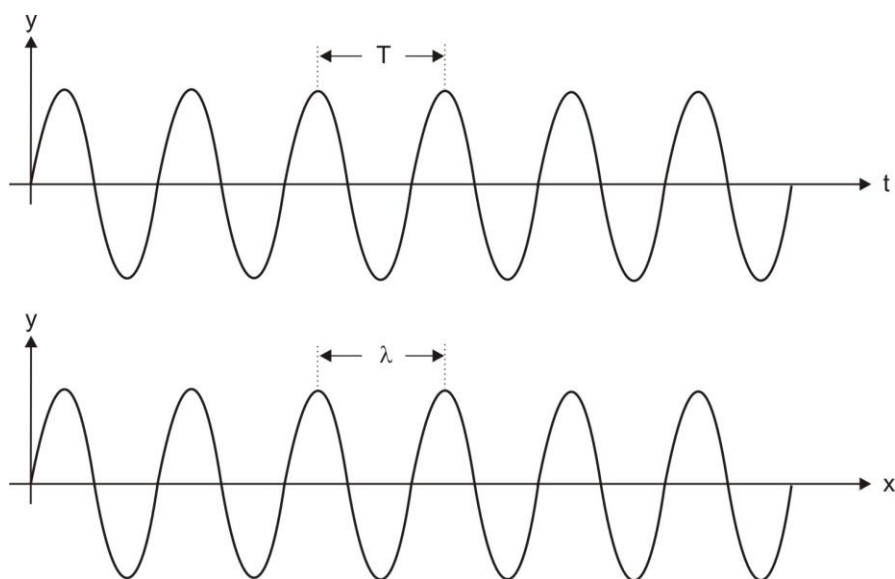
Iako je elektromagnetni talas vremensko-prostorni fenomen, poremećaj polja može se po potrebi razmatrati samo u jednom od domena. Ako se fiksira lokacija prijema talasa ($x = \text{const.}$) on postaje funkcija vremena, a ako se fiksira neki trenutak vremena ($t = \text{const.}$) talas je funkcija rastojanja. Njegov matematički oblik u tim slučajevima glasi:

$$y = A \sin \left[2\pi (ft + \phi_0) \right], \quad (4.2)$$

$$y = A \sin \left[2\pi \left(-f \frac{x}{v} + \phi_0 \right) \right]. \quad (4.3)$$

Pošto je frekvencija f jednaka broju ponavljanja stanja poremećaja u jedinici vremena, očigledno je da će njena recipročna vrednost predstavljati vremenski interval T tokom kojeg poremećaj načini jedan ciklus i ponovo zauzme isto stanje:

$$T = \frac{1}{f}. \quad (4.4)$$



Slika 4.1. Period talasa i talasna dužina.

Ovaj interval vremena zove se period talasa. S druge strane, za vreme perioda T talas pređe put λ nakon kojeg je poremećaj ponovo u istom stanju. Ovo rastojanje naziva se talasnom dužinom. Prema tome, poremećaj elektromagnetnog polja ima intenzitet koji se neprestano vremenski ponavlja svakih T sekundi, a prostorno svakih λ metara (slika 4.1).

Brzina prostiranja talasa v lako se izvodi kada se ima u vidu da talas pređe put λ za vreme T :

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f . \quad (4.5)$$

Ako se pored toga definišu i kružna frekvencija ω , talasni broj k i početni fazni ugao φ_0 :

$$\omega = 2\pi f , \quad (4.6)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} , \quad (4.7)$$

$$\varphi_0 = 2\pi\phi_0 , \quad (4.8)$$

zamenom u (4.1) dobija se alternativni matematički opis harmonijskog talasa koji se često koristi u komunikacionoj tehnici:

$$y = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (4.9)$$

Kao što je već pomenuto, talas se u vakuumu prostire brzinom svetlosti c_0 . Međunarodno usvojena vrednost brzine svetlosti koja se koristi u satelitskoj geodeziji iznosi:

$$c_0 = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}. \quad (4.10)$$

U svakoj drugoj situaciji brzina prostiranja zavisi od svojstava sredine kroz koju se talas kreće, i karakteriše je bezdimenzionalna veličina koja se naziva indeksom prelamanja n :

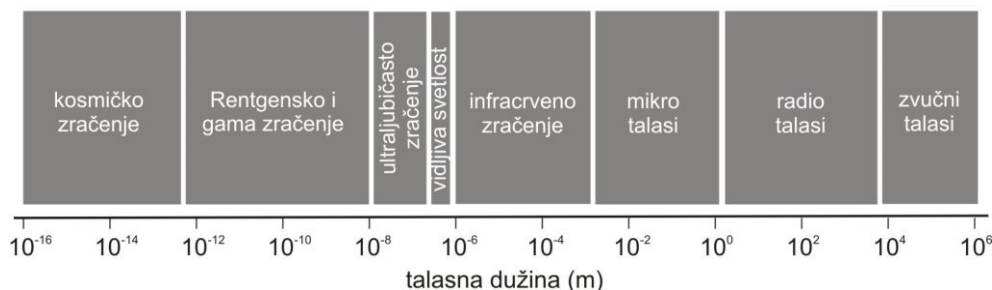
$$n = \frac{c_0}{v}. \quad (4.11)$$

Indeks prelamanja ima vrednost blisku jedinici, tako da se umesto njega često koristi takozvani refrakcioni broj N :

$$N = (n - 1) \cdot 10^6. \quad (4.12)$$

U vakuumu i sredinama sa konstantnim indeksom prelamanja elektromagnetni talas kreće se pravolinijski i konstantnom brzinom. To, međutim, nije slučaj kod sredina sa promenljivim indeksom prelamanja, kao što je, na primer, Zemljina atmosfera. U takvim sredinama talas se kreće promenljivom brzinom duž prostorno zakrivljene putanje koja se naziva optičkim putem. Poznavanje indeksa prelamanja ili refrakcionog broja duž putanje prostiranja elektromagnetnih talasa omogućuje da se dužine do satelita određuju množenjem precizno izmerenog vremena puta signala sa njegovom brzinom.

Iako spektar elektromagnetnih talasa obuhvata skoro 20 redova veličine (slika 4.2), satelitska geodezija koristi relativno mali opseg frekvencija, i to uglavnom u oblasti vidljive svetlosti ($0.4 - 0.8 \cdot 10^{15}$ Hz) i radio talasa ($10^8 - 10^{11}$ Hz). Radio talasi inače podrazumevaju frekvencije u rasponu od 10 kHz do 300 GHz, odnosno



Slika 4.2. Spektar elektromagnetnih talasa.

Tabela 4.1. Klasifikacija frekventijskih opsega radio talasa.

Frekventijski opseg	Frekvencija	Talasna dužina
VLF (veoma niska frekvencija)	< 30 kHz	> 10 km
LF (niska frekvencija)	30 kHz – 300 kHz	1 km – 10 km
MF (srednja frekvencija)	300 kHz – 3 MHz	100 m – 1 km
HF (visoka frekvencija)	3 MHz – 30 MHz	10 m – 100 m
VHF (veoma visoka frekvencija)	30 MHz – 300 MHz	1 m – 10 m
UHF (ultra visoka frekvencija)	300 MHz – 3 GHz	10 cm – 1 m
SHF (super visoka frekvencija)	3 GHz – 30 GHz	1 cm – 10 cm
EHF (ekstremno visoka frekvencija)	30 GHz – 300 GHz	1 mm – 1 cm

talasne dužine od 1 mm pa do preko 30 km. Podskup radio talasa sa talasnim dužinama u rasponu od 1 mm do 1 m naziva se mikrotalasima. Celokupni spektar radio talasa podeljen je iz praktičnih razloga na frekventijske opsege sa posebnom nomenklaturom (tabela 4.1).

4.2 Fazna i grupna brzina

Brzinu prostiranja elektromagnetnih talasa već smo predstavili izrazom (4.5), i to kao odnos pređenog puta (talasna dužina λ) i vremena (period talasa T). Preciznije govoreći, ovaj izraz definiše takozvanu faznu brzinu v_{ph} , jer se odnosi na fazu talasa koji ima jednu frekvenciju:

$$v_{ph} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k}. \quad (4.13)$$

U realnosti se, međutim, gotovo uvek radi o signalu kojeg predstavlja grupa elektromagnetnih talasa različitih frekvencija. Raspon od najmanje do najveće frekvencije naziva se frekventijskim pojasom. Prostiranje takve talasne grupe odvija se grupnom brzinom v_{gr} , koja je u opštem slučaju nešto drugačija u odnosu na fazne brzine pojedinačnih talasa. Sredine u kojima se fazna i grupna brzina razlikuju nazivaju se disperzivnim.

Do izraza za grupnu brzinu može se doći razmatranjem grupe od dva talasa jednakih amplituda A , čije su kružne frekvencije $\omega_1 = 2\pi f_1$ i $\omega_2 = 2\pi f_2$, a talasni brojevi $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ i $k_2 = 2\pi/\lambda_2$:

$$\begin{aligned} y_1 &= A \sin(\omega_1 t - k_1 x) \\ y_2 &= A \sin(\omega_2 t - k_2 x) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pri tome je radi jednostavnosti fazni ugao kod oba talasa izjednačen sa nulom. Koristeći poznatu adicijonu teoremu:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (4.15)$$

za superpoziciju dva talasa dobija se:

$$\begin{aligned} y_{gr} &= y_1 + y_2 \\ &= 2A \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x \right) \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Rezultat je dakle signal čija mešovita kružna frekvencija iznosi $\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2$, i čija je amplituda A_m :

$$A_m = 2A \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x \right). \quad (4.17)$$

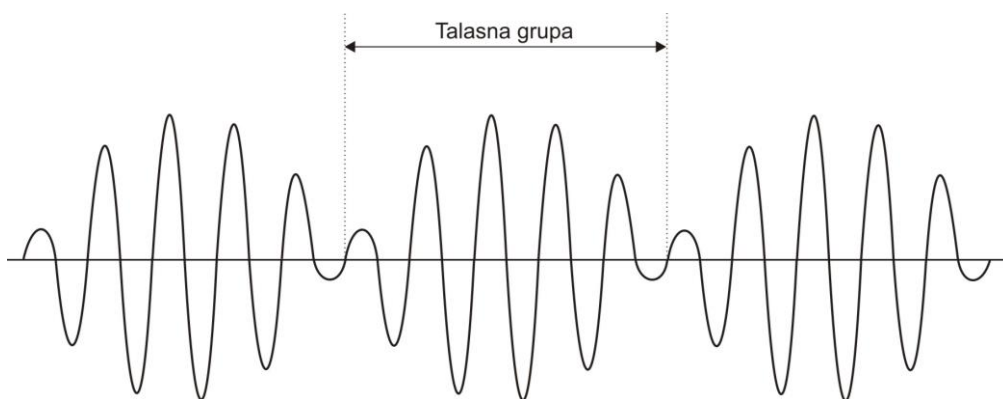
Slika 4.3 prikazuje primer jedne takve superpozicije talasa različitih frekvencija, na kojem se jasno može uočiti da se rezultujuća amplituda grupe talasa periodično menja.

Kretanje grupe talasa karakteriše upravo ta periodično promenljiva amplituda. Iz izraza (4.17) očigledno je da kružna frekvencija i talasni broj grupe iznose:

$$\omega_{gr} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad (4.18)$$

$$k_{gr} = \frac{k_1 - k_2}{2}, \quad (4.19)$$

odakle se za grupnu brzinu dobija:



Slika 4.3. Rezultat superpozicije dva talasa različitih frekvencija.

$$v_{gr} = \frac{\omega_{gr}}{k_{gr}} = \frac{f_1 - f_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{\Delta f}{\Delta \lambda} \lambda_1 \lambda_2. \quad (4.20)$$

Ako se dopusti da razlike u frekvencijama Δf i talasnim dužinama $\Delta \lambda$ teže nuli, ovaj izraz postaje:

$$v_{gr} = -\frac{df}{d\lambda} \lambda^2. \quad (4.21)$$

Izvod frekvencije po talasnoj dužini može se naći diferenciranjem formule za faznu brzinu, iz koje je $f = v_{ph}/\lambda$:

$$df = -\frac{v_{ph}}{\lambda^2} d\lambda + \frac{1}{\lambda} dv_{ph} \Rightarrow \frac{df}{d\lambda} = -\frac{v_{ph}}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{dv_{ph}}{d\lambda}. \quad (4.22)$$

Zamenom u (4.21) dobija se konačni izraz za grupnu brzinu u obliku:

$$v_{gr} = v_{ph} - \lambda \frac{dv_{ph}}{d\lambda}. \quad (4.23)$$

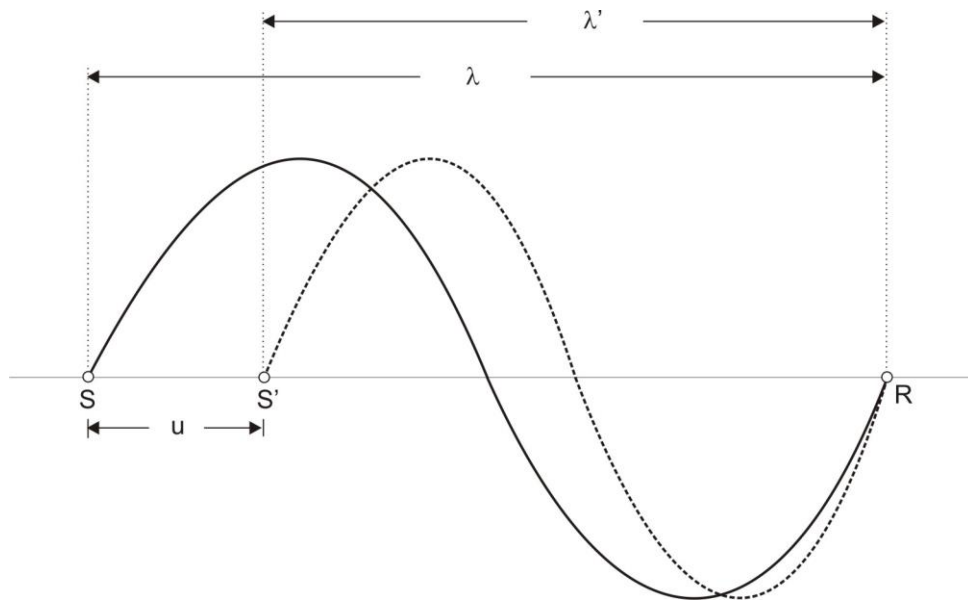
Opšta veza (4.23) između grupne i faze brzine naziva se Rejlijevom jednačinom po naučniku koji ju je izveo 1881. godine. Ove dve brzine su, dakle, u opštem slučaju različite. Fazna i grupna brzina talasa jednake su samo kada je takozvana disperzija $dv_{ph}/d\lambda = 0$, odnosno kada brzina ne zavisi od promene talasne dužine.

4.3 Doplerov efekat

Elektromagnetni talasi poseduju još jednu interesantnu osobinu koja se sastoji u tome da im se talasna dužina i frekvencija menjaju kada se predajnik (izvor talasa) kreće relativno u odnosu na prijemnik (opažača). Ova pojava je karakteristična za sve vrste talasa, i naziva se Doplerovim efektom po austrijskom fizičaru Kristijanu Dopleru koji ga je prvi opisao 1842. godine.

Fenomen Doplerovog efekta poznat je inače iz svakodnevnog života. Tako, na primer, sirena vozila koje se kreće emituje zvučni talas konstantne frekvencije, ali je ton kojeg opažač registruje viši kada se vozilo kreće ka njemu, a postaje niži kad vozilo počne da se udaljava. Pri tome je karakteristično da promena registrovane frekvencije naglo nastupa u momentu kada vozilo prolazi pored opažača, odnosno kada je rastojanje između njih minimalno.

Do matematičke formulacije Doplerovog efekta lako se može doći uz pomoć slike 4.4 i osnovnih parametara talasnog kretanja. Neka pokretni predajnik u tački S emituje elektromagnetne talase frekvencije f_s i sa periodom T , koji se prostiru brzinom $v = \lambda/T$. Posmatrajmo radi jednostavnosti rastojanje od samo jedne talasne



Slika 4.4. Ilustracija Doplerovog efekta.

dužine λ , što znači da talas za vreme T dospeva u prijemnik koji se nalazi u tački R. Predajnik je u međuvremenu prešao rastojanje u krećući se brzinom $v_s = u/T$, i nalazi se u tački S'.

Sa slike 4.4 lako se može ustanoviti da novo rastojanje između predajnika i prijemnika iznosi:

$$\lambda' = \lambda - u = \lambda - \frac{v_s}{f_s} = \frac{v}{f_s} - \frac{v_s}{f_s} = \frac{v}{f_s} \left(1 - \frac{v_s}{v} \right). \quad (4.24)$$

Pošto brzina elektromagnetnog talasa v ne zavisi od kretanja predajnika, na lokaciji prijemnika R biće registrovana frekvencija f_R :

$$f_R = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\frac{v}{f_s} \left(1 - \frac{v_s}{v} \right)} = \frac{f_s}{1 - \frac{v_s}{v}}, \quad (4.25)$$

koja očigledno nije jednaka emitovanoj frekvenciji f_s . Ako se poslednji izraz gornje jednačine razvije u red i zanemare članovi višeg stepena dobiće se:

$$f_R = f_s \left(1 + \frac{v_s}{v} \right), \quad (4.26)$$

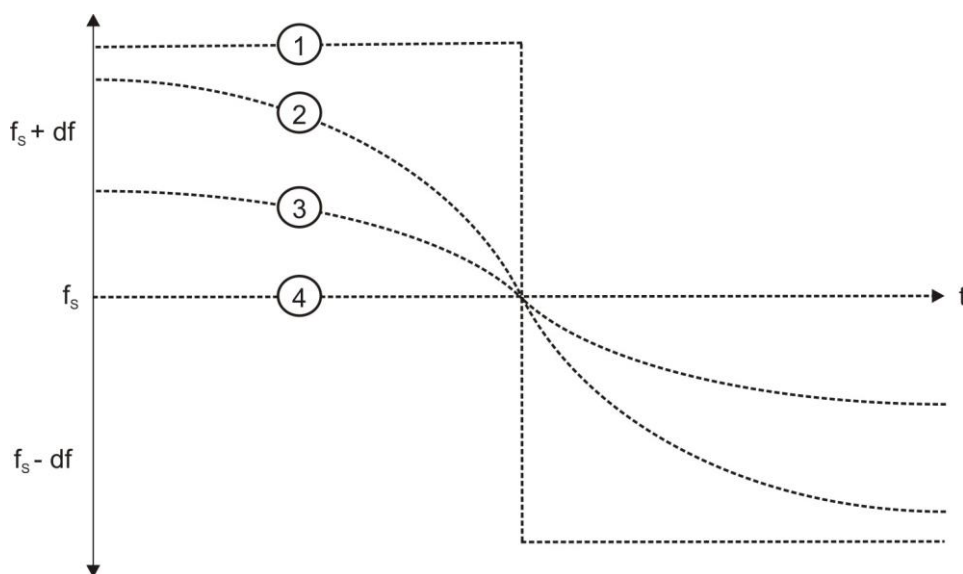
što predstavlja vezu između emitovane i primljene frekvencije u situaciji u kojoj se predajnik približava prijemniku. Kada se predajnik udaljava od prijemnika ta veza glasi:

$$f_R = f_S \left(1 - \frac{v_S}{v} \right), \quad (4.27)$$

Izrazi (4.26) i (4.27) dobijeni su pod pretpostavkom da se prijemnik nalazi na pravolinijskoj putanji pokretnog predajnika. U opštem slučaju, odnos emitovane i primljene frekvencije određuje brzina promene rastojanja s između predajnika i prijemnika, ds/dt :

$$f_R = f_S \left(1 - \frac{1}{v} \frac{ds}{dt} \right). \quad (4.28)$$

Slika 4.5 ilustruje nekoliko tipičnih situacija. Oštar oblik krive (1) odnosi se na prijemnik koji je tačno na putanji izvora elektromagnetnih talasa. Nagla promena primljene frekvencije nastupa u trenutku kada se predajnik pri svom kretanju nađe u lokaciji prijemnika. Krive (2) i (3) predstavljaju promene primljene frekvencije kada je putanja predajnika na izvesnom rastojanju od prijemnika. Što je to rastojanje veće, oblik Doplerove krive je blaži. Ako se predajnik kreće kružnom putanjom u čijem je centru smešten prijemnik, njihovo međusobno rastojanje ostaje



Slika 4.5. Promena primljene frekvencije (Doplerov efekat) kod različitih brzina promena rastojanja između predajnika i prijemnika.

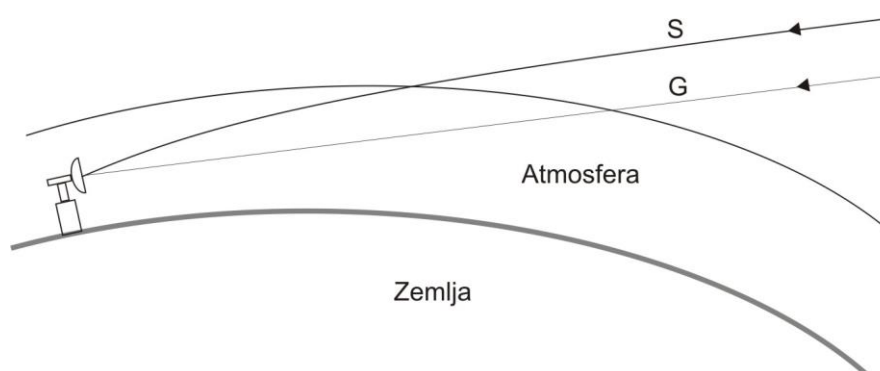
konstantno, prijemnik registruje upravo frekvenciju f_s koju predajnik emituje, i Doplerova kriva postaje prava linija (4). U svim ovim slučajevima, Doplerove krive seku se u tački koja označava trenutak kada je rastojanje između predajnika i prijemnika bilo minimalno. To je jedini trenutak u kojem su emitovana i primljena frekvencija jednake.

4.4 Kretanje signala kroz atmosferu

Signali emitovani sa satelita kreću se najvećim delom kroz sredinu koja se može smatrati praznim prostorom. Kao što smo već videli, prostiranje elektromagnetnih talasa u tom slučaju odvija se pravolinijski i brzinom svetlosti, pri čemu između fazne i grupne brzine ne postoji nikakva razlika. Međutim, pošto je merna oprema uglavnom smeštena na fizičkoj površi Zemlje, jedan manji deo putanje signala ipak prolazi kroz Zemljin atmosferski omotač, a to je sredina u kojoj elektromagnetni talasi menjaju svoja svojstva, pre svega brzinu prostiranja i oblik putanje. Ukupan efekat naziva se atmosferskom refrakcijom.

Uticaj atmosfere na kretanje elektromagnetnih talasa prikazan je na slici 4.6, na kojoj se može videti da se aktuelna putanja signala S razlikuje od pravolinijskog, geometrijskog rastojanja G . Shodno Fermaovom principu, signal se najbrže kreće putanjom S iako to nije najkraće rastojanje, zbog toga što je S takozvani optički put. Indeks prelamanja atmosfere menja se kao funkcija položaja s duž optičkog puta. Ako se ta funkcija označi sa $n(s)$, i pri tome uzme u obzir definicija indeksa prelamanja kao i činjenica da za element puta ds brzina signala iznosi $v = ds/dt$, sledi:

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{n(s)}{c} ds. \quad (4.29)$$



Slika 4.6. Razlika između putanje signala (S) i geometrijskog rastojanja (G) usled uticaja atmosferske refrakcije.

Integracijom duž optičkog puta dobija se:

$$\Delta t_S = t_2 - t_1 = \frac{1}{c} \int_S n(s) ds, \quad (4.30)$$

pri čemu su t_1 i t_2 trenuci emitovanja i prijema signala, a Δt_S označava vreme njegovog puta od odašiljača do prijemnika. Dužina optičkog puta S dobija se množenjem brzinom svetlosti c :

$$S = c \cdot \Delta t_S = \int_S n(s) ds. \quad (4.31)$$

Sada se uticaj atmosfere refrakcije $\delta S = S - G$ može izraziti kao:

$$\delta S = \int_S (n(s) - 1) ds. \quad (4.32)$$

Prema tome, da bi se ovaj efekat mogao praktično obračunati neophodno je poznavanje indeksa prelamanja $n(s)$ duž putanje prostiranja signala. Nažalost, Zemljina atmosfera predstavlja veoma kompleksnu i dinamičnu strukturu, sa karakteristikama koje variraju kako u prostoru, tako i u vremenu. Stoga se za sve praktične svrhe mora koristiti pojednostavljena predstava atmosfere podeljene na koncentrične slojeve različitih debljina, u okviru kojih se smatra da ispitivano svojstvo, kao što je to indeks prelamanja, ima konstantnu vrednost. Ta podela se sa stanovišta kretanja elektromagnetnih talasa svodi na dva globalna atmosfere regiona: jonosferu i troposferu.

Kretanje signala kroz jonosferu. Jonosfera je oblast atmosfere koja započinje na visini od oko 80 km iznad Zemljine površi, i proteže se do granice sa spoljašnjim kosmičkim prostorom za koju se uzima visina od oko 1000 km. Jonosferski omotač karakterističan je po izrazitom prisustvu slobodnih elektrona koji nastaju pre svega kao rezultat jonizacije, odnosno interakcije Sunčevog ultraljubičastog zračenja i atoma gasova u gornjim slojevima atmosfere. Ovakvi negativno naelektrisani elektroni, kao i pozitivno naelektrisani atomi koji su bez njih ostali, nazivaju se jonima, odakle i potiče termin jonosfera. Noću, kada nema Sunčevog zračenja, odvija se proces suprotan jonizaciji. Pozitivni atomi privlače slobodne elektrone i na taj način se rekombinuju u električno neutralne čestice. Intenzitet jonizacije direktno zavisi od Sunčeve aktivnosti, i može široko varirati kako po položaju i visini, tako i tokom dana i godine.

Jonosfera je disperzivna sredina za radio talase koji se koriste u satelitskoj geodeziji. To znači da se pri njihovom kretanju kroz jonosferu moraju razlikovati fazna i grupna brzina. Imajući u vidu definiciju (4.11), sledi da se analogno tome moraju takođe razlikovati i fazni i grupni indeks prelamanja n_{ph} i n_{gr} . Može se pokazati da između njih postoji relacija slična Rejlijevoj:

$$n_{gr} = n_{ph} - \lambda \frac{dn_{ph}}{d\lambda} = n_{ph} + f \frac{dn_{ph}}{df}. \quad (4.33)$$

Jonosferski grupni i fazni indeks prelamanja imaju sledeći oblik:

$$n_{gr} = 1 + \frac{C \cdot N_e}{f^2}, \quad n_{ph} = 1 - \frac{C \cdot N_e}{f^2}, \quad (4.34)$$

pri čemu je f frekvencija talasa, C je konstanta čija numerička vrednost iznosi 40.3, a N_e je koncentracija elektrona, odnosno njihov broj u jedinici zapremine (m^3). Interesantno je primetiti da je fazni indeks prelamanja manji od 1, tako da je fazna brzina pri kretanju kroz jonosferu veća od brzine svetlosti. Ova konstatacija ipak nije u protivrečnosti sa osnovnom postavkom teorijom relativiteta, jer po njoj se jedino materija i informacija ne mogu kretati brže od svetlosti.

Očigledno je iz izraza (4.34) da indeksi prelamanja u prvom redu zavise od koncentracije elektrona $N_e(s)$ duž putanje prostiranja signala. Odgovarajući uticaji jonosferske refrakcije mogu se odrediti uz pomoć (4.32) kao:

$$\delta S_{gr} = \int_S (n_{gr}(s) - 1) ds = \frac{C}{f^2} \int_S N_e(s) ds, \quad (4.35)$$

$$\delta S_{ph} = \int_S (n_{ph}(s) - 1) ds = -\frac{C}{f^2} \int_S N_e(s) ds. \quad (4.36)$$

Veličina:

$$TEC = \int_S N(s) ds \quad (4.37)$$

naziva se integralnim sadržajem elektrona (Total Electron Content), i predstavlja ukupan broj elektrona u zamišljenom cilindru sa osnovom površine 1 m^2 , čija je osovina putanja signala. Jedinica za TEC zove se $TECU$ (Total Electron Content Unit), i iznosi 10^{16} slobodnih elektrona po kvadratnom metru. Sada jonosferska refrakcija grupno i fazno određenih rastojanja između odašiljača i prijemnika signala dobija jednostavni oblik:

$$\delta S_{gr} = \frac{C}{f^2} TEC, \quad \delta S_{ph} = -\frac{C}{f^2} TEC, \quad (4.38)$$

iz kojeg se vidi da je uticaj isti po veličini a različit po znaku. Efekat jonosferske refrakcije je dakle takav da su grupno određene putanje signala uvek duže, a fazno određene putanje signala uvek kraće od geometrijskog rastojanja. Kolika je konkretna vrednost jonosferske refrakcije zavisi pre svega od frekvencije talasa i

vertikalnog ugla putanje signala. Ona, na primer, iznosi 1 – 15 m kod signala sa frekvencijom od 1 GHz koji se prostiru po zenitnom pravcu, ali pri malom vertikalnom uglu lako dostiže vrednost i do 150 m. Za signale iz optičkog dela spektra sa frekvencijom većom od 10^{14} Hz, uticaj jonosferske refrakcije praktično je beznačajan.

Kretanje signala kroz troposferu. Troposfera je oblast atmosfere koja se proteže od fizičke površi Zemlje do visine od oko 40 km, pri čemu prvih 10 km obuhvata 99% svih atmosferskih gasova i celokupni sadržaj vodene pare. Za razliku od jonosfere, troposfera nije disperzivna sredina za radio talase iz frekvencijskog opsega od 100 MHz do 15 GHz, ali jeste za elektromagnetne talase iz opsega vidljive svetlosti.

Uobičajeno je da se kod uticaja troposferske refrakcije umesto indeksa prelamanja n koristi refrakcioni broj $N = (n - 1) \cdot 10^6$, tako da (4.32) glasi:

$$\delta S = 10^{-6} \int_S N(s) ds. \quad (4.39)$$

Refraktivnost troposfere određuje koncentracija molekula atmosferskih gasova, koja je funkcija atmosferskih parametara kao što su pritisak P , temperatura T i parcijalni pritisak vodene pare e . Stoga se refrakcioni broj troposfere može izraziti kao:

$$N = c_1 \frac{P}{T} + c_2 \frac{e}{T^2}, \quad (4.40)$$

sa koeficijentima $c_1 = 77.6$ i $c_2 = 3.73 \cdot 10^5$ čije su vrednosti empirijski određene. Prvi član ove formule obuhvata uticaj suvog vazduha, a drugi uticaj vodene pare. Refrakcioni broj i efekat troposferske refrakcije mogu se, dakle, razdvojiti na suhu (d) i vlažnu (w) komponentu:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_d + \delta S_w \\ &= 10^{-6} \int_S N_d(s) ds + 10^{-6} \int_S N_w(s) ds \end{aligned} \quad (4.41)$$

Suva komponenta relativno lako se modelira jer je raspodela suvog vazduha i geografski i po visini veoma homogena. Ona učestvuje sa dominantnih 90% u ukupnom efektu troposferske refrakcije, i zavisi pre svega od vazdušnog pritiska. Vlažna komponenta se, nasuprot tome, vrlo teško prognozira jer se sadržaj i raspodela vodene pare u troposferi nepredvidivo menjaju, kako prostorno tako i vremenski.

Ukupan uticaj troposferske refrakcije u zenitnom pravcu iznosi oko 2.3 m, od čega na vlažnu komponentu otpada maksimalno 40 cm. Za elektromagnetne talase koji pristižu na Zemljinu površinu pod vertikalnim uglom od 5° , uticaj troposferske

refrakcije dostiže vrednost i do 25 m. Zavisnost uticaja troposferske refrakcije od atmosferskih parametara P , T , e i zenitnog odstojanja signala z ilustruje često korišćena formula Sastamoinena, čiji pojednostavljeni oblik glasi:

$$\delta S = \frac{2277 \cdot 10^{-6}}{\cos z} \left[P + \left(\frac{1255}{T} + 0.05 \right) e - 1.16 \tan^2 z \right], \quad (4.42)$$

i u kojoj su atmosferski pritisak i parcijalni pritisak vodene pare dati u [mbar], a temperatura u [$^{\circ}$ K]. Prvi član unutar srednje zagrade predstavlja suvu, drugi vlažnu komponentu, dok poslednji član izražava uticaj Zemljine zakrivljenosti.

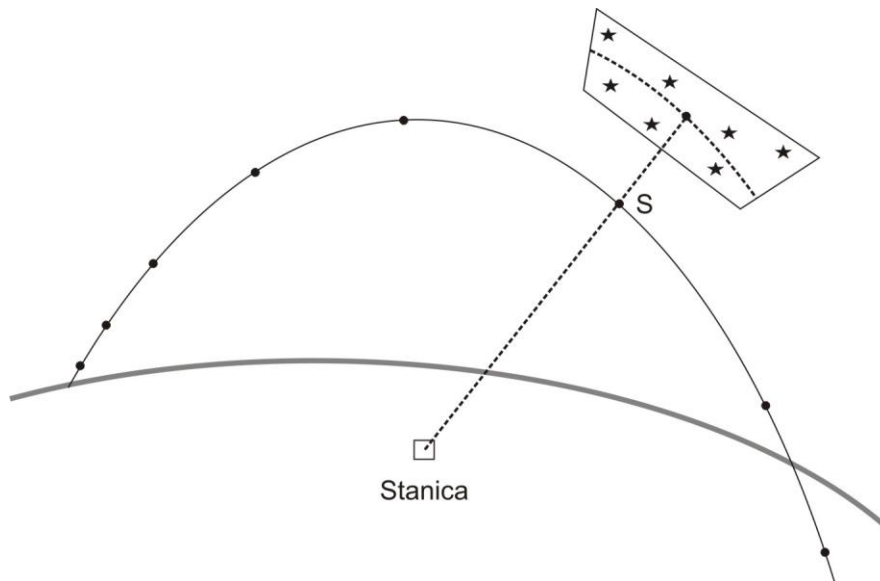
Situacija je potpuno drugačija u slučaju elektromagnetnih talasa iz optičkog spektra. Satelitske tehnike, kao što je lasersko merenje rastojanja, oslobođene su u najvećoj meri uticaja vodene pare, koji čak i u najnepovoljnijim uslovima iznosi svega 6 mm. Međutim, troposfera je disperzivna sredina za lasersko zračenje, tako da brzina talasa zavisi od njihove frekvencije, odnosno talasne dužine. Standardni model koji ilustruje tu činjenicu je formula Marinija za računanje troposferskog uticaja:

$$\delta S = \frac{f(\lambda)}{F(\varphi, h)} \cdot \frac{A + B}{\cos z + \frac{B / (A + B)}{\cos z + 0.01}}, \quad (4.43)$$

pri čemu A i B predstavljaju veličine koje se računaju na osnovu vrednosti atmosferskih parametara, $f(\lambda)$ je funkcija talasne dužine lasera, a $F(\varphi, h)$ funkcija geografske širine i visine stanice na Zemljinoj površi. Upoređenjem formula Sastamoinena i Marinija lako se može utvrditi da je, na primer, pri temperaturi od 20° C (293° K) uticaj vlažne komponente na mikro talase oko 70 puta veći u odnosu na talase vidljive svetlosti.

4.5 Satelitsko merenje pravaca

Određivanje pravaca prema satelitima predstavlja jednu od najranijih opažačkih tehnika u satelitskoj geodeziji, i izvodi se fotografskim metodama korišćenjem elektromagnetnih talasa iz spektra vidljive svetlosti. Osnovna ideja sastoji se u fotografisanju satelita i pozadinskog neba noću, dok se stanica sa kamerom nalazi u Zemljinoj senci (slika 4.7). Da bi se trag satelitske putanje pojavio na fotografiji, satelit mora biti osvetljen Suncem, ili opremljen uređajima koji emituju bljeskove svetlosti. Isti efekat može se postići i laserskim impulsima odbijenim od satelitskih prizmi. U svakom slučaju, rezultat je snimak u čijoj ravni se komparatorom mogu izmeriti pravougle koordinate satelita x_s , y_s , i pravougle koordinate zvezda x_i , y_i . S obzirom na to da su za fotografisane zvezde poznati iz kataloga pravci definisani polarnim koordinatama u konvencionalnom inercijalnom referentnom sistemu



Slika 4.7. Princip određivanja pravaca u satelitskoj geodeziji.

(rektascenzija α_i i deklinacija δ_i), odgovarajućim interpolacionim postupkom mogu se odrediti ove koordinate α_S , δ_S i za satelit. Jedinični vektor \mathbf{e}_S kojim je određen pravac ka satelitu S ima tada komponente:

$$\mathbf{e}_S = \begin{bmatrix} \cos \delta_S \cos \alpha_S \\ \cos \delta_S \sin \alpha_S \\ \sin \delta_S \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Iako je principijelno jednostavno, fotografsko merenje pravaca bilo je veoma teško operativno realizovati. Pre svega, snimanje zahteva povoljne vremenske uslove, i izvodilo se specijalno konstruisanim i pozicioniranim kamerama, sa poznatim karakteristikama, i sa mogućnostima za praćenje zvezda ili satelita. Koordinate izmerene u ravni snimka morale su se korigovati zbog niza uticajnih faktora. Tangencijalna i radijalna distorzija mogle su, na primer, biti obuhvaćene jedino ako su bili poznati koeficijenti koji opisuju distorziju sočiva u objektivu kamere. Pored standardnog računanja uticaja astronomske refrakcije pomoću zenitnog odstojanja, atmosferskog pritiska i temperature, morala je biti razmatrana i takozvana satelitska refrakcija, jer se za razliku od zvezda za satelite ne može smatrati da su beskonačno udaljeni. Da bi se opažanja sa različitih stanica odnosila na istu vremensku epohu bilo je neophodno obračunati efekat satelitske aberacije, a posebna fazna korekcija korišćena je za svodjenje snimljenog lika na težište satelita. Tipična tačnost merenja koordinata u okviru snimka iznosila je za dobro definisane likove oko $1 \mu\text{m}$, što je obezbeđivalo uglovnu rezoluciju od $0.5''$. Međutim, tačnost

definitivno izmerenih pravaca kretala se u proseku na nivou od 1", što iznosi 3 m za satelite koji lete na visini od 6000 km.

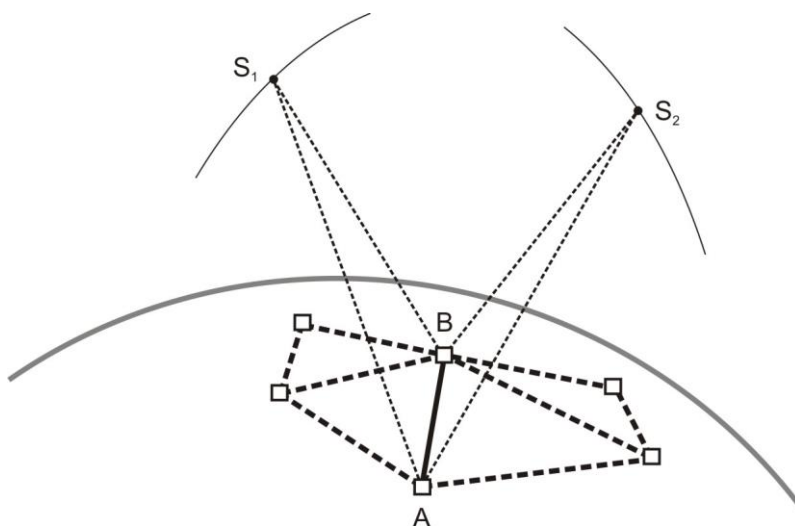
Metoda fotografskog merenja pravaca koristila se po prirodi stvari pre svega za određivanje orbita satelita, ali je našla primenu i u čisto geometrijskom načinu uspostavljanja globalnih mreža takozvanom zvezdanom triangulacijom. Osnovni princip ilustrovan je na slici 4.8. Pravci izmereni simultano sa stanica A i B prema satelitu S_1 mogu se predstaviti jediničnim vektorima \mathbf{e}_{A1} i \mathbf{e}_{B1} , i zajedno definišu ravan čiji je vektor normale:

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_{A1} \times \mathbf{e}_{B1}. \quad (4.45)$$

Na isti način može se dobiti vektor normale \mathbf{n}_2 na ravan definisanu simultano opažanim pravcima prema drugom satelitu S_2 , ili istom satelitu u drugom položaju. Vektori normala omogućuju izvođenje jediničnog vektora:

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|}, \quad (4.46)$$

koji očigledno predstavlja pravac između terestričkih stanica A i B . Sukcesivnim ponavljanjem postupka između drugih parova stanica moguće je formirati globalnu mrežu čiji će oblik biti jasno definisan izmerenim pravcima. Međutim, da bi se jednoznačno odredile koordinate stanica mora se još otkloniti datumski defekt u vidu neodređenosti apsolutnog položaja mreže kao i njene razmere, što se postiže poznatim koordinatama najmanje jedne stanice i barem jednom izmerenom međustaničnom dužinom.



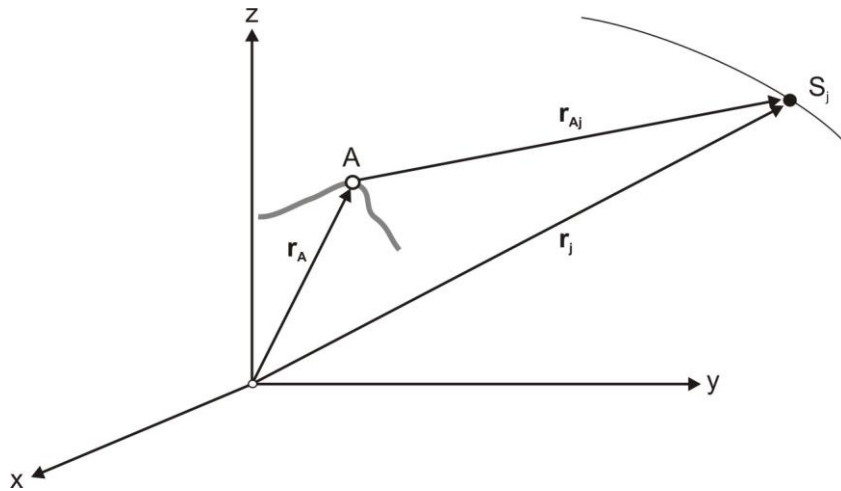
Slika 4.8. Princip pozicioniranja pomoću satelitski izmerenih pravaca.

I pored dugotrajnog procesa merenja, komplikovane obrade i relativno niske tačnosti, fotografsko merenje pravaca predstavljalo je dominantnu opažačku tehniku od 1964. do 1975. godine. U tom periodu uspostavljen je niz lokalnih i regionalnih mreža. Naročiti istorijski značaj imala je mreža od 45 globalno raspoređenih terestričkih stanica u kojoj su opažanja pravaca vršena od 1966. do 1970. godine kamerom BC4. Prosečno međustanično rastojanje iznosilo je između 3000 km i 4000 km. Pored postojećih satelita balona ECHO-1, ECHO-2 i GEOS-2, za potrebe kampanje lansiran je i poseban pasivni satelit balon PAGEOS. Na pojedinim stanicama merenja su trajala i više od godinu dana da bi bio prikupljen dovoljan broj podataka, što ilustruje teškoće da se obezbede povoljni uslovi za opažanja. Da bi se definisala razmera, sedam međustaničnih dužina izmereno je geodimetrom. Koordinate jedne stanice smatrane su poznatim u izravanju, što je rezultiralo tačnošću trodimenzionalnih položaja stanica od oko 4.5 m. U računanju je istovremeno ocenjena i srednja vrednost ekvatorskog poluprečnika Zemlje u iznosu od 6 378 130 m. Značaj BC4 mreže leži pre svega u činjenici da je po prvi put bilo moguće rešiti osnovni naučni problem geometrijske geodezije, odnosno realizovati takozvani globalni Brunsov poliedar.

Klasično fotografsko određivanje pravaca prestalo je da se koristi oko 1975. godine kada ga je zamenila mnogo preciznija metoda laserskog merenja rastojanja do satelita. Međutim, razvoj elektronike u poslednjoj deceniji dvadesetog veka revitalizovao je metodu merenja pravaca, s tom razlikom što se umesto klasičnih fotografskih ploča koriste CCD senzori. Pravougaona matrica fotoelektričnih elemenata standardnih CCD senzora sastoji se od 1000 x 1000 piksela, pri čemu su dimenzije jednog piksela obično manje od 10 μm . Algoritmima razvijenim u oblasti digitalne obrade slika moguće je oceniti centar lika zvezde ili satelita sa preciznošću boljom od 0.2 piksela, čemu odgovara uglovna rezolucija od oko 0.1". Prednosti CCD kamera u odnosu na klasične su brojne, i ogledaju se u većoj osetljivosti, kraćem vremenu opažanja, poboljšanoj tačnosti, slikovnim podacima u digitalnoj formi, potpunoj automatizaciji procesa merenja i dostupnosti novijih i tačnijih zvezdanih kataloga.

4.6 Satelitsko merenje dužina

Merenje dužina u satelitskoj geodeziji zasniva se na merenju vremena prostiranja elektromagnetnih signala duž puta između terestričke stanice i satelita. U zavisnosti od toga koji se deo elektromagnetnog spektra koristi, razlikuju se optički i radarski sistemi. Merenje optičkim sistemima zavisi od vremenskih prilika, pa se zbog potrebne snage i kvaliteta uglavnom koristi lasersko zračenje. Radarski sistemi, s druge strane, ne zavise od vremenskih uslova, ali zato na svojstva prostiranja signala značajno utiče atmosferska refrakcija. Kod ovih sistema obično se koriste centimetarske odnosno decimetarske talasne dužine.



Slika 4.9. Satelitsko merenje dužina.

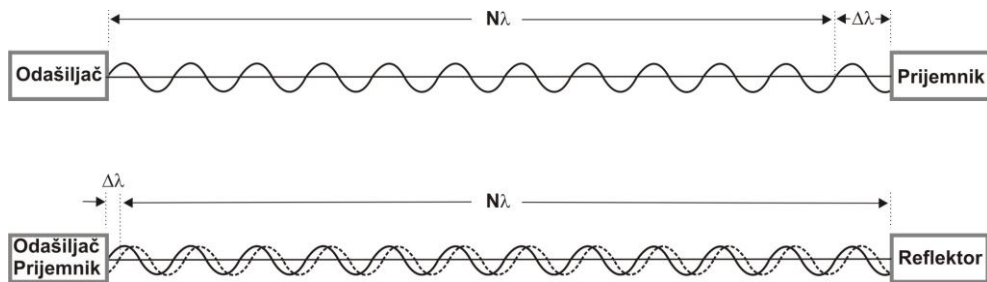
Ako izmereno vreme prostiranja signala od stanice A do satelita S_j iznosi Δt_{A_j} , tada se za osnovnu jednačinu izmerene dužine može napisati (slika 4.9):

$$|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_A| = |\mathbf{r}_{A_j}| = r_{A_j} = c\Delta t_{A_j}, \quad (4.47)$$

gde c označava brzinu prostiranja signala. Ovaj izraz opisuje jednosmerni režim određivanja dužina, kod koga se vreme puta meri sa dva sinhronizovana časovnika, od kojih se jedan nalazi na stanici a drugi na satelitu. Takav slučaj javlja se kod geodetskog korišćenja globalnih navigacionih satelitskih sistema (GNSS), kao što je NAVSTAR GPS. Kod dvosmernog određivanja dužina signal se po emitovanju odbija od reflektora na satelitu, a zatim ponovo registruje na stanici, i na taj način prevaljuje dvostruki put. Tipičan primer predstavlja metoda laserskog određivanja rastojanja do satelita (SLR). Merenje vremena prostiranja signala Δt_{A_jA} od stanice A do satelita S_j i ponovo do stanice A vrši se jednim časovnikom koji je u sklopu opreme na stanici. Traženo rastojanje određuje se kao:

$$|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_A| = |\mathbf{r}_{A_j}| = r_{A_j} = \frac{1}{2} c\Delta t_{A_jA}. \quad (4.48)$$

Kada merna veličinu predstavlja vreme prostiranja kratkog, jasno definisanog elektromagnetnog impulsa, kao što je to u izrazima (4.47) i (4.48), postupak merenja naziva se impulsnim. Kod faznih postupaka merenja, kao merna veličina koristi se faza kontinuirano emitovanog elektromagnetnog talasa. U jednosmernom režimu određivanja dužina, faza primljenog elektromagnetnog talasa upoređuje se sa fazom referentnog talasa koji se generiše u samom prijemniku, dok se kod dvosmernog režima rada faza emitovanog talasa upoređuje sa fazom tog istog



Slika 4.10. Princip faznog jednosmernog i dvosmernog merenja dužina.

talasa primljenog nakon odbijanja. U oba slučaja, izmerenoj faznoj razlici $\Delta\varphi$ odgovara samo deo talasne dužine nosećeg talasa $\Delta\lambda$, dok je celobrojni umnožak talasnih dužina $N\lambda$ u početku nepoznat (slika 4.10). Rastojanje se po analogiji dobija kao:

$$r_{Aj} = N\lambda + \Delta\lambda, \quad (4.49)$$

$$r_{Aj} = \frac{1}{2}(N\lambda + \Delta\lambda). \quad (4.50)$$

Ceo broj talasnih dužina N neophodno je naknadno odrediti da bi merena dužina bila definisana u punoj meri. U tu svrhu upotrebljavaju se različite metode kao što je merenje na više frekvencija, određivanje približne dužine sa tačnošću boljom od $\lambda/2$ ili korišćenje vremenski promenljivog geometrijskog rasporeda satelita.

Potreba za sinhronizovanim časovnicima kod jednosmernog režima rada zajednička je i za impulsni i za fazni metod merenja dužina. Realni časovnici, međutim, niti pokazuju tačno vreme, niti su međusobno usaglašeni. Veza između tačnog trenutka vremena t i pokazivanja časovnika T u istom tom trenutku obično se modelira u vidu:

$$t = T - \delta T, \quad (4.51)$$

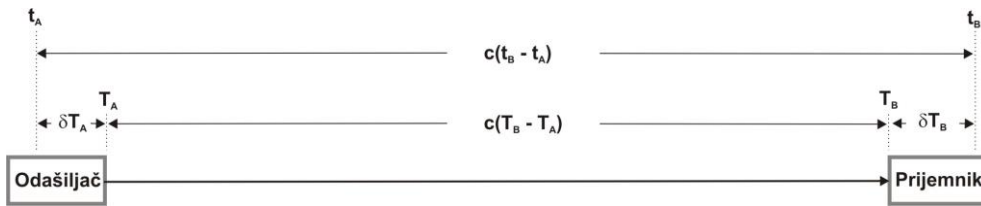
gde δT označava grešku časovnika.

Posledica nesinhronizacije časovnika ilustrovana je za primer jednosmernog impulsnog merenja na slici 4.11. U trenucima emitovanja i prijema impulsa, časovnici u odašiljaču i prijemniku pokazuju čitanja T_A i T_B . Ovim trenucima odgovaraju tačna vremena t_A i t_B na osnovu kojih bi tačna dužina iznosila:

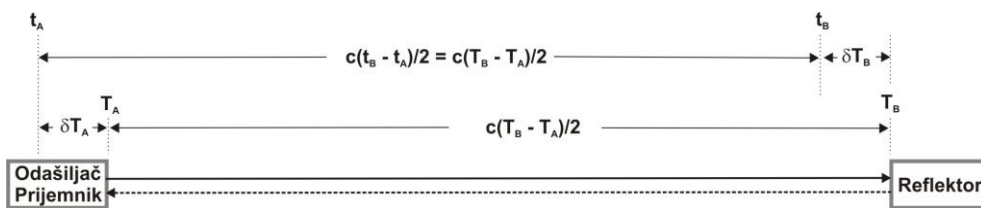
$$r_{AB} = c(t_B - t_A). \quad (4.52)$$

Međutim, imajući u vidu (4.51), umesto nje biće izmerena dužina:

$$R_{AB} = c(T_B - T_A) = c(t_B + \delta T_B - t_A - \delta T_A) = r_{AB} + c\delta T_B - c\delta T_A, \quad (4.53)$$



Slika 4.11. Nesinhronizacija časovnika kod impulsnog jednosmernog merenja dužina.



Slika 4.12. Nesinhronizacija časovnika kod impulsnog dvosmernog merenja dužina.

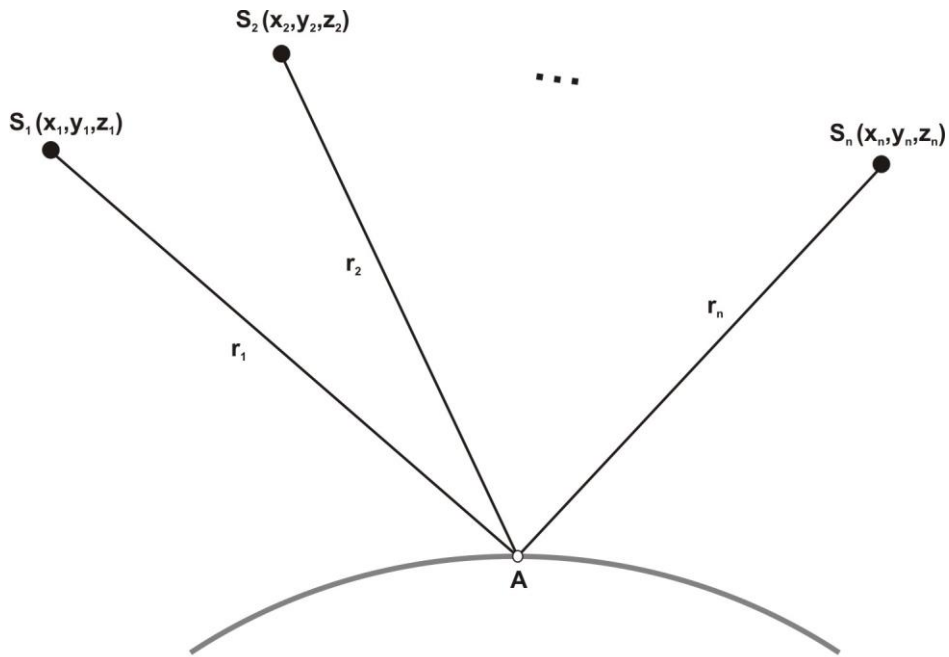
koja se od tačne razlikuje zbog uticaja grešaka časovnika. Zbog toga se merenje R_{AB} naziva pseudodužinom. Greška časovnika nema značaja kod dvosmernog merenja dužina jer isti časovnik registruje trenutak emitovanja i trenutak prijema signala tako da je $\delta T_A = \delta T_B$ (slika 4.12).

Impulsni i fazni postupak pokazuju razlike kada je u pitanju uticaj viših slojeva atmosfere na prostiranje signala. Impulsno merene dužine izvode se na osnovu grupe brzine prostiranja signala v_{gr} , koja je u disperzivnoj sredini kao što je jonosfera uvek manja od fazne brzine v_{ph} na osnovu koje se izvode fazno merene dužine.

Dužine merene do satelita koriste se za pozicioniranje tačaka na fizičkoj površi Zemlje metodom trilateracije, odnosno prostornog lučnog preseka. Geometrijski posmatrano, tačka čije se koordinate određuju nalazi se u preseku barem tri sfere čiji su poluprečnici jednaki izmerenim dužinama. Ako se sa tačke A na površi Zemlje (slika 4.13) simultano izmere dužine r_i u dvosmernom režimu rada do najmanje tri satelita S_i , trilateracija se svodi na rešavanje jednačina:

$$r_i = \sqrt{(x_A - x^{(i)})^2 + (y_A - y^{(i)})^2 + (z_A - z^{(i)})^2} \quad (4.54)$$

po nepoznatim koordinatama (x_A, y_A, z_A) tačke A , pri čemu su gornjim indeksom $i = 1, 2, 3$ označene poznate koordinate satelita. U slučaju jednosmernog režima rada, radiće se o pseudodužinama koje se moraju izmeriti do najmanje četiri satelita sa poznatim koordinatama, jer se pojavljuje još i nepoznata greška sinhronizacije časovnika prijemnika δ u odnosu na vremensku skalu koju realizuju časovnici u satelitima. Prošireni matematički model tada glasi:



Slika 4.13. Princip pozicioniranja merenim dužinama uz poznate položaje satelita.

$$R_i = \sqrt{(x_A - x^{(i)})^2 + (y_A - y^{(i)})^2 + (z_A - z^{(i)})^2} + c\delta = r_i + u, \quad (4.55)$$

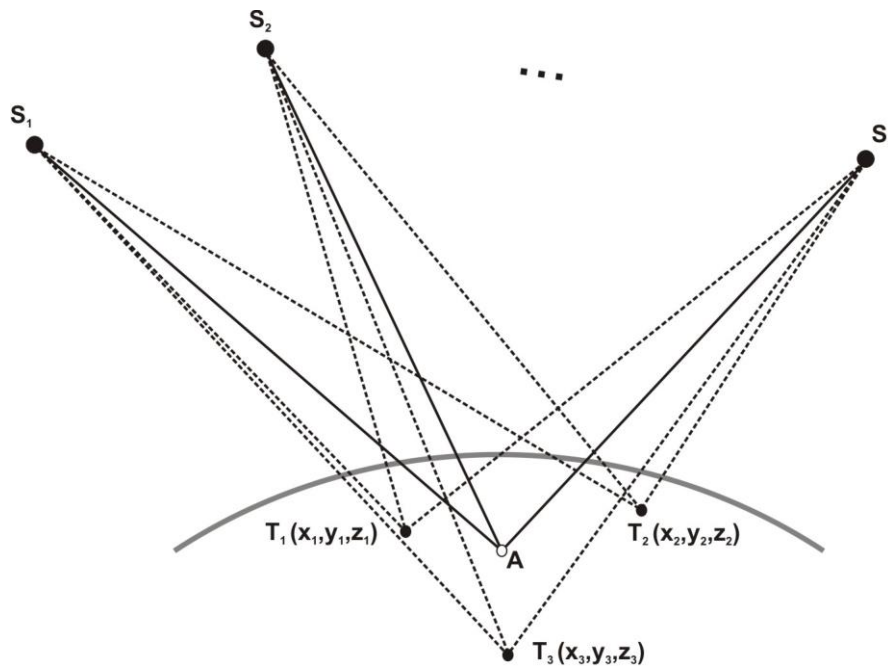
pri čemu je u greška sinhronizacije formulisana u vidu linearne veličine.

Princip pozicioniranja je gotovo identičan i kada se određivanje dužina vrši prema satelitima čiji položaji nisu poznati u trenutku merenja. Osnovni koncept ilustrovan je na slici 4.14. U tom slučaju neophodna su simultana opažanja sa tri stanice T_j čije su koordinate poznate, zajedno sa opažanjima sa tačke A čije se koordinate određuju, prema najmanje tri različita satelita S_i . Na taj način se principijelno mogu u prvom koraku sračunati koordinate svakog satelita pomoću dužina izmerenih sa poznatih tačaka:

$$r_j^i = \sqrt{(x_j - x^{(i)})^2 + (y_j - y^{(i)})^2 + (z_j - z^{(i)})^2} \quad (j=1, 2, 3) \quad (4.56)$$

a zatim u drugom koraku pomoću sračunatih koordinata i izmerenih dužina i koordinate same tačke A :

$$r_A^i = \sqrt{(x_A - x^{(i)})^2 + (y_A - y^{(i)})^2 + (z_A - z^{(i)})^2} \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.57)$$



Slika 4.14. Princip pozicioniranja merenim dužinama uz nepoznate položaje satelita.

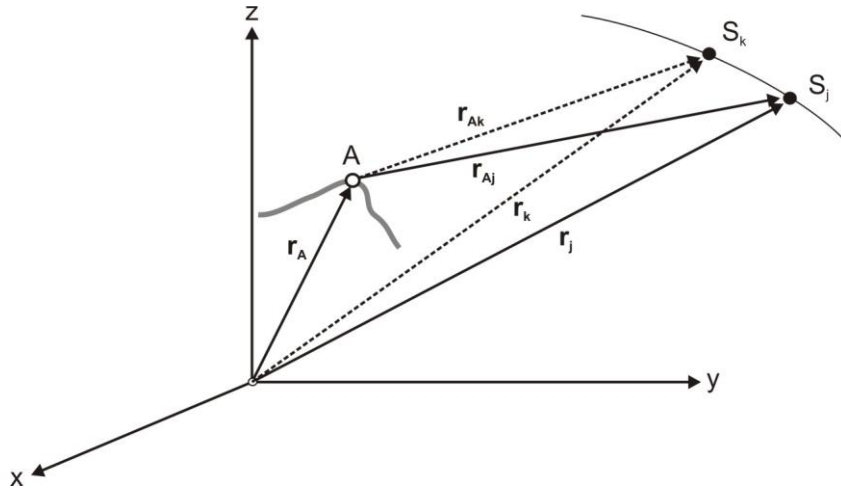
Ovakva procedura rutinski je korišćena kod SECOR sistema, a može se realizovati i laserskim merenjem dužina (SLR) pod povoljnim vremenskim uslovima. Iz razloga tačnosti i pouzdanosti, u praksi se obično koristi broj stanica i satelita veći od neophodnog. Za ocenjivanje koordinata nepoznatih tačaka primenjuje se tada metod najmanjih kvadrata.

4.7 Merenje promena dužina

Promene dužina veoma često predstavljaju veličine koje se posredno ili neposredno koriste u satelitskoj geodeziji. Kao što to ilustruje slika 4.15, promena dužine označava razliku dužina od stanice A do dva uzastopna položaja istog satelita duž njegove orbite, S_j i S_k . Koristeći oznake sa slike, za jednačinu opažanja koja povezuje izmerenu promenu dužine sa vektorima položaja stanice i satelita može se napisati:

$$r_{Aj/k} = |\mathbf{r}_{Ak}| - |\mathbf{r}_{Aj}| = |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_A| - |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_A| = r_{Ak} - r_{Aj}. \quad (4.58)$$

Razlika dužina izvodi se iz frekvencijskog pomaka, koji nastaje zbog promene rastojanja između opažača na stanici i satelita. Ako satelit emituje elektromagnetni



Slika 4.15. Satelitsko merenje promena dužina.

signal stabilne frekvencije f_s , tada će prijemnik na stanici umesto nje registrovati vremenski promenljivu frekvenciju $f_r(t)$ nastalu kao rezultat Doplerovog efekta, tako da frekvencijski pomak iznosi:

$$f_r(t) - f_s = \frac{f_s}{c} \frac{ds}{dt}, \quad (4.59)$$

gde c označava brzinu signala, a ds/dt brzinu promene rastojanja. Ovaj izraz formalno povezuje frekvencijski pomak i promenu dužine ds tokom kratkog vremenskog perioda dt .

Frekvencijski pomak nije direktno merna veličina jer se ne može meriti trenutna frekvencija. Umesto toga, operativno se određuje takozvani integralni Doplerov broj N_{jk} u intervalu vremena između dva trenutka T_j i T_k :

$$N_{jk} = \int_{T_j}^{T_k} (f_g - f_r) dT, \quad (4.60)$$

koji očigledno predstavlja broj ciklusa razlike između stabilne frekvencije f_g koju generiše sam prijemnik i Doplerski pomerene frekvencije f_r primljene sa satelita. Pošto su trenuci prijema signala T_j i T_k povezani sa trenucima emitovanja t_j i t_k izrazima:

$$T_j = t_j + r_{Aj} / c, \quad T_k = t_k + r_{Ak} / c, \quad (4.61)$$

za integralni Doplerov broj dobija se:

$$N_{jk} = \int_{t_j + r_{Aj}/c}^{t_k + r_{Ak}/c} (f_g - f_r) dT, \quad (4.62)$$

odakle se vidi da se veza između merenog N_{jk} i razlike dužina ostvaruje preko granica integracije.

Princip pozicioniranja pomoću izmerenih integralnih Doplerovih brojeva može se lako pokazati ako se ima u vidu činjenica da je broj ciklusa emitovanih sa satelita u intervalu vremena (t_j, t_k) jednak broju ciklusa primljenih u prijemniku u intervalu vremena (T_j, T_k) :

$$\int_{t_j}^{t_k} f_s dt = \int_{t_j + r_{Aj}/c}^{t_k + r_{Ak}/c} f_r dt, \quad (4.63)$$

gde je sa f_s označena stabilna frekvencija na kojoj satelit emituje signal. Odavde sledi:

$$N_{jk} = (f_g - f_s)(t_k - t_j) + \frac{f_g}{c}(r_{Ak} - r_{Aj}). \quad (4.64)$$

Razvijeni oblik:

$$\begin{aligned} N_{jk} = & \frac{f_g}{c} \sqrt{(x_A - x^{(k)})^2 + (y_A - y^{(k)})^2 + (z_A - z^{(k)})^2} \\ & - \frac{f_g}{c} \sqrt{(x_A - x^{(j)})^2 + (y_A - y^{(j)})^2 + (z_A - z^{(j)})^2} \\ & + (f_g - f_s)(t_k - t_j) \end{aligned} \quad (4.65)$$

pokazuje da je na taj način ostvarena veza između opažanja N_{jk} i četiri nepoznate veličine koje čine koordinate (x_A, y_A, z_A) stanice A i razlika frekvencija $(f_g - f_s)$, pri čemu se podrazumeva da su koordinate satelita u trenucima t_j i t_k poznate. To znači da je za jednoznačno rešenje po nepoznatim neophodno izmeriti četiri Doplerova broja.

Izraz (4.65) ima i svoju geometrijsku interpretaciju. Jednačina ovog tipa opisuje hiperboloidnu površ u trodimenzionalnom prostoru. Nepoznata tačka nalaziće se u preseku više ovakvih površi, gde svaku od njih definiše po jedan Doplerov broj. Iz geometrijskih razmatranja sledi, međutim, da se jednim satelitskim prolazom rešava samo horizontalni položaj nepoznate tačke. Za određivanje njenog kompletnog trodimenzionalnog položaja neophodno je više satelitskih prolaza.

Opažanja Doplerovog efekta imaju čestu i veliku geodetsku primenu. Orbitalni elementi prvih veštačkih Zemljinih satelita bili su određivani upravo merenjem Doplerovog pomaka primljenih satelitskih signala. Izvanredno uspešan primer

tehnologije zasnovane na Doplerovom efektu bio je svojevremeno satelitski sistem TRANSIT američke mornarice. Od savremenih potpuno funkcionalnih sistema danas je to francuski sistem DORIS. Doplerov efekat se inače može koristiti i za određivanje brzine promene rastojanja između satelita. Ova tehnika se naziva satelitskim praćenjem satelita (SST), ali ne služi za pozicioniranje već pre svega za određivanje gravitacionog polja Zemlje sa visokom rezolucijom.

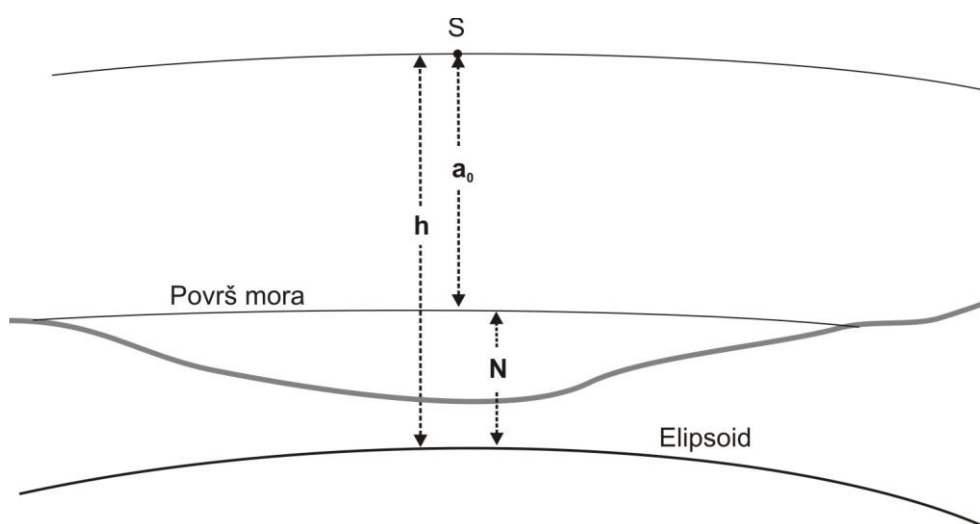
4.8 Altimetrijska merenja

Satelitska altimetrija predstavlja jednu posebnu formu dvosmernog režima merenja dužina u kojoj se koristi radarsko elektromagnetno zračenje. Kod ove metode, satelitski uređaj pod nazivom altimetar emituje kratke radarske impulse vertikalno naniže. Nakon odbijanja od morske i okeanske površi radarski impulsi se ponovo primaju u altimetru, tako da se na uobičajeni način iz poluvremena puta može izvesti altimetrijsko merenje a_0 (slika 4.16):

$$a_0 = \frac{1}{2} c \Delta t . \quad (4.66)$$

Rezultat opažanja a_0 sam za sebe nema posebnu vrednost. Ali, ako je poznata satelitska orbita, a samim tim i njegoa visina h iznad izabranog Zemljinog elipsoida u trenutku merenja, lako se dobija veličina N :

$$N = h - a_0 , \quad (4.67)$$



Slika 4.16. Altimetrijska radarska merenja.

koja predstavlja rastojanje između elipsoida i nivoa mora, odnosno u prvom približenju undulaciju geoida. Prema tome, osnovna geodetska svrha satelitske altimetrije sastoji se u određivanju geoida na ogromnim područjima koja pokrivaju svetska mora i okeani.

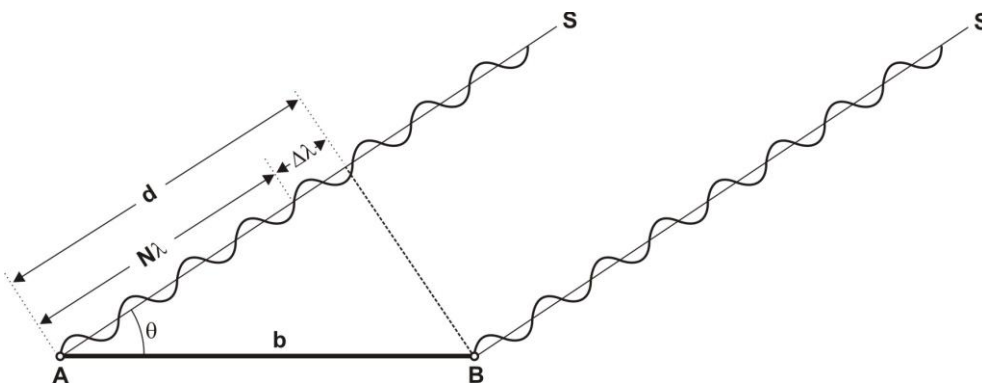
Izraz (4.67) je ipak samo pojednostavljena predstava realnosti. Pre svega, veličina N odnosi se na rastojanje između elipsoida i trenutnog a ne srednjeg nivoa mora. S druge strane, srednji nivo samo približno predstavlja geoid jer se od njega razlikuje za takozvanu topografiju morske površi. Iako deluje kao poremećaj pri geodetskom određivanju geoida, topografija morske površi koristi se kao izvanredno važan signal u okeanografiji i geofizici jer nastaje kao posledica procesa u okeanima i geodinamičke aktivnosti Zemljine kore. Osim toga, izraz (4.67) je potrebno proširiti članovima kojima se uzima u obzir uticaj atmosfere i greška satelitske orbite.

Satelitska altimetrija je najranija operativna satelitska tehnika koja je realizovala merni koncept kosmos – Zemlja. Prvi sateliti koji su na svojim platformama imali radarske altimetre bili su GEOS-3 i SEASAT-1. Kasnije lansirani altimetrijski sateliti GEOSAT, ERS-1, ERS-2, TOPEX/POSEIDON, GFO, JASON i ENVISAT dali su nemerljiv doprinos geodeziji, okeanografiji i geofizici. U poslednje vreme eksperimentiše se sa altimetrijskim satelitima kao što je ICESAT koji bi umesto radarskim bili opremljeni laserskim sistemima.

4.9 Interferometrijska merenja

Osnovni princip interferometrijskih merenja ilustrovan je na slici 4.17. Antene A i B koje definišu bazu dužine b primaju kontinualni signal koji se emituje sa satelita. Ako se pretpostavi da je rastojanje do satelita dovoljno veliko u poređenju sa bazom, može se smatrati da su pravci do antena međusobno paralelni i da sa bazom zaklapaju ugao θ .

Imajući u vidu da zbog geometrijske konstelacije postoji razlika d u putevima



Slika 4.17. Interferometrijska merenja.

signala do jedne i druge antene, u njima se može izmeriti fazna razlika $\Delta\varphi$. Kao što je to slučaj kod svih faznih merenja, fazna razlika jedinstveno je definisana samo u okviru dela talasne dužine emitovanog signala $\Delta\lambda$, dok ceo broj talasnih dužina $N\lambda$ u početku ostaje nepoznat ali se mora odrediti da bi izmerena fazna razlika $\Delta\varphi$ mogla da se transformiše u razliku puteva d . Prema tome, osnovna jednačina interferometrijskih opažanja glasi:

$$d = b \cos \theta = \Delta\lambda + N\lambda = \left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi} + N \right) \lambda . \quad (4.68)$$

Ovaj izraz povezuje nekoliko veličina, tako da se interferometrijski princip može ravnopravno koristiti za određivanje:

- dužine baze između antena b ,
- razlike puteva signala do antena d , ili,
- ugla između baze i pravca ka satelitu θ .

U svakom od ovih slučajeva neophodno je rešavanje fazne neodređenosti N što se postiže posebnom konfiguracijom mernih antena, merenjem na više frekvencija ili dobro definisanom strategijom opažanja.

Iako osnovni princip interferometrijskih merenja uvek ostaje isti, u pojedinim situacijama potrebno je dodatno modifikovati praktičnu implementaciju merne metode:

a) Kada rastojanje između antena postane suviše veliko one više ne mogu biti fizički povezane kablom. Pošto antene postaju međusobno nezavisne, merenje fazne razlike mora biti podržano preciznim i stabilnim oscilatorima odnosno atomskim frekvencijskim standardima. Takav slučaj sreće se, na primer, kod dugobazisne radiointerferometrije (VLBI) kod koje rastojanje između antena može iznositi i više hiljada kilometara.

b) U slučaju da se VLBI tehnikom opažaju prirodni izvori zračenja kao što su kvazari, interferometrijski metod više ne podrazumeva merenje fazne razlike već upotrebu tehnike korelacije. Razlog za to je što zračenje kvazara više podseća na šum kod koga se ne može ni definisati talasna dužina. Korelaciona tehnika primenjuje se tako što se signali sa kvazara primaju u obe antene pri čemu je neophodno da se precizno registruje vreme, da bi se nakon toga te dve vremenske serije signala međusobno korelirale pomeranjem jedne u odnosu na drugu sve dok se ne dobije maksimalni koeficijent korelacije. Tada se može smatrati da su serije poklopljene, a ukupni vremenski pomak potreban da se to postigne jednak je vremenu kašnjenja τ jednog signala u odnosu na drugi. Transformacija u razliku puteva do antena d lako se onda izvodi pomoću:

$$d = b \cos \theta = c \cdot \tau . \quad (4.69)$$

c) Kada se VLBI tehnikom opažaju signali sa veštačkih Zemljinih satelita više se ne može smatrati da je izvor zračenja beskonačno udaljen. To znači da pravci od antena do satelita nisu paralelni, tako da se u korišćenju interferometrijske metode mora obračunati geometrijska korekcija kojom se se uzima u obzir zakrivljenost talasnog fronta. Takav slučaj sreće se kod geodetske upotrebe satelitskog sistema NAVSTAR GPS. Faze nosećeg signala na krajnjim GPS antenama međusobno se upoređuju tako što se formiraju takozvane proste fazne razlike. One predstavljaju osnovne veličine prilikom dalje matematičke obrade GPS opažanja.

Poglavlje 5
Ocenjivanje parametara
u satelitskoj geodeziji

5.1 Metod najmanjih kvadrata

Fundamentalna vektorska jednačina satelitske geodezije:

$$\mathbf{r}_S(t) = \mathbf{r}_P(t) + \mathbf{r}_{PS}(t) \quad (5.1)$$

može se rešiti ako se uspostavi veza između satelitskih merenja predstavljenih vektorom $\mathbf{r}_{PS}(t)$ i nepoznatih parametara koji se odnose na vektore položaja stanice i satelita, $\mathbf{r}_P(t)$ i $\mathbf{r}_S(t)$. U opštem slučaju, nepoznati parametri, čije je vrednosti potrebno oceniti, spadaju u neku od sledećih kategorija:

- *Parametri koji opisuju geocentrično kretanje stanice P.* Najvažniji parametri ove grupe su geocentrične koordinate stanice. Osim toga, tu spadaju i geodinamički parametri koji opisuju veze između terestričkog i inercijalnog referentnog sistema, kao što su kretanje pola i parametri rotacije Zemlje, i geodinamički parametri koji se koriste za modeliranje plimatskog disanja Zemlje i tektonskih deformacija.
- *Parametri koji opisuju kretanje satelita S.* Pored satelitskih koordinata, u ovu grupu spadaju harmonijski koeficijenti Zemljinog gravitacionog polja, i parametri koji opisuju gravitacione i negravitacione perturbacije satelitskih orbita kao što je pritisak Sunčevog zračenja.
- *Parametri koji direktno utiču na opažanja.* To su na primer atmosferski parametri, parametri časovnika ili kašnjenja signala.

Pored toga, struktura fundamentalne jednačine retko kada je linearna, tako da je njeno rešenje često moguće jedino kada se funkcionalne veze merenja i nepoznatih linearizuju.

Ocenjivanje funkcionalnih parametara u linearnim ili linearizovanim modelima satelitske geodezije vrši se po pravilu metodom najmanjih kvadrata (MNK). Matematički model koji je u najčešćoj upotrebi je Gaus-Markovljev model potpunog ranga:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{C}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}, \quad (5.3)$$

gde je:

$\hat{\mathbf{l}}$...	vektor ocena merenja,
\mathbf{l}	...	vektor izvršenih merenja,
\mathbf{v}	...	vektor popravaka,
\mathbf{A}	...	konfiguraciona matrica,
$\hat{\mathbf{x}}$...	vektor ocena parametara,

- \mathbf{C}_1 ... kovarijaciona matrica merenja,
- σ_0 ... standard jedinice težine,
- \mathbf{Q}_1 ... matrica kofaktora merenja,
- \mathbf{P} ... matrica težina merenja.

Prisustvo vektora popravaka u funkcionalnom delu modela obezbeđuje konzistentnost sistema jer je prostor ranga merenja R^n , a ranga parametara R^u . Ukoliko je konfiguraciona matrica nepotpunog ranga kolona, model se proširuje uslovima kojima se otklanja defekt ranga, ili se vektor parametara projektuje u podprostor u kojem je ocenljiv. Metod najmanjih kvadrata podrazumeva ona rešenja konzistentnog, ali neodređenog sistema, koja minimalizuju kvadratnu formu:

$$\Omega(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\sigma_0^2} (\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}). \quad (5.4)$$

Iz uslova minimuma sledi sistem normalnih jednačina:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{I}. \quad (5.5)$$

Definicijom ortogonalnih projektora:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{R}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{R}, \quad (5.7)$$

i rešavanjem normalnih jednačina, dobijaju se sledeći rezultati ocenjivanja:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{I}, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1}, \quad (5.9)$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R} \mathbf{I}, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{I}}} = \mathbf{A} \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T = \mathbf{R} \mathbf{C}_1 \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{R}^T, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{I}} - \mathbf{I} = -\mathbf{R}^\perp \mathbf{I}, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{v}} = \mathbf{C}_1 - \mathbf{A} \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T = \mathbf{R}^\perp \mathbf{C}_1 (\mathbf{R}^\perp)^T = \mathbf{R}^\perp \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1 (\mathbf{R}^\perp)^T, \quad (5.13)$$

$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} - \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T, \quad (5.15)$$

$$f = n - u = n - r(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{F}), \quad (5.16)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\Omega}{f}. \quad (5.17)$$

Ocena vektora parametara je najbolja linearna nepomerena ocena u teoriji aproksimacija. Za slučaj normalno raspoređenih merenja, isti rezultat bi se dobio primenom metode maksimalne verodostojnosti. Međutim, nepomenost ocene standarda jedinice težine obezbeđuje jedino metod najmanjih kvadrata.

Postupak MNK ocenjivanja ima i geometrijsku interpretaciju. U podprostoru R'' kojeg definišu vektori kolone konfiguracione matrice \mathbf{A} , vektor ocena $\hat{\mathbf{x}}$ određuje se tako da $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ bude ortogonalna projekcija vektora merenja \mathbf{I} na taj podprostor:

$$\mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}. \quad (5.18)$$

Ova projekcija deli vektor merenja na dva dela:

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{I} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{v}, \quad (5.19)$$

odakle slede svojstva:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (5.20)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{R}^\perp \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (5.22)$$

Ocenjivanje po metodi najmanjih kvadrata ima više praktičnih aspekata koji se koriste u numeričkoj primeni, kao što su eliminacija parametara i superpozicija normalnih jednačina. Suština ovih postupaka je redukcija dimenzija normalnih jednačina i mogućnost sekvencijalnog, ili rekurzivnog ocenjivanja parametara.

5.2 Praktični aspekti metode najmanjih kvadrata

Eliminacija parametara. Prethodna eliminacija parametara je postupak redukcije dimenzija originalnog sistema normalnih jednačina bez gubitka informacija. Ako se vektor parametara razdvoji na dva vektora $\hat{\mathbf{x}}_1$ i $\hat{\mathbf{x}}_2$, normalne jednačine mogu da se prikažu u obliku:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Kao rezultat eliminacije vektora parametara $\hat{\mathbf{x}}_2$ dobija se redukovani sistem normalnih jednačina:

$$\left(\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{N}_{21} \right) \hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{n}_1 - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2, \quad (5.24)$$

ili, označeno skraćeno:

$$\tilde{\mathbf{N}}_{11} \hat{\mathbf{x}}_1 = \tilde{\mathbf{n}}_1. \quad (5.25)$$

Kvadratna forma koja odgovara originalnom sistemu normalnih jednačina računa se po izrazu:

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^T & \mathbf{n}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{n}_1^T \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{22}^{-1} (\mathbf{n}_2 - \mathbf{N}_{21} \hat{\mathbf{x}}_1) \quad , \\ &= \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}_1^T (\mathbf{n}_1 - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2) - \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2 \\ &= \tilde{\Omega} - \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

odakle sledi da je kvadratnu formu koja se odnosi na redukovani sistem normalnih jednačina potrebno korigovati članom $-\mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2$ da bi udeo koji potiče od eliminisanih parametara bio uzet u obzir. Kovarijaciona matrica vektora ocena $\hat{\mathbf{x}}_1$ računa se na uobičajeni način:

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \left(\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{N}_{21} \right)^{-1}. \quad (5.27)$$

Za razliku od eliminacije u normalnim jednačinama, eliminacija parametara iz kovarijacione matrice originalnog vektora ocena $\hat{\mathbf{x}}$ predstavlja trivijalni postupak, i sastoji se u odbacivanju vrsta i kolona koje se odnose na eliminisane parametre. Kvadratna forma tom prilikom ostaje nepromenjena jer je njenim računanjem uticaj eliminisanih parametara već obuhvaćen.

Eliminacija parametara relativno je čest postupak u obradi satelitskih merenja. Kada to zahteva priroda problema, može se desiti da modeliranje podrazumeva veliki broj pomoćnih nepoznatih parametara čije ocene nisu od interesa ali se moraju uzeti u obzir jer bi u protivnom funkcionalni model bio neadekvatan. Takav slučaj predstavljaju parametri modela kojima se opisuju stanja časovnika

prijemnika i satelita, troposferski i jonosferski uticaji, kao i satelitske putanje, a koji se uz to još moraju često formulirati u svakoj epohi merenja.

Sekvencijalno MNK ocenjivanje. MNK ocenjivanje uz upotrebu svih izvršenih merenja identično je razdvajanju postupka ocenjivanja na više delova i kombinovanju pojedinačnih rešenja u konačan rezultat. Ovakvo sekvencijalno ocenjivanje poznato je u geodeziji od vremena Helmerta, a danas se koristi pre svega u situacijama sa velikim brojem podataka, kao što je to uglavnom slučaj u obradi satelitskih merenja.

Matematički model, normalne jednačine i ocene parametara u pojedinim od ukupno m koraka sekvencijalnog ocenjivanja imaju respektivno opšti oblik:

$$\mathbf{l}_i + \mathbf{v}_i = \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (5.28)$$

$$\mathbf{C}_i = \sigma_{0i}^2 \mathbf{P}_i^{-1}, \quad (5.29)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{l}_i, \quad (5.30)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{l}_i, \quad (5.31)$$

$$\mathbf{C}_{x,i} = (\mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{A}_i)^{-1}. \quad (5.32)$$

Ako se pojedinačni vektori ocena shvate kao pseudomerenja, koja su uz to još i međusobno nezavisna, kombinovani matematički model može da se formuliše na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{x}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{x,1} \\ \dots \\ \hat{\mathbf{v}}_{x,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \dots \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{x,1} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{x,m} \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Normalne jednačine koje odgovaraju ovako formulisanom matematičkom modelu imaće oblik:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \dots & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{x,1}^{-1} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{x,m}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \dots \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \dots & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{x,1}^{-1} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{x,m}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{x}}_m \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

odnosno, s obzirom na definiciju pojedinih kovarijacionih matrica:

$$\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{A}_i \right) \hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{l}_i . \quad (5.35)$$

Prema tome, normalne jednačine kombinovanog sistema jednostavno se dobijaju superpozicijom normalnih jednačina pojedinih sistema sekvencijalnog postupka. Superpozicija normalnih jednačina uvek se može sprovesti kada su pojedinačne grupe merenja međusobno nezavisne, odnosno kada kombinovana kovarijaciona matrica ima dijagonalnu strukturu.

Osim uslova linearne nezavisnosti, neophodno je da se normalne jednačine zasnivaju na jedinstvenim približnim vrednostima nepoznatih parametara. Ukoliko su u nekom od koraka sekvencijalnog postupka za linearizaciju korišćene druge približne vrednosti, odgovarajuće normalne jednačine moraju se transformisati. Različite približne vrednosti imaju za posledicu da normalne jednačine odgovaraju različitim ocenama parametara $\hat{\mathbf{x}}$ i $\tilde{\mathbf{x}}$. Međutim, njihov odnos se uvek može napisati u vidu linearne veze:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{x}} + d\mathbf{x} , \quad (5.36)$$

iz koje slede transformisane normalne jednačine i kvadratna forma:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} d\mathbf{x}) , \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}^T \mathbf{C}_1^{-1} \tilde{\mathbf{I}} &= (\mathbf{l} - \mathbf{A} d\mathbf{x})^T \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} d\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{l}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{l} - 2\mathbf{n}^T d\mathbf{x} + d\mathbf{x}^T \mathbf{N} d\mathbf{x} . \end{aligned} \quad (5.38)$$

Uz poznate normalne jednačine i kvadratnu formu za svaki korak sekvencijalnog postupka, kombinovano rešenje za sumu kvadrata popravaka i ocenu disperzionog koeficijenta dobija se respektivno po izrazima:

$$\Omega = \sum_{i=1}^m \mathbf{l}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{l}_i - \sum_{i=1}^m \mathbf{l}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}} , \quad (5.39)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega}{\sum_{i=1}^m f_i} , \quad (5.40)$$

pri čemu su f_i pojedinačni stepeni slobode.

Rekurzivno MNK ocenjivanje. Rekurzivni postupak se primenjuje u slučaju kada postoje kombinovana rešenja sekvencijalnog postupka, a na raspolaganju je nova grupa merenja. Za razliku od sekvencijalnog ocenjivanja koje se zasniva na normalnim jednačinama, u rekurzivnom postupku koriste se kovarijacione matrice.

Ako se kombinovani rezultati sekvencijalnog ocenjivanja sa ukupno $m - 1$ grupa merenja označe respektivno sa $\hat{\mathbf{x}}_{m-1}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{x},m-1}$ i Ω_{m-1} , pri čemu je:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x},m-1} = \left(\mathbf{A}_{m-1}^T \mathbf{C}_{m-1}^{-1} \mathbf{A}_{m-1} \right)^{-1}, \quad (5.41)$$

tada je uključenjem nove grupe merenja moguće sve ove rezultate rekurzivno odrediti po sledećim izrazima:

$$\hat{\mathbf{x}}_m = \hat{\mathbf{x}}_{m-1} + \Delta \mathbf{x}_m = \hat{\mathbf{x}}_{m-1} + \mathbf{F}_m \bar{\mathbf{v}}_m, \quad (5.42)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x},m} = \mathbf{C}_{\mathbf{x},m-1} - \Delta \mathbf{C}_{\mathbf{x},m} = \mathbf{C}_{\mathbf{x},m-1} - \mathbf{F}_m \mathbf{A}_m \mathbf{C}_{\mathbf{x},m-1}, \quad (5.43)$$

$$\Omega_m = \Omega_{m-1} + \Delta \Omega_m = \Omega_{m-1} + \bar{\mathbf{v}}_m^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{v}}_m. \quad (5.44)$$

gde je:

$$\bar{\mathbf{v}}_m = \mathbf{I}_m - \mathbf{A}_m \hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{C}_{\mathbf{x},m-1} \mathbf{A}_m^T \bar{\mathbf{P}}, \quad (5.46)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \left(\mathbf{C}_m + \mathbf{A}_m \mathbf{C}_{\mathbf{x},m-1} \mathbf{A}_m^T \right)^{-1}. \quad (5.47)$$

Rekurzivni postupak naročito je pogodan za slučaj inoviranja sa malim brojem novih merenja. U slučaju jednog novog merenja algoritam je gotovo trivijalan, jer operaciju invertovanja zamenjuje jednostavno deljenje. Kada je u iteracionom koraku prisutan veliki broj novih merenja, sekvencijalni postupak je jednostavniji za upotrebu.

Interesantno je da su rekurzivne formule ekvivalentne fazi ocenjivanja kod Kalmanovih filtera, pri čemu se matrica \mathbf{F} može poistovetiti sa Kalmanovom matricom. Razlika se sastoji u tome što Kalmanov filter koristi dodatne informacije o dinamici sistema i sistemskom šumu pomoću kojih vrši prognozu stanja sistema. Zbog toga su rekurzivne formule identične Kalmanovom filteru samo u specijalnom slučaju kada parametri nisu vremenski promenljivi i kada je sistemski šum zanemarljivo mali.

5.3 Diskretni Kalmanov filter

Za razliku od rekurzivnog postupka, Kalmanov filter predstavlja algoritam koji omogućuje optimalno ocenjivanje vremenski promenljivih parametara linearnog dinamičkog sistema. Kalmanov filter naročito je pogodan za obradu satelitskih merenja, jer se stanične koordinate i brzine, fazne neodređenosti, atmosferski

uticaji ili stanja časovnika uvek mogu posmatrati kao parametri koji se menjaju u funkciji vremena.

Preduslov za primenu Kalmanovog filtera je da se promene parametara tokom vremena mogu opisati sledećim osnovnim jednačinama kontinualnog modela:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t), \quad (5.48)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (5.49)$$

gde je:

- $\mathbf{x}(t)$... vektor stanja sistema,
- $\mathbf{F}(t)$... dinamička matrica,
- $\mathbf{G}(t)$... poremećajna konfiguraciona matrica,
- $\mathbf{w}(t)$... poremećajna funkcija (sistemski šum),
- $\mathbf{z}(t)$... vektor opažanja,
- $\mathbf{H}(t)$... konfiguraciona matrica opažanja,
- $\mathbf{v}(t)$... merni šum,

i pri čemu $\mathbf{w}(t)$ i $\mathbf{v}(t)$ predstavljaju slučajne procese koji se mogu smatrati Gausovskim belim šumom sa funkcijama gustina moći $Q(t)$ i $R(t)$, odnosno odgovarajućim kovarijacionim funkcijama $\mathbf{Q}(t)$ i $\mathbf{R}(t)$:

$$\mathbf{w}(t) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}(t)), \quad (5.50)$$

$$\mathbf{v}(t) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}(t)). \quad (5.51)$$

Za očekivane vrednosti pojedinih veličina važe sledeći izrazi:

$$E[\mathbf{w}(t)] = E[\mathbf{v}(t)] = \mathbf{0}, \quad (5.52)$$

$$E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = Q(t)\delta(t - \tau), \quad (5.53)$$

$$E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)] = R(t)\delta(t - \tau), \quad (5.54)$$

$$E[\mathbf{w}(t)\mathbf{v}^T(\tau)] = \mathbf{0}, \quad (5.55)$$

sa Dirakovom δ -funkcijom koja se definiše kao:

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 0 & (t-\tau \neq 0) \\ \infty & (t-\tau = 0) \end{cases}. \quad (5.56)$$

Vektorska diferencijalna jednačina prvog reda iz kontinualnog modela u potpunosti opisuje jedan linearni dinamički sistem sa stohastičkim ulaznim veličinama. To znači da je moguće odrediti vektor stanja sistema u proizvoljnom trenutku vremena t , ako je stanje poznato u nekom prošlom trenutku t_0 , i ako su uz to poznate i ulazne veličine sistema. Rešenje vektorske diferencijalne jednačine je oblika:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}(t, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau, \quad (5.57)$$

sa matricom prelaza (tranzicionom matricom) $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ koja ima sledeća svojstva:

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t, t_0) = \mathbf{F}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0), \quad (5.58)$$

$$\mathbf{\Phi}(t, t) = \mathbf{I}, \quad (5.59)$$

$$\mathbf{\Phi}(t_2, t_1)\mathbf{\Phi}(t_1, t_0) = \mathbf{\Phi}(t_2, t_0), \quad (5.60)$$

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t_1, t_0) = \mathbf{\Phi}(t_0, t_1). \quad (5.61)$$

Određivanje elemenata tranzicione matrice vrši se na osnovu dinamičke matrice. Kada je proces stacionaran, dinamička matrica ne zavisi od vremena, i u tom slučaju se tranziciona matrica dobija po izrazu:

$$\mathbf{\Phi}(\Delta t) = e^{\mathbf{F}\Delta t} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{F}^i \frac{\Delta t^i}{i!}. \quad (5.62)$$

Poznavanje ulaznih veličina i dinamičke matrice uvek je u praksi ograničeno. Stoga se za potrebe kontrole i poboljšanja prognoze stanja vrše merenja, ali po pravilu u diskretnim trenucima vremena. Diskretizacijom kontinualnog modela i linearizacijom nelinearnog dinamičkog ili mernog sistema, dobijaju se osnovni izrazi standardnog (SKF) odnosno proširenog (EKF) Kalmanovog filtera:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}, \quad (5.63)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (5.64)$$

$$\mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k), \quad (5.65)$$

$$\mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k), \quad (5.66)$$

pri čemu se upotrebljeni indeksi odnose na trenutke vremena.

Algoritam Kalmanovog filtera je rekurzivan, tako da je za optimalno ocenjivanje parametara potrebno poznavanje vektora početnog stanja sistema \mathbf{x}_0 i njegove kovarijacione matrice \mathbf{P}_0 . Za svaku narednu epohu Kalmanov filter vrši prvo prognozu stanja sistema ($\tilde{\mathbf{x}}$) pomoću tranzicione matrice, a zatim i njegovu ocenu ($\hat{\mathbf{x}}$) na osnovu izvršenih merenja:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \quad (5.67)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_k = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T, \quad (5.68)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{x}}_k), \quad (5.69)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \tilde{\mathbf{P}}_k, \quad (5.70)$$

$$\mathbf{K}_k = \tilde{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}. \quad (5.71)$$

Upotrebljene oznake imaju sledeća značenja:

\mathbf{x}_k	...	vektor stanja sistema,
\mathbf{P}_k	...	kovarijaciona matrica vektora stanja,
\mathbf{K}_k	...	Kalmanova matrica poboljšanja,
\mathbf{H}_k	...	konfiguraciona matrica opažanja,
Φ_k	...	tranziciona matrica,
\mathbf{Q}_k	...	kovarijaciona matrica sistemskog šuma,
\mathbf{R}_k	...	kovarijaciona matrica mernog šuma,
Γ_k	...	konfiguraciona matrica sistemskog poremećaja.

Za razliku od tranzicione matrice čija se diskretna forma lako izvodi na osnovu dinamičke matrice, konfiguraciona matrica sistemskog poremećaja ne može se izolovano formulisati, jer za svaku epohu vremena važi:

$$\Gamma_k \mathbf{w}_k = \int_k^{k+1} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau. \quad (5.72)$$

Shodno tome, prognoza kovarijacione matrice vektora stanja u pojedinim epohama vremena vrši se primenom zakona o prenosu grešaka na sistemski šum:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_k &= \mathbf{\Phi}_{k-1} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \mathbf{\Phi}_{k-1}^T + \mathbf{\Gamma}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{\Gamma}_{k-1}^T \\ &= \mathbf{\Phi}_{k-1} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \mathbf{\Phi}_{k-1}^T + \int_{k-1}^k \mathbf{\Phi}(t_k, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \mathbf{\Phi}^T(t_k, \tau) d\tau,\end{aligned}\quad (5.73)$$

što je ustvari verzija diskretnog oblika takozvane linearne neprekidne funkcije varijanse, odnosno diferencijalne jednačine koja opisuje zakon prenosa grešaka u fazi prognoze kovarijacione matrice vektora stanja sistema:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^T(t). \quad (5.74)$$

Gaus-Markovljev proces prvog reda. Često se kod primene Kalmanovog filtera u obradi satelitskih merenja, dinamika parametara vektora stanja može modelirati u vidu Gaus-Markovljevog procesa prvog reda. On je karakterističan po tome što raspodela verovatnoća procesa za proizvoljni trenutak vremena t_k zavisi samo od realizacije procesa u prethodnom trenutku vremena t_{k-1} :

$$F[x(t_k) | x(t_{k-1}), \dots, x(t_1)] = F[x(t_k) | x(t_{k-1})]. \quad (5.75)$$

Neprekidnom Gaus-Markovljevom slučajnom procesu prvog reda odgovara diferencijalna jednačina:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{T}x(t) + w(t) = -\beta x(t) + w(t), \quad (5.76)$$

u kojoj T označava korelaciono vreme, w je beli šum sa Gausovom raspodelom verovatnoća, a β faktor prigušenja. Pošto je skalarni reprezent neprekidne linearne jednačine varijanse:

$$\dot{p} = 2fp + g^2q, \quad (5.77)$$

pri čemu je za Gaus-Markovljev proces prvog reda q konstantno a $\dot{p} = 0$, sledi da je disperzija procesa:

$$E[x^2] = \sigma^2 = p = \frac{q}{2\beta}. \quad (5.78)$$

Autokovarijaciona funkcija i funkcija spektralne gustine ovog procesa glase respektivno:

$$C_{xx}(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}, \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned}
S_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(t) \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^{\infty} C_{xx}(t) \cos(\omega t) dt \\
&= 2\sigma^2 \int_0^{\infty} e^{-\beta|t|} \cos(\omega t) dt = \frac{2\sigma^2\beta}{\beta^2 + \omega^2}
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Diskretni Gaus-Markovljev proces ima oblik:

$$x_k = e^{-\beta\Delta t} x_{k-1} + w_{k-1}, \tag{5.81}$$

sa disperzijom belog šuma w_{k-1} :

$$\begin{aligned}
q_{k-1} &= p - (e^{-\beta\Delta t})^2 p = p(1 - e^{-2\beta\Delta t}) \\
&= \frac{q}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t_{k+1} - t_k)})
\end{aligned} \tag{5.82}$$

Dva ekstremna slučaja Gaus-Markovljevog procesa prvog reda od velikog su praktičnog značaja kada je u pitanju obrada satelitskih merenja. Kraće korelaciono vreme znači manju korelisanost, i u tom slučaju moguće su velike varijacije parametara vektora stanja iz epohe u epohu. Kada korelaciono vreme teži nuli ($\beta \rightarrow \infty$), proces se označava kao čisti beli šum, sa disperzijom σ_w^2 i konstantnom spektralnom gustinom moći:

$$Q = \lim_{\beta \rightarrow \infty} S_{xx}(\omega) = \frac{2\sigma_w^2}{\beta} = 2\sigma_w^2 T. \tag{5.83}$$

S druge strane, duže korelaciono vreme izražava veću korelisanost i smanjuje varijacije parametara. Ukoliko korelaciono vreme teži beskonačnosti ($\beta \rightarrow 0$), proces postaje čisti slučajni hod. Diferencijalna jednačina i diskretna predstava procesa slučajnog hoda glase respektivno:

$$\dot{x}(t) = w(t), \tag{5.84}$$

$$x_{k+1} = x_k + w_k. \tag{5.85}$$

Primer parametara koji se u obradi satelitskih merenja mogu tretirati kao slučajni hod su GPS stanične koordinate i fazne neodređenosti, dok se troposferski uticaji i stanja časovnika modeliraju ili kao slučajni hod ili kao beli šum.

5.4 Praktični aspekti Kalmanovog filtera

Direktna primena jednačina Kalmanovog filtera povezana je sa nekoliko praktičnih problema. U fazi prognoze, kovarijaciona matrica \mathbf{Q} utiče na matricu \mathbf{P} , dok u fazi ocenjivanja matrice \mathbf{P} , \mathbf{R} i \mathbf{H} utiču na Kalmanovu matricu \mathbf{K} , od koje zauzvrat zavisi matrica \mathbf{P} . To znači da se može desiti da vektor stanja iz epohe u epohu bude formalno sve tačniji, ali da se istovremeno zbog sve manjeg uticaja merenja udaljava od istinitih vrednosti. Ova pojava, koja se označava kao divergencija filtera, nastupa kako zbog neadekvatnog modeliranja, tako i grešaka linearizacije i zaokruživanja, ili nedovoljnog poznavanja stohastičkih svojstava procesa. Stoga je ukupno funkcionisanje filtera u velikoj meri određeno inicijalnim izborom veličina koje definišu kvalitet merenja i parametara vektora stanja.

U situacijama u kojima je merni šum nedovoljno poznat moguće je primeniti takozvani adaptivni postupak procene tačnosti merenja. Osnovna ideja ovog postupka sastoji se u upotrebi vektora prognoziranih mernih reziduuma u epohi k :

$$\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{x}}_k. \quad (5.86)$$

Pošto vrednosti pojedinačnih članova vektora prognoziranih reziduuma nisu pouzdane mere tačnosti, kao reprezentativni pokazatelji računaju se srednje vrednosti iz prethodnih N epoha:

$$\bar{z}_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k \tilde{z}_i^2. \quad (5.87)$$

S druge strane, očekivane vrednosti kvadrata prognoziranih reziduuma glase:

$$\left(E \left[\tilde{\mathbf{z}}_k \tilde{\mathbf{z}}_k^T \right] \right)_{ii} = \left(\mathbf{H}_k \mathbf{\Phi}_k \tilde{\mathbf{P}}_k \mathbf{\Phi}_k^T \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)_{ii} = E \left[\tilde{z}_k^2 \right], \quad (5.88)$$

tako da se može formulisati odnos:

$$q_k = \frac{\bar{z}_k^2}{E \left[\tilde{z}_k^2 \right]}. \quad (5.89)$$

Adaptivni postupak podrazumeva da se dijagonalni članovi kovarijacione matrice \mathbf{R} u narednoj epohi određuju po izrazu:

$$R_{ii}(t_{k+1}) = q_k R_{ii}(t_k), \quad (5.90)$$

čime faktor q iz epohe u epohu teži jedinici.

Iskustva u implementaciji Kalmanovog filtera pokazuju da se u pojedinim fazama računanja lako mogu pojaviti numeričke nestabilnosti. To se u prvom redu odnosi na ocenjivanje kovarijacione matrice vektora stanja \mathbf{P} . Da bi se izbegli sa

tim povezani numerički problemi, Kalmanov filter se najčešće formuliše uz pomoć takozvane U-D faktorizacije, kojom se kovarijaciona matrica \mathbf{P} rastavlja u proizvod gornje trouglaste matrice \mathbf{U} i dijagonalne matrice \mathbf{D} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T. \quad (5.91)$$

Može se dokazati da U-D faktorizacija uvek postoji i da je jedinstvena za svaku simetričnu i pozitivno definitnu matricu. Faktorizovana kovarijaciona matrica koristi se onda u svim fazama Kalmanovog filtera, tako da se, na primer, određivanje kovarijacione matrice \mathbf{P} u fazi ocenjivanja vrši po sledećem algoritmu koji važi za nekorelisana merenja:

$$\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{h}, \quad (5.92)$$

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{b}, \quad (5.93)$$

$$c = \frac{1}{r + \mathbf{v}^T \mathbf{b}}, \quad (5.94)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{U}}^T = \tilde{\mathbf{U}} (\tilde{\mathbf{D}} - c \mathbf{v} \mathbf{v}^T) \tilde{\mathbf{U}}^T, \quad (5.95)$$

pri čemu \mathbf{h} označava vrstu konfiguracione matrice merenja, dok je r disperzija merenja.

Druga teškoća u primeni Kalmanovog filtera povezana je sa računanjem Kalmanove matrice, jer ono podrazumeva inverziju matrice koja je eventualno velikih dimenzija n_k (broj merenja u aktuelnoj epohi). Ovaj problem može se prevazići sekvencijalnim pristupom u fazi ocenjivanja. Za svako opažanje z_{jk} , odgovarajuću varijansu r_{jk} i vrstu konfiguracione matrice merenja \mathbf{h}_{jk} ($j = 1, \dots, n_k$), ocene se vrše po izrazima:

$$\hat{\mathbf{x}}_{jk} = \tilde{\mathbf{x}}_{j-1,k} + \mathbf{k}_{jk} (z_{jk} - \mathbf{h}_{jk} \tilde{\mathbf{x}}_{j-1,k}), \quad (5.96)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{jk} = (\mathbf{I} - \mathbf{k}_{jk} \mathbf{h}_{jk}) \tilde{\mathbf{P}}_{j-1,k}, \quad (5.97)$$

$$\mathbf{k}_{jk} = \frac{1}{\alpha_{jk}} \tilde{\mathbf{P}}_{j-1,k} \mathbf{h}_{jk}^T, \quad (5.98)$$

$$\alpha_{jk} = \mathbf{h}_{jk} \tilde{\mathbf{P}}_{j-1,k} \mathbf{h}_{jk}^T + r_{jk}. \quad (5.99)$$

Algoritmi U-D faktorizacije i sekvencijalnog pristupa u računanju Kalmanove matrice veoma su efikasni u pogledu brzine, numeričke stabilnosti i uštede memorijskog prostora računara. Određena pojednostavljenja i neznatne

modifikacije koje se javljaju za slučaj Gaus-Markovljevog procesa prvog reda predstavljaju dodatnu prednost, jer se ovom klasom procesa može modelirati veliki broj fizičkih fenomena.

Poglavlje 6
Uvod u NAVSTAR GPS

6.1 Razvoj programa NAVSTAR

Veliki uspeh sistema satelitskog navigacionog sistema TRANSIT inicirao je već krajem šezdesetih godina prošlog veka značajne programe američkog Ministarstva odbrane (DoD), usmerene ka istraživanjima mogućnosti poboljšane navigacije iz kosmičkog prostora. Do 1972. godine već su realizovana dva projekta u okviru kojih su testirane tehnologije od suštinskog značaja za arhitekturu budućeg sistema NAVSTAR GPS. Tako je u projektu ratne mornarice TIMATION po prvi put ispitano ponašanje satelitskih atomskih časovnika u uslovima otvorenog kosmosa, a u paralelnom projektu ratnog vazduhoplovstva, pod nazivom 621B, satelitski signali modulirani su posebnom vrstom kodova čija su pseudoslučajna svojstva omogućavala merenje dužina.

Sistem NAVSTAR GPS nastao je objedinjavanjem programa TIMATION i 621B, motivisanim potrebama američke vojske za preciznim pozicioniranjem, navigacijom i transferom vremena. Ključni momenat predstavljala je odluka DoD da se finansijska sredstva usmere na razvoj novog satelitskog navigacionog sistema umesto u modernizaciju sistema TRANSIT. Osnovna arhitektura odobrena je 1973. godine, a već 1978. godine lansirani su prvi GPS sateliti. Sistem je proglašen potpuno operativnim 1995. godine.

Kvantitativno izraženo, osnovni cilj programa NAVSTAR sastojao se u tome da omogući američkoj vojsci određivanje položaja, brzina i vremena sa formalnom tačnošću od 10 m, 0.1 m/s i 100 ns respektivno. Imajući u vidu planirane vojne primene, od sistema se dodatno zahtevala funkcionalnost na brzim pokretnim platformama, neograničen broj korisnika, globalna geografska dostupnost, nezavisnost od vremenskih uslova, visok stepen zaštite od ometanja i interferencije i mogućnost selektivnog korišćenja. Postavljeni zahtevi i stanje tehnologije ranih sedamdesetih godina prošlog veka usloveli su sledeći izbor dizajnera arhitekture sistema:

- *Tip sistema.* Kod aktivnih satelitskih sistema korisnici imaju mogućnost dvosmerne komunikacije. GPS je pasivni sistem, što znači da korisnici primaju satelitske signale bez mogućnosti da povratno komuniciraju sa GPS satelitima.
- *Tip signala.* GPS koristi takozvanu tehniku signala širokog spektra (CDMA), koja omogućuje da sateliti emituju signale simultano na jednoj radio frekvenciji bez njihove međusobne interferencije.
- *Metod pozicioniranja.* U vreme kada je razmatrana osnovna arhitektura GPS sistema, tehnologija atomskih časovnika bila je već na stepenu koji je omogućavao precizno vremenski sinhronizovane signale. Stoga se izbor trilateracione metode pozicioniranja nametnuo kao logičan.
- *Noseća frekvencija.* L-opseg frekvencija (1 GHz – 2 GHz) izabran je kao kompromis, jer GPS zahteva nekih 20 MHz frekvencijskog spektra, a ovaj

opseg je tada bio relativno nezauzet. Osim toga, na višim frekvencijama se greška merenja dužina usled jonosferske refrakcije smanjuje, ali su zato prisutni mnogo veći gubici snage signala pri prostiranju kroz slobodni prostor i prolasku kroz atmosferu.

- *Satelitska konstelacija.* S obzirom na zahtev globalne dostupnosti, izbor GPS satelitskih orbita morao je biti ekonomičan. Na primer, sateliti sa orbitama nižim od 2000 km (LEO) ne iziskuju velike troškove lansiranja, ali ih je za globalnu pokrivenost potrebno 100 – 200. Pored toga, ovaj tip orbita zahteva česte manevarske intervencije, jer su na manjim visinama izraženi uticaji atmosferskog trenja i nepravilne strukture Zemljinog gravitacionog polja. S druge strane, globalna pokrivenost lako se postiže sa svega nekoliko geostacionarnih satelita (GEO), ali je njihovo lansiranje skupo, i uprkos visinama leta od 36 000 km ne pokrivaju dovoljno dobro područja većih geografskih širina. Konstelacija GPS satelita zasnovana je na srednjim orbitama (MEO), odnosno visinama od 5000 km do 20 000 km. Kod ovog tipa orbita troškovi lansiranja su umereno visoki, a kriterijum globalne pokrivenosti ispunjava konstelacija od 24 – 36 satelita.

GPS je, prema tome, pasivni satelitski sistem zasnovan na trilateracionoj metodi pozicioniranja i merenju dužina principom određivanja vremena puta radio signala. Da bi se, međutim, izmerilo vreme puta radio signala, časovnici u satelitima i prijemnicima moraju biti sinhronizovani sa visokom tačnošću. Pošto se u GPS prijemnike iz razloga ekonomičnosti ugrađuju kvarcni oscilatori znatno manje tačnosti od atomskih oscilatora u satelitima, svi vremenski intervali u trenutku merenja biće opterećeni sistematskom greškom. To znači da su u tom trenutku rastojanja prema svim satelitima podjednako duža ili podjednako kraća od istinitih vrednosti, zbog čega se nazivaju pseudodužinama.

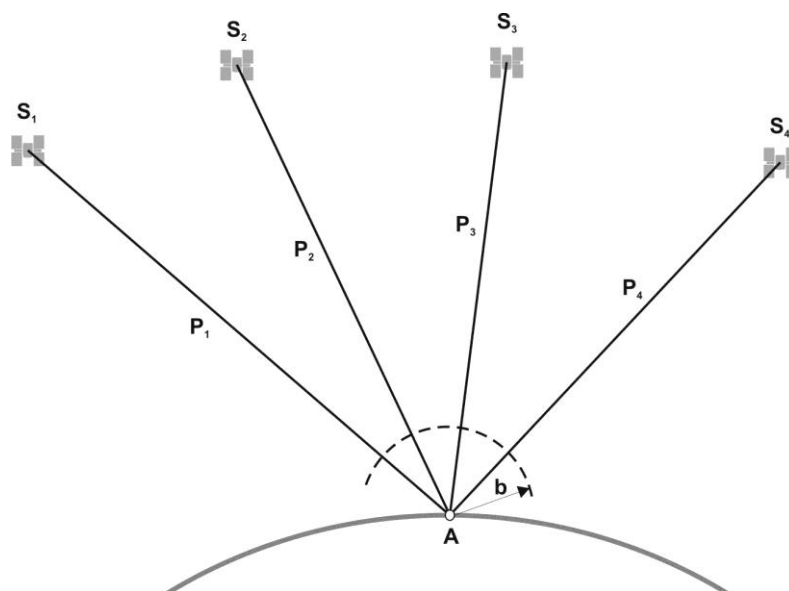
Činjenica da se GPS prijemnicima ne mere dužine već pseudodužine, neznatno menja trilateracioni princip GPS pozicioniranja. Slika 6.1 ilustruje osnovnu ideju. Prijemnik sa tačke A simultano meri pseudodužine P_i prema satelitima S_i , čiji su položaji u trenutku merenja poznati zahvaljujući navigacionim porukama koje emituju. Svaka izmerena pseudodužina definiše po jednu sferu čiji je centar u odgovarajućem satelitu. Trodimenzionalni položaj nepoznate tačke A određen je u principu presekom tri takve sfere. Međutim, pošto merene pseudodužine sadrže istu nepoznatu grešku sinhronizacije časovnika prijemnika i satelita b , za kompletno rešenje neophodno ih je najmanje četiri. Matematički izraženo, GPS trilateracija sastoji se u rešavanju jednačina:

$$P_i = \sqrt{(x - x^{(i)})^2 + (y - y^{(i)})^2 + (z - z^{(i)})^2} + b \quad (6.1)$$

po nepoznatim koordinatama (x, y, z) tačke A i nepoznatoj greški sinhronizacije b , pri čemu su poznate koordinate satelita označene gornjim indeksom $i = 1, 2, 3, 4$.

NAVSTAR GPS je sistem vojnog porekla i karaktera, tako da su za njegovu potencijalnu civilnu upotrebu od samog početka uvedena određena ograničenja. Razmatrajući razne aspekte nacionalne bezbednosti, Vlada SAD je formulisala politiku koja predviđa dva režima korišćenja sistema: standardno pozicioniranje za civilnu mirnodopsku upotrebu (SPS), i precizno pozicioniranje za DoD ovlašćene korisnike (PPS). Standardno SPS pozicioniranje dostupno je svima bez direktne nadoknade za korišćenje. Tokom devedesetih godina prošlog veka njegova tačnost je u horizontalnom smislu bila degradirana na oko 100 m takozvanom SA merom zaštite, ali je ona u međuvremenu 2000. godine ukinuta predsedničkim ukazom. Pristup potpunoj funkcionalnosti sistema ograničen je od 1994. godine takozvanom AS merom zaštite, na taj način što se precizni signal emituje u šifrovanom obliku koga mogu koristiti samo ovlašćeni PPS korisnici.

GPS nije jedini predstavnik u klasi satelitskih radionavigacionih sistema. SSSR je, gotovo istovremeno kad i SAD, započeo razvoj sopstvenog satelitskog sistema pod nazivom GLONASS. Zbog raspada SSSR i problema u vezi finansiranja kosmičkog programa, sistem je dostigao konstelaciju od 24 satelita samo jedno kratko vreme tokom 1996. godine, ali je nedavnim lansiranjem nekoliko satelita Rusija ponovo uspeła da dovede GLONASS na nivo potpune funkcionalnosti. S druge strane, pitanja zavisnosti suvereniteta i bezbednosti od jednog tako važnog resursa kao što je satelitski navigacioni sistem koga kontroliše armija samo jedne države, navela su 1999. godine Evropsku uniju na odluku o pokretanju satelitskog navigacionog programa pod civilnom kontrolom. Evropska komisija u saradnji sa



Slika 6.1. Princip GPS trilateracije. Za određivanje koordinata tačke i greške sinhronizacije neophodne su najmanje četiri merene pseudoduzine.

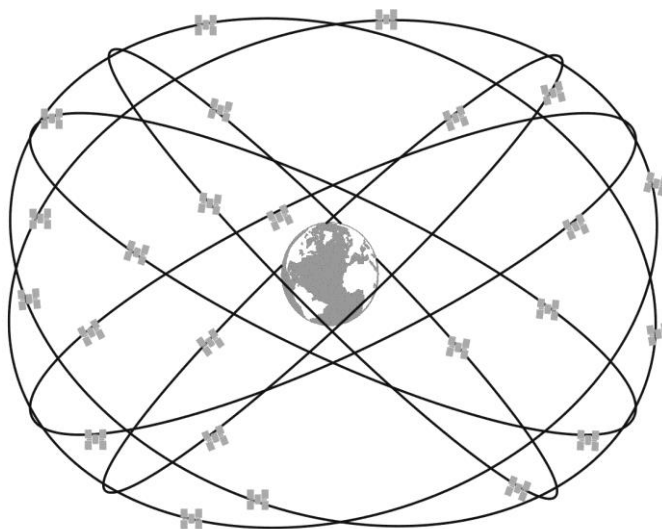
Evropskom svemirskom agencijom odmah je počela intenzivno da radi na definiciji arhitekture satelitskog sistema pod nazivom GALILEO, sa namerom da proglasi njegovu potpunu operativnost 2008. godine. Kina je lansiranjem dva GEO satelita tokom 2000. godine takođe pokazala da ima ambiciozne planove sa svojim eksperimentalnim satelitskim navigacionim sistemom BEIDOU, ali još uvek nisu poznati svi detalji njegove definitivne arhitekture.

Danas je uobičajeno da se GPS, GLONASS, kao i ostali realizovani, planirani ili budući sistemi nazivaju globalnim navigacionim satelitskim sistemima (GNSS). GNSS navigacija više nije ograničena samo na Zemlju i njenu neposrednu okolinu. Američka nacionalna svemirska agencija (NASA) objavila je da već razmatra konstelaciju satelita u niskim orbitama oko Marsa.

6.2 Arhitektura sistema NAVSTAR

Kosmički segment sistema. Projektovana konstelacija obuhvata 24 GPS satelita u gotovo kružnim orbitama poluprečnika 26 560 km i sa periodom obilaska oko Zemlje od približno 12 časova (slika 6.2). Po četiri satelita raspoređeno je u šest orbitalnih ravni nagnutih pod uglom od 55° u odnosu na ekvator. Ukupan raspored satelita optimizovan je tako da svakom korisniku na površi Zemlje obezbeđuje elektronska vidljivost najmanje četiri satelita iznad horizonta.

GPS sateliti su opremljeni kako standardnim komponentama neophodnim za komunikaciju i pozicioniranje, tako i posebnim modulima sasvim specifične vojne namene, kao što je na primer sistem za rano otkrivanje nuklearnih udara (NDS).



Slika 6.2. Nominalna GPS satelitska konstelacija od 24 satelita u 6 orbitalnih ravni.

Tabela 6.1. Osnovne karakteristike raznih generacija GPS satelita.

Karakteristika	Block II/IIA	Block IIR	Block IIF
Ukupan broj satelita	28	21	12
Godina prvog lansiranja	1989	1997	2005
Težina satelita	900 kg	1100 kg	1700 kg
Snaga solarnih panela	1100 W	1700 W	2900 W
Projektovani vek trajanja	7.5 god.	10 god.	15 god.

Osnovna satelitska konstrukcija obuhvata još solarne panele koji obezbeđuju električnu energiju, reakcione točkove za kontrolu orijentacije i mlazne sisteme za korekciju orbite. Količina goriva i stanje sistema za napajanje ograničavaju prosečni vek trajanja satelita na oko 10 godina, zbog čega se moraju periodično zamenjivati novim. GPS sateliti su prvobitno lansirani u orbite pomoću raketa nosača Atlas F. Kasnije je ta odluka promenjena u korist višenamenskih kosmičkih vozila (Space Shuttle), ali je ponovo preispitana nakon nesreće broda Challenger 1986. godine, i od tada se lansiranje vrši raketama nosačima tipa Delta II.

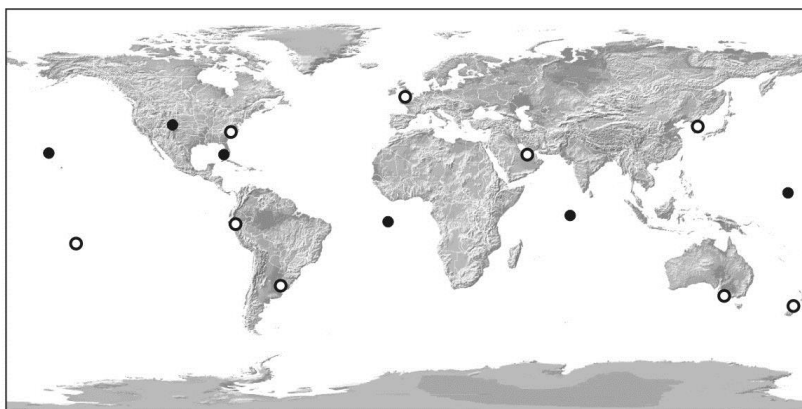
Do sada je lansirano nekoliko generacija GPS satelita. Tabela 6.1 sadrži osnovne karakteristike nekih od njih. Prva generacija od 10 prototip satelita pod nazivom Block I služila je da demonstrira izvodljivost celog sistema. Nju su do proglašenja potpune operativnosti 1995. godine zamenila 24 satelita generacije Block II i IIA, da bi narednih deset godina puna konstelacija bila održavana lansiranjem novih Block IIR satelita. Svaka satelitska generacija projektovana je sa većom funkcionalnošću i dužim vekom trajanja u odnosu na prethodnu.

Lansiranje poslednje generacije od 27 GPS satelita pod nazivom Block IIF započelo je 2005. godine. Ministarstvo odbrane SAD je u međuvremenu donelo odluku o smanjenju planiranog broja satelita na 12, procenjujući da bi njihova modifikacija u skladu sa najavljenom modernizacijom sistema bila preskupa. Iz istih razloga je pokrenut i dugoročni projekat potpuno nove generacije satelita pod nazivom GPS III, za koju su prva lansiranja realizovana već 2010. godine.

Kontrolni segment sistema. Kontrolni GPS segment (OCS) zadužen je za kompletno upravljanje satelitskim operacijama, i u njegove osnovne zadatke spada:

- praćenje satelitskih orbita i izvođenje satelitskih manevara,
- praćenje i održavanje ispravnog funkcionisanja satelita,
- održavanje GPS vremena,
- predikcija satelitskih efemerida i parametara časovnika,
- ažuriranje satelitskih navigacionih poruka.

U središtu kontrolnog segmenta je glavna kontrolna stanica (MCS) smeštena u vazduhoplovnoj bazi Schriever, Colorado Springs, koja obezbeđuje sve neophodne

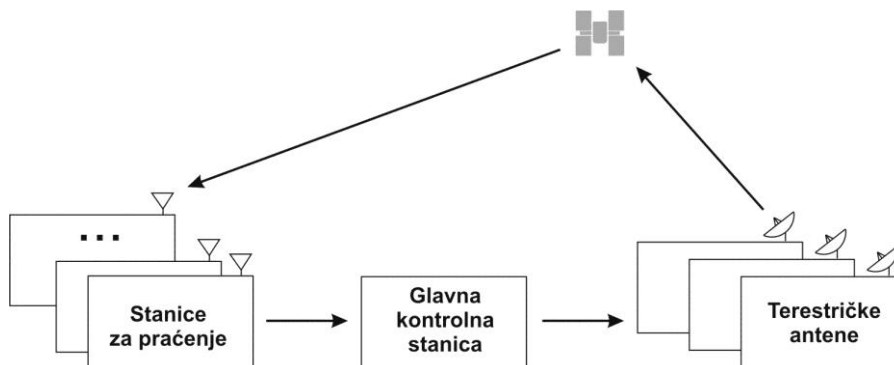


Slika 6.3. Raspored stanica kontrolnog GPS segmenta (crni krugovi). Stanice u nadležnosti NGA (beli krugovi) nisu formalno u sastavu kontrolnog segmenta.

komandne i kontrolne funkcije. Pored nje, satelitski signali se kontinuirano primaju na još pet stanica, globalno raspoređenih po longitudi (slika 6.3): Ascension Island, Diego Garcia, Kwajalein, Hawaii i Cape Canaveral. Sve ove stanice za praćenje opremljene su GPS prijemnicima koje kontrolišu cezijumski atomski standardi, meteorološkim sensorima i uređajima za komunikaciju sa glavnom kontrolnom stanicom preko terestričkih i satelitskih linkova. Četiri stanice za praćenje imaju velike terestričke antene kojima se ostvaruje veza sa GPS satelitima u S-opsegu radio frekvencija. DoD geoprostorna agencija (NGA) takođe upravlja određenim brojem svojih stanica za praćenje, ali one nisu formalno deo kontrolnog segmenta već se koriste za naknadnu analizu kvaliteta.

Slika 6.4 ilustruje elemente kontrolnog segmenta i njihove funkcije. Opažanja sa stanica za praćenje prosleđuju se glavnoj kontrolnoj stanici, gde se na osnovu njih određuju i prognoziraju orbite GPS satelita i stanja njihovih časovnika. GPS vreme definiše odabrani skup atomskih časovnika na stanicama za praćenje, tako da se sinhronizacija satelitskih časovnika vrši ustvari računanjem koeficijenata polinoma koji modeliraju njihova odstupanja. Prognoziranje satelitske efemeride i koeficijenti časovnika upućuju se potom iz glavne kontrolne stanice u jednu od terestričkih antena koja ih radio putem prosleđuje satelitskim memorijama. Ovo ažuriranje navigacionih poruka vrši se još uvek najmanje jednom dnevno, iako sateliti generacije Block IIR i IIF imaju takozvane Autonav mogućnosti međusobne komunikacije koje znatno redukuju potrebu za čestim kontaktima sa kontrolnim segmentom.

Potencijalne mere za povećanje kvaliteta kontrolnog segmenta obuhvaćene su u takozvanoj DoD inicijativi za poboljšanje GPS tačnosti (AII). Tim dokumentom se pre svega predlaže ravnopravno uključivanje podataka jednog broja NGA stanica za praćenje u proces predikcije satelitskih efemerida i stanja časovnika. Na taj način se omogućuje kontinuirano praćenje svih satelitskih signala i obezbeđuje



Slika 6.4. Elementi kontrolnog GPS segmenta i njihove funkcije.

veća pouzdanost rezultata. AI takođe predviđa i proširenje područja pokrivenosti mreže terestričkih antena jer je postojeća infrastruktura takva da GPS satelit može biti izvan njihovog radio vidokruga i do dva časa.

Korisnički segment sistema. Današnju globalnu rasprostranjenost i ogroman uspeh u civilnoj primeni, GPS duguje pre svega revoluciji u tehnologiji integrisanih kola koja je GPS prijemnike učinila kompaktnim, portabilnim i za red veličine jeftinijim nego što se to uopšte moglo zamisliti pre dve decenije.

U početku je, međutim, situacija bila potpuno drugačija. Korisnički segment je ustvari DoD koncept u okviru nacionalnog odbrambenog programa koji predviđa da GPS prijemnici budu integrisani u svaki značajniji odbrambeni sistem. Stoga je vojni sektor ne samo kategorički odbijao svaku pomisao na mogućnost ozbiljne civilne eksploatacije svog sistema, nego je i nametao tako oštra ograničenja da su prvi proizvođači civilnih GPS prijemnika imali obavezu da se registruju kao proizvođači vojne opreme. Srećom, tenzije su vremenom popuštale, tako da je prvobitni odnos 90% vojnih prema 10% civilnih korisnika danas upravo obrnut.

Prvi set GPS prijemnika izrađen je za potrebe DoD u fazi testiranja izvodljivosti NAVSTAR sistema. Satelitsku konstelaciju je u to vreme činilo svega nekoliko satelita Block I, a sistem je bio više od deset godina daleko od operativne upotrebe. Potencijalno tržište automobilske navigacije još uvek nije bilo spremno za masovnu primenu jer nisu postojale odgovarajuće digitalne karte i baze podataka. Interesantno je, međutim, da su čak i u tim uslovima prepoznate velike mogućnosti sistema za geodetsko korišćenje.

Prvobitno tržište civilne GPS primene bilo je ograničeno i skoncentrisano na precizno pozicioniranje. Prvi civilni GPS prijemnici sa takvim mogućnostima, Macrometer V-1000 i Texas Instruments TI 4100, pojavili su se 1982. godine. Bili su to po današnjim standardima ogromni, skupi uređaji, težine više desetina kilograma i potrošnje snage od preko 100 W, ali su u svoje vreme predstavljali

revolucionarnu novinu demonstrirajući mogućnost relativnog pozicioniranja sa milimetarskom tačnošću.

Kada je 1989. godine otpočelo lansiranje Block II satelitske generacije uz najavu potpune operativnosti sistema, proizvođači GPS prijemnika ubrzano su se orijentisali na istraživanje i razvoj, predviđajući ogromno tržište i širok spektar primene. Tehnologija je u kratkom roku toliko napredovala da je industrijska proizvodnja već 1992. godine mogla da ponudi masovnom tržištu ručne GPS prijemnike po prihvatljivim cenama. Od 1997. godine proizvode se prijemnici džepnog formata sa napajanjem na alkalne baterije, a od 2000. godine GPS čipovi se ugrađuju u ručne časovnike i mobilne telefone. Minijaturizacija je dostigla takav stepen da je GPS postao ne samo deo svakodnevnog života, već i suštinski element javne i komercijalne infrastrukture.

6.3 Referentni sistem WGS84

WGS84 (World Geodetic System 1984) je realizacija konvencionalnog terestričkog referentnog sistema koja predstavlja oficijelni terestrički referentni okvir američkog Ministarstva odbrane i njegovih službi, kako za pozicioniranje i navigaciju, tako i za sve kartografske i geodetske aktivnosti. To je poslednje i najpreciznije poboljšanje niza ranijih verzija DoD realizacija poznatih kao WGS60, WGS66 i WGS72.

GPS je značajno doprineo promociji WGS84 kao de fakto globalnog datumskog standarda, koga u originalnom ili modifikovanom obliku sve više zemalja usvaja za svoj službeni sistem. Ustvari, WGS84 je više od realizacije CTRS zato što sadrži sledeći koherentni skup globalnih modela i definicija:

- geocentrični pravougli koordinatni okvir,
- obrtni elipsoid kao geometrijski model Zemlje,
- geoid kao model Zemljinog gravitacionog polja,
- konzistentni skup fundamentalnih konstanti.

Geocentrični pravougli WGS84 koordinatni okvir implicitno definišu koordinate stanica kontrolnog GPS segmenta. Pre pojave ITRF referentnog okvira koga od 1989. godine realizuje i održava u naučne svrhe Međunarodna služba Zemljine rotacije (IERS), koordinate stanica za praćenje bile su određene uklapanjem GPS merenja u koordinatno rešenje dobijeno TRANSIT sistemom, sa procenjenom apsolutnom tačnošću 1 – 2 m. Od tada je kvalitet WGS84 referentnog okvira poboljšavan u tri navrata. Verzije iz 1994. i 1997. godine, pod nazivima WGS84 (G730) i WGS84 (G873), već su imale tačnost reda 10 cm i 5 cm respektivno. Poslednja realizacija iz 2001. godine, WGS84 (G1150), saglasna je sa odgovarajućim ITRF okvirom na nivou od 1 cm. I sama definicija WGS84 sistema

Tabela 6.2. Aktuelne vrednosti fundamentalnih WGS84 parametara.

Oznaka	Parametar	Vrednost
a	Velika poluosa elipsoida	6 378 137.0 m
$1/f$	Recipročna spljoštenost elipsoida	298.257 223 563
ω_E	Uglovna brzina rotacije Zemlje	$7\,292\,115.0 \cdot 10^{-11}$ rad/s
GM	Geocentrična gravitaciona konstanta	$3\,986\,004.418 \cdot 10^8$ m ³ /s ²
c	Brzina svetlosti u vakuumu	$2.997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s

doživela je promene u vidu poboljšanih vrednosti nekih od fundamentalnih parametara (tabela 6.2).

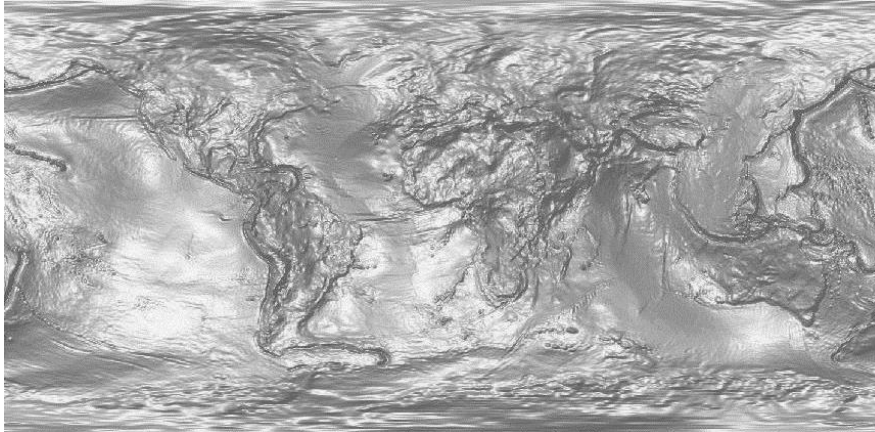
WGS84 geometrijski modelira Zemlju u obliku obrtnog elipsoida. Iz praktičnih razloga usvojeno je da velika poluosa i spljoštenost WGS84 elipsoida imaju po definiciji iste vrednosti kao kod obrtnog elipsoida geodetskog referentnog sistema GRS80 (Geodetic Reference System 1980). WGS84 elipsoid je naravno po definiciji geocentričan, sa malom poluosom koja se podudara sa pravcem z ose konvencionalnog terestričkog referentnog sistema.

WGS84 model gravitacionog polja Zemlje poznat je pod nazivom EGM96. On se teorijski zasniva na razvoju potencijala sile Zemljine teže u beskonačni red članova koji se nazivaju sfernim harmonicima. Svaki član identifikuju dva indeksa: stepen n i red m . Razvoj u red sfernih harmonika praktično se može izvesti samo do nekog konačnog stepena n_{\max} , tako da potencijal sile teže u tački koja je na rastojanju r od centra mase Zemlje, i ima longitudu λ i geocentričnu latitudu φ' , iznosi:

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi') (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right], \quad (6.2)$$

gde a označava veliku poluosu WGS84 elipsoida, GM je geocentrična gravitaciona konstanta, C_{nm} i S_{nm} su normalizovani gravitacioni koeficijenti, a P_{nm} takozvane Ležandrove funkcije i polinomi. Potencijal je dakle u svakoj tački potpuno određen ako su poznate vrednosti koeficijenata C_{nm} i S_{nm} .

Model EGM96 razvijen je do stepena i reda 360, i sadrži ukupno 130676 gravitacionih koeficijenata. Oni su empirijski ocenjeni na osnovu velikog broja podataka praćenja satelita i rezultata terestričkih gravimetrijskih merenja. Slika 6.5 prikazuje reljefnu površ geoidnih undulacija WGS84 geoida zasnovanog na geopotencijalnom modelu EGM96. Primećuje se da oblik geoidne površi veoma dobro odslikava kontinentalne mase i zone anomalija kao što su granice velikih litosfernih ploča. Maksimalna vrednost undulacije iznosi +75 m, i nalazi se na području Nove Gvineje. Minimalna undulacija od -104 m smeštena je na jugu Indijskog podkontinenta. Globalna srednja vrednost geoidnih undulacija približno



Slika 6.5. WGS84 geoid zasnovan na gravitacionom modelu Zemlje EGM96.

je jednaka nuli, dok im je standardna devijacija oko 30 m. To je ujedno i pokazatelj kvaliteta sa kojim WGS84 elipsoid aproksimira geoid.

6.4 Struktura GPS signala

GPS sateliti emituju signale koristeći dve frekvencije iz L-opsega, pod nazivom Link 1 (L1) i Link 2 (L2), koje se nalaze unutar UHF frekvencijskog područja:

$$\begin{aligned} \text{L1: } f_{L1} &= 1575.42 \text{ MHz} \\ \text{L2: } f_{L2} &= 1227.60 \text{ MHz} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Na frekvenciji L1 emituju se dva signala, od kojih je prvi za civilno korišćenje, a drugi je namenjen DoD ovlašćenim korisnicima. Signalu na L2 mogu da pristupe samo ovlašćeni korisnici. Svaki signal sastoji se od sledeće tri komponente:

- *Noseći talasi.* To su jednostavno čisti sinusni radio talasi frekvencije f_{L1} ili f_{L2} . Odgovarajuće talasne dužine iznose $\lambda_{L1} = 19.0$ cm i $\lambda_{L2} = 24.4$ cm.
- *Kodovi.* Predstavljaju ih jedinstveni binarni nizovi nula i jedinica, koji omogućavaju GPS prijemnicima da trenutno odrede vreme puta signala. Smenjivanje pojedinačnih nula i jedinica izgleda nasumično i ne odaje nikakvu pravilnost, zbog čega se ovi nizovi nazivaju još i pseudoslučajnim (PRN) kodovima. Međutim, njihova svojstva su ustvari rezultat pažljivo osmišljenog matematičkog algoritma koji omogućuje da ih sateliti mogu emitovati simultano na istoj frekvenciji. Svaki GPS satelit emituje dve vrste kodova: javno dostupne C/A kodove i zaštićene precizne kodove P(Y). C/A kod je niz od 1023 bitova (čipova), koji se ponavlja svake

milisekunde. Frekvencija smenjivanja čipova iznosi 1.023 MHz, što znači da je trajanje jednog čipa oko 1 μ s, a njegova širina (talasna dužina) oko 300 m. Svakom GPS satelitu dodeljen je jedinstveni C/A kod. P(Y) kod je, nasuprot tome, veoma dugačak niz od oko 10^{14} čipova sa frekvencijom smenjivanja 10.23 MHz i talasnom dužinom od oko 30 m. Svakom GPS satelitu dodeljen je deo kodne sekvence koji se ponavlja nakon nedelju dana. Od 1994. godine ne emituju se čisti P kodovi već šifrirani Y kodovi, odakle i potiče oznaka P(Y).

- *Navigacioni podaci.* To je binarno kodirana poruka koja se sastoji od podataka o stanju ispravnosti satelita, njegovim efemeridama (položajima i brzinama), parametrima časovnika i almanahu (približnim efemeridama svih ostalih satelita u konstelaciji). Bitovi navigacione poruke emituju se na frekvenciji od svega 50 Hz, što znači da je trajanje jednog navigacionog bita 20 ms. Potrebno je ukupno 12.5 minuta da se emituje cela navigaciona poruka, ali se podaci koji su kritični za pozicioniranje i navigaciju ponavljaju svakih 30 s.

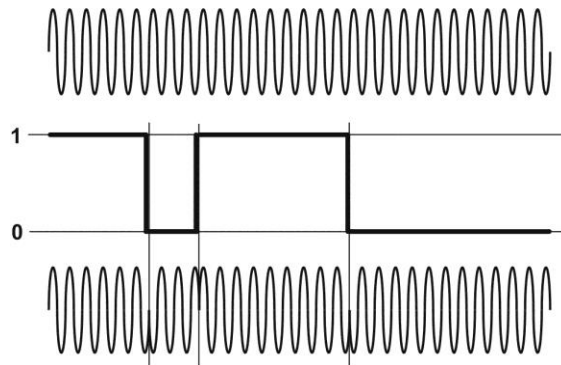
Sve tri komponente signala koherentno su izvedene iz oscilacija jednog od atomskih standarda u satelitu čija osnovna frekvencija, f_0 , iznosi 10.23 MHz. Odnos frekvencija pojedinih komponenti prema osnovnoj frekvenciji prikazan je u tabeli 6.3.

Kompletan GPS signal dobija se kombinovanjem komponenti u procesima binarnog sabiranja i fazne modulacije. Prvo se navigaciona poruka binarno kombinuje sa kodom: rezultujući bit je 0 ako su navigacioni bit i kodni čip jednaki (oba su 0 ili su oba 1), a 1 ako su navigacioni bit i kodni čip različiti. Tako dobijena kombinacija ugrađuje se potom u noseći talas modulisanjem njegove faze: promene vrednosti bita sa 0 na vrednost 1 i obrnuto menjaju fazu nosećeg sinusnog talasa za 180° . Slika 6.6 ilustruje ovaj specifični način modulacije koji se naziva binarnim faznim kodiranjem (BPSK).

Modulisanje nosećeg talasa kodovima ima za posledicu da se snaga signala, koja je pre modulacije skoncentrisana u jednoj frekvenciji, raspodeljuje na znatno širi frekvencijski opseg (oko 2 MHz za signal sa C/A kodom, odnosno oko 20 MHz

Tabela 6.3. Odnos fekvencija pojedinih komponenti GPS signala prema osnovnoj frekvenciji.

Komponenta signala	Frekvencija
Noseći talas L1	$154 \cdot f_0$
Noseći talas L2	$120 \cdot f_0$
C/A kod	$f_0/10$
P(Y) kod	$1 \cdot f_0$
Navigaciona poruka	$f_0/204\ 600$



Slika 6.6. Princip binarnog faznog kodiranja (BPSK). Promene vrednosti bitova sa 0 na 1 i obrnuto, menjaju fazu nosećeg talasa za 180°.

za signale sa P(Y) kodom). Iako ukupna snaga signala ostaje ista, njena spektralna gustina postaje na taj način mnogo niža od pozadinskog šuma. Gustina snage se u prijemniku može ponovo skoncentrisati na jednu frekvenciju ako su kodovi poznati. Signali ovakvih svojstava nazivaju se signalima širokog spektra, i nalaze veliku primenu u komunikaciji i navigaciji.

PRN kodovi s vrednostima ± 1 dizajnirani su tako da poseduju dva specijalna korelaciona svojstva. Prvo, kroskorelacija dva kodna niza ima zanemarljivo malu vrednost. Drugim rečima, zbir proizvoda članova dve kodne sekvence koje su relativno pomerene jedna u odnosu na drugu približno je jednak nuli. To na primer znači da za C/A kodove koje emituju dva proizvoljna satelita k i l važi da je:

$$\sum_{i=0}^{1022} x^{(k)}(i) \cdot x^{(l)}(i+n) \approx 0 \quad (6.4)$$

za svako n , pri čemu je $x(1023 + m) = x(m)$ jer se kodovi ponavljaju. Drugo, PRN kodna sekvenca takođe ima zanemarljivo malu autokorelaciju za svako n , osim za $n = 0$, kada se poklapa sama sa sobom:

$$\sum_{i=0}^{1022} x^{(k)}(i) \cdot x^{(k)}(i+n) \approx 0. \quad (6.5)$$

Ovako specifični dizajn kodova ima veze sa činjenicom da je snaga GPS signala nakon prevaljenog puta od preko 20 000 km i prolaska kroz atmosferu tako mala da je signal u potpunosti maskiran prirodnim šumom prisutnim na površi Zemlje. Upravo zahvaljujući kroskorelacionim i autokorelacionim svojstvima kodova, GPS prijemnici su u stanju da detektuju tako slabe signale, identifikuju satelite koji ih emituju i vrše merenje pseudoduzina.

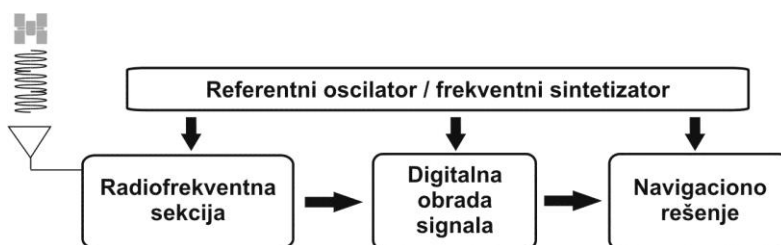
6.5 Princip kodnih i faznih merenja

Svaki standardni GPS prijemnik obavlja sledećih pet osnovnih funkcija:

- prijem signala koje emituju sateliti,
- razdvajanje signala po pojedinim satelitima,
- merenje vremena puta signala i Doplerovog pomaka,
- dekodiranje navigacione poruke,
- određivanje položaja, brzine i vremena.

Slika 6.7 ilustruje opštu funkcionalnu shemu GPS prijemnika i komponente u kojima se izvršavaju ove operacije. Prijem signala vrši se u anteni, u kojoj se prvo filtriraju i pojačavaju. GPS antene su po konstrukciji omnidirekzione, jer moraju prihvatati signale sa satelita koji su raspoređeni svuda iznad lokalnog horizonta. Po prolasku kroz antenu signali dospevaju u radiofrekventnu sekciju prijemnika, gde se dodatno filtriraju i pojačavaju, i tom prilikom im se frekvencija snižava na vrednost koja je pogodnija za digitalizaciju analogno-digitalnim pretvaračem (ADC). U narednoj sekciji prijemnika, koja je posvećena digitalnoj obradi, vrši se merenje vremena puta, određivanje Doplerovog pomaka i dekodiranje navigacione poruke za svaki satelit čiji se signal prati. Poslednja sekcija obrađuje izvršena merenja i navigacione podatke u skladu sa predviđenom namenom prijemnika. Položaj, brzina i vreme su najčešći rezultati obrade, osim kod specifičnih primena kao što su transfer vremena, osmatranje jonosferske aktivnosti ili jednostavno prikupljanje podataka. Celim postupkom upravlja mikroprocesor, a obezbeđuje ga referentni oscilator prijemnika preko niza takozvanih numerički kontrolisanih lokalnih časovnika (NCO).

Postupak kojim prijemnik meri vreme puta signala i određuje njegov Doplerov pomak konceptualno je veoma jednostavan, kao što ilustruje slika 6.8. Prijemnik ustvari generiše kopiju C/A kodnog niza i vremenski je pomera u odnosu na originalni C/A kodni niz koga prima sa satelita, prateći pri tome neprekidno vrednost korelacione funkcije. Kopija i original koda vremenski su poravnate onda kada vrednost korelacione funkcije dostigne maksimum. Ukupan vremenski pomak do momenta poravnanja predstavlja ustvari vreme potrebno signalu da od satelitske



Slika 6.7. Funkcionalna shema GPS prijemnika.



Slika 6.8. Princip merenja GPS prijemnika upoređenjem kopije i originala signala.

antene stigne do antene prijemnika. Naknadno množenje brzinom prostiranja radio talasa daje kodnu pseudodužinu. Ceo proces odvija se u povratnom kontrolnom sistemu implementiranom u vidu kodnog filtera (DLL). Direktno korišćenje P(Y) koda za merenje vremena puta signala nije moguće zbog njegove dužine, već se izvodi posredno uz pomoć podataka iz navigacione poruke i poznatih vremenskih relacija između C/A i P(Y) kodova.

Nakon poravnanja i merenja vremena puta kodovi se uklanjaju iz signala, tako da preostaje samo noseći talas modulisan navigacionom porukom. On se dalje prati u drugom povratnom kontrolnom sistemu koji se naziva faznim filterom (PLL). U tu svrhu prijemnik generiše kopiju nosećeg talasa i menja mu frekvenciju sve dok se ne poklopi sa frekvencijom i fazom originalnog nosećeg talasa. Tokom tog procesa istovremeno se identifikuju bitovi navigacionih podataka. Razlika između frekvencije kopije i originala nosećeg talasa pokazuje koliko je satelitski noseći talas Doplerski pomeren usled relativnog kretanja satelita i prijemnika. Razlika između faze kopije i originala nosećeg talasa se u trenutku prvog merenja može odrediti samo u okviru jednog faznog ciklusa zbog periodičnosti sinusne funkcije. Od tog momenta poseban registar počinje da uvećava ili smanjuje svoj brojač kad god se fazna razlika promeni za ceo fazni ciklus. Nepoznati ceo broj faznih ciklusa na početku merenja naziva se faznom neodređenošću. Množenje izmerene fazne razlike talasnom dužinom radio talasa daje faznu pseudodužinu, a kada se talasnom dužinom pomnoži izmereni Doplerski pomak dobija se njena brzina promene.

Kodne i fazne pseudodužine predstavljaju meru istih rastojanja, ali između njih postoje dve bitne razlike. Prva se odnosi na tačnost. Rezolucija sa kojom komponente prijemnika mere vreme puta signala i njegovu fazu iznosi oko 1% odgovarajuće talasne dužine, što znači da je tačnost kodnih pseudodužina na metarskom, a faznih pseudodužina na milimetarskom nivou. Druga razlika sastoji se u tome da su kodne pseudodužine potpuna mera rastojanja između prijemnika i satelita, dok su fazne pseudodužine neodređene zbog nepoznatog celog broja faznih ciklusa.

Poslednja operacija koju izvodi svaki standardni GPS prijemnik sastoji se u određivanju takozvanog PVT navigacionog rešenja (položaj, brzina, vreme). U principu, simultano merenje kodnih pseudodužina i Doplerskih pomaka do najmanje četiri satelita dovoljno je da korisnik može odrediti položaj, brzinu i stanje časovnika prijemnika. Algoritam se zasniva na matematičkoj obradi rezultata merenja uz pomoć informacija iz dekodiranih navigacionih poruka o satelitskim

položajima i brzinama. Kvalitet rešenja zavisi od tačnosti merenja, broja satelita i njihovog rasporeda u odnosu na korisnika. GPS prijemnik vrši PVT računanje automatski, kontinualno i gotovo trenutno.

6.6 Osnovni izvori grešaka merenja

Proces GPS merenja prate različiti izvori grešaka. One se u opštem slučaju mogu klasifikovati na greške satelitskog porekla, zatim greške koje potiču od sredine kretanja signala i greške čije je poreklo u prijemniku i anteni odnosno njihovoj neposrednoj okolini.

Greške satelitskog porekla. Podaci o satelitskim orbitama i časovnicima rezultat su određivanja kontrolnog GPS segmenta na osnovu opažanja sa stanica za praćenje. Kontrolni GPS segment koristi poseban model kojim prognozira vrednosti ovih parametara, da bi ih potom prosledio satelitima koji ih emituju u obliku navigacione poruke. Satelitske efemeride i koeficijenti časovnika, koji se koriste u trenutku GPS merenja, opterećeni su dakle i greškama određivanja i greškama predikcije.

Greška satelitskih efemerida. Tačnost određivanja efemerida GPS satelita koju kontrolni segment rutinski postiže iznosi danas 1 – 2 m. To su takozvane emitujuće efemeride. Istog reda veličine su i greške merenih pseudodužina. Međutim, pošto emitujuće efemeride predstavljaju ustvari prognozirane vrednosti, kontrolni segment ih povremeno ažurira (dva puta dnevno), jer im tačnost opada sa protokom vremena.

Nezavisno od kontrolnog GPS segmenta, postoji nekoliko civilnih naučnih organizacija koje se takođe bave određivanjem orbita GPS satelita. Najpoznatija je Međunarodna GNSS služba (IGS), koja raspolaže sa preko 200 stanica ravnomerno raspoređenih po čitavom svetu sa kojih se permanentno vrše GPS opažanja. IGS određuje nekoliko kategorija takozvanih preciznih efemerida, od kojih su neke prognozirane pa su dostupne i u realnom vremenu (tabela 6.4). Definitivne precizne IGS efemeride, čija je tačnost čak 2.5 cm, mogu se slobodno preuzeti sa Interneta, ali su za razliku od emitujućih efemerida dostupne tek za par nedelja.

Tabela 6.4. Kategorije IGS orbitalnih proizvoda.

Naziv proizvoda	Tačnost	Dostupnost
Ultra-rapid (predicted)	~ 5 cm	U realnom vremenu
Ultra-rapid (observed)	~ 3 cm	3 – 9 časova
Rapid	~ 2.5 cm	17 – 41 časova
Final	~ 2.5 cm	12 – 18 dana

Greške satelitskih časovnika. GPS sateliti su opremljeni atomskim rubidijumskim i cezijumskim oscilatorima (časovnicima) koji veoma stabilno održavaju svoju frekvenciju tokom dugog vremenskog perioda. Međutim, i pored visoke tačnosti, ovi časovnici odstupaju od sistemskog GPS vremena za neki mali iznos koji, uz to, nije ni konstantan.

Kontrolni GPS segment određuje pored efemerida i stanje časovnika svakog satelita. Odstupanje pokazivanja časovnika od sistemskog GPS vremena Δt modelira se polinomom drugog stepena:

$$\Delta t = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2, \quad (6.6)$$

pri čemu a_0 , a_1 i a_2 predstavljaju koeficijente, a t_0 je referentno vreme. Pošto sateliti emituju koeficijente u okviru navigacione poruke, korisnik je u stanju da u svakom trenutku vremena popravi pokazivanje časovnika satelita. Koeficijenti nisu apsolutno tačni jer ih kontrolni segment ocenjuje na osnovu merenja, tako da i popravljena očitavanja satelitskih časovnika sadrže grešku koja se kreće do 5 ns. Množenjem brzinom svetlosti dobija se da je greška pseudoduzina usled greške satelitskih časovnika reda veličine 1.5 m.

Za preciznije aplikacije moguće je koristiti odstupanja satelitskih časovnika od sistemskog GPS vremena koja takođe određuje IGS. Ova odstupanja kategorisana su na isti način kao i IGS orbitalni proizvodi, i tačnost im se kreće od 3 ns (~ 1 m) za Ultra-rapid (predicted) odstupanja koja su dostupna u realnom vremenu, pa sve do 0.075 ns (~ 2 cm) za kategoriju Final.

Greške sredine prostiranja signala. Na svom putu od satelitskih antena do prijemnika GPS signali prolaze delom kroz praktično prazan vasionki prostor, a delom kroz Zemljin atmosferski omotač. Pošto se brzina moduliranih nosećih talasa menja pri prolasku kroz medijum koji nije vakuum, to unosi dodatnu nesigurnost u merenje vremena puta signala.

U zavisnosti od toga koja se pojava ispituje, Zemljin atmosferski omotač može se podeliti u različite slojeve. Sa stanovišta kretanja elektromagnetnih talasa koji imaju GPS frekvencije, Zemljina atmosfera deli se na jonosferu i troposferu. Ova dva atmosferska sloja karakteristična su po tome što se u njima GPS signali različito ponašaju.

Jonosfersko kašnjenje signala. Zemljinu jonosferu čine viši delovi atmosfere (od 50 km do 1500 km), u kojima je proces jonizacije dovoljnog intenziteta da utiče na prostiranje radio talasa. Sam proces jonizacije sastoji se u odvajanju elektrona iz atoma i molekula gasova atmosfere. Slobodni elektroni koji više nisu u sastavu atoma i molekula nazivaju se jonima. Njihovo stvaranje odvija se pod uticajem raznih oblika Sunčevog zračenja. U tom smislu najznačajniji je takozvani *F* jonosferski region koji počinje na visini od oko 150 km, a u kojem na proces

jonizacije prevashodno utiče Sunčevo ultraljubičasto zračenje. Jonizacija je najintenzivnija tokom dana i dostiže maksimum kasno popodne. Međutim, tokom noći nema direktnog Sunčevog uticaja, tako da se veliki broj slobodnih elektrona ponovo vezuje za atome.

Osnovnu kvantitativnu karakteristiku stanja jonosfere predstavlja gustina elektrona, odnosno broj slobodnih elektrona u jedinici zapremine, N_e . Ova gustina zavisi od mnogih faktora, kao što su doba dana ili godine, magnetne bure ili jedanaestogodišnji ciklus Sunčevih pega. Varijacija gustine elektrona može dostići i nekoliko redova veličine.

Jonosfera dvojako utiče na GPS signale, zato što elektromagnetni talasi koji napuštaju satelitske GPS antene predstavljaju kombinaciju nosećih talasa visoke frekvencije, i fazne modulacije pseudoslučajnim kodovima niske frekvencije. To znači da se prilikom prolaska GPS signala kroz jonosferu razlikuju dva indeksa prelamanja: grupni indeks prelamanja n_g i fazni indeks prelamanja n_f . Izrazi za ove indekse prelamanja glase:

$$n_g = 1 + \frac{40.3N_e}{f^2}, \quad n_f = 1 - \frac{40.3N_e}{f^2}, \quad (6.7)$$

pri čemu f označava frekvenciju, a 40.3 predstavlja numeričku vrednost konstante. Sredine, kao što je jonosfera, čiji indeks prelamanja zavisi od frekvencije, nazivaju se disperzivnim sredinama.

Iz jednačine (6.7) sledi da će prisustvo jonosfere uzrokovati kašnjenje modulacione faze i ubrzavanje faze nosećeg talasa. To znači da će izmerene kodne pseudoduzine biti veće, a fazne pseudoduzine manje od istinite vrednosti. Greška izmerenih GPS pseudoduzina usled jonosferskog kašnjenja zavisi od zenitnog odstojanja pravca ka satelitu čiji se signali primaju. Pseudoduzine u pravcu zenita mogu imati grešku zbog jonosferske refrakcije 10 – 30 m. Međutim, kada se opaža satelit koji je blizu horizonta, greška dostiže i 150 m, jer signal u tom slučaju duže putuje kroz jonosferu.

Troposfersko kašnjenje signala. Atmosferski sloj od fizičke površi Zemlje do visine od približno 80 km naziva se neutralnom atmosferom, i obuhvata tri temperaturno razdvojena regiona: troposferu, stratosferu i deo mezosfere. Za razliku od jonosfere, neutralna atmosfera nije disperzivna sredina. Njen indeks prelamanja n zavisi samo od aktuelnih atmosferskih parametara, temperature T , atmosferskog pritiska P i parcijalnog pritiska vodene pare e :

$$n = 1 + c_1 \frac{P}{T} + c_2 \frac{e}{T^2}, \quad (6.8)$$

gde c_1 i c_2 predstavljaju konstante. Neutralni atmosferski region često se u celini naziva troposferom zbog dominantnog uticaja na prostiranje radio talasa, iako

troposfera u užem smislu reči obuhvata samo najnižih 10 km atmosfere gde temperaturni gradijent u proseku iznosi $-6.5^{\circ}\text{C}/\text{km}$.

Troposfera sadrži 80% ukupne molekularne mase atmosfere, i gotovo celokupnu količinu vodene pare i aerosola. Suvi vazduh troposfere sastoji se od mešavine gasova azota, kiseonika i argona, koja obuhvata 99.95 ukupne zapremine. Prisustvo vodene pare uglavnom je rezultat isparavanja vodenih površina i vegetacije, i njen sadržaj u ukupnoj zapremini iznosi od 1% do 4%. Za razliku od suvog vazduha koji predstavlja veoma konzistentnu mešavinu gasova, vodena para skoncentrisana je u najnižih 4 km troposfere, gde varira kako vremenski tako i prostorno.

Greška merenja pseudodužina usled uticaja troposferske refrakcije takođe zavisi od zenitnog odstojanja. U pravcu zenita greška iznosi oko 2.3 m, dok za opažanja prema satelitima koji su blizu horizonta dostiže i 15 m.

Greške prijemnika. U ovu grupu spadaju greška časovnika prijemnika, merni šum prijemnika koji utiče na preciznost kodnih i faznih merenja, kao i uticaj višestruke refleksije GPS signala od prirodnih ili veštačkih površina u okolini prijemnika.

Pod greškom časovnika prijemnika podrazumeva se odstupanje časovnika prijemnika od sistemskog GPS vremena. Zahtevi za sinhronizacijom časovnika prijemnika sa sistemskim vremenom nisu veliki, zbog čega se u prijemnicima koriste obični kvarni oscilatori. Savremeni prijemnici konstruisani su tako da ne dopuštaju da odstupanje časovnika bude veće od 1 ms, iako to u linearnim jedinicama iznosi oko 300 km. Uobičajeno je da se greška časovnika prijemnika ocenjuje kao nepoznata veličina u postupku matematičke obrade merenja, ili da se u potpunosti eliminiše odgovarajućom kombinacijom originalnih merenja.

Šum prijemnika pojavljuje se zbog toga što u elektronskim komponentama uvek ima kretanja elektrona, a time i električne struje. Kodne pseudodužine imaju zbog toga preciznost od oko 1 m, dok je preciznost faznih pseudodužina 1 – 2 mm.

Višestruka refleksija je pojava da GPS antena pored toga što prima direktno signale sa GPS satelita, prima i signale koji se odbijaju od okolnih glatkih prirodnih ili veštačkih površina. Direktni i odbijeni signali mešaju se u anteni, zbog čega kodne pseudodužine mogu imati grešku od nekoliko metara. Fazne pseudodužine, međutim, teorijski ne mogu imati grešku usled višestruke refleksije veću od četvrtine talasne dužine (oko 5 cm). Za razliku od šuma prijemnika koji se ne može nikako otkloniti, uticaj višestruke refleksije moguće je znatno smanjiti ako se GPS antena ne postavlja u blizini reflektujućih površi.

Ostale greške merenja. Pored opisanih izvora grešaka, mogu se navesti i neki drugi efekti na kodne i fazne pseudodužine koji se eventualno moraju tretirati u preciznim aplikacijama:

Hardverska kašnjenja. Kodovi na istom nosećem talasu, kao i kodovi na različitim frekvencijama nisu međusobno sinhronizovani zbog različitih digitalnih i analognih putanja kojima se kreću. Kod satelita se radi o kašnjenjima signala na putu od tačke generisanja do tačke emitovanja, dok je kod prijemnika reč o kašnjenjima od mesta prijema do mesta obrade signala. Razlika kašnjenja između frekvencija označava se kao diferencijalno kodno odstupanje (DCB) i može iznositi oko 3 ns u satelitu i 10 ns u prijemniku. Stabilnost ovih vrednosti procenjuje se na 0.5 ns odnosno 1 ns respektivno.

Varijacije faznog centra antene. Fazni centar antene je zamišljena tačka antene iz koje se vrši emitovanje signala (satelit), odnosno prijem signala (prijemnik). Pošto nije direktno dostupan, fazni centar satelitske antene opisuje se svojim srednjim položajem u odnosu na centar mase satelita (u slučaju preciznih efemerida). Kod antene prijemnika, taj položaj odnosi se na referentnu tačku antene (ARP).

Srednji položaj faznog centra služi da dovede u vezu tačke između kojih se meri kodna odnosno fazna pseudoduzina. Međutim, aktuelne tačke emitovanja i prijema signala pokazuju varijacije oko srednjeg položaja, čija veličina zavisi od azimuta i zenitnog odstojanja putanje signala, odnosno relativnog položaja satelita i prijemnika, i može dostići centimetarske vrednosti.

Relativistički efekti. Kod korišćenja satelitskih časovnika moraju se uzeti u obzir efekti kako opšte tako i specijalne teorije relativiteta. Razlog za to je relativno velika brzina kretanja satelita (specijalna teorija), kao i razlika u gravitacionom potencijalu između visine leta satelita i površi Zemlje (opšta teorija). Konstantni deo relativističkog efekta reguliše se smanjenjem osnovne frekvencije oscilatora pre lansiranja satelita za 0.0045 Hz. Periodični deo efekta koji preostaje zbog eliptične satelitske putanje kreće se u rasponu od 0 ns do 45 ns (~ 14 m) za putanju sa ekscentricitetom $e = 0.02$, mada može dostići i 70 ns (~ 20 m).

Poglavlje 7

Matematički model GPS merenja

7.1 Funkcionalni model pseudodužina

Kao što je već rečeno, GPS prijemnik meri kodne pseudodužine do satelita na taj način što upoređuje primljene kodove sa kodovima koje sam generiše, čime efektivno meri ustvari vreme puta signala. Fazne pseudodužine mere se tako što GPS prijemnik upoređuje fazu primljenog nosećeg talasa sa fazom nosećeg talasa kojeg sam generiše, čime efektivno meri faznu razliku. Funkcionalni model ovih pseudodužina predstavlja ustvari funkcionalnu vezu između merenih i nepoznatih veličina, koje u opštem slučaju predstavljaju koordinate tačaka.

Funkcionalni model kodnih pseudodužina. Kodnu pseudodužinu od stanice A do satelita i koja je u trenutku GPS vremena t izmerena na frekvenciji f (ili 1 ili 2) označavaćemo sa $P_{A,f}^i(t)$. Ona se dobija kada se brzinom svetlosti c_0 pomnoži razlika čitanja časovnika prijemnika t_A u trenutku prijema t , i časovnika satelita t^i u trenutku kada je signal emitovan $t - \tau$:

$$P_{A,f}^i(t) = c_0[t_A(t) - t^i(t - \tau)]. \quad (7.1)$$

Pri tome τ označava istinito vreme puta signala od satelita do prijemnika. Visina satelita nad Zemljinom površi iznosi oko 20 000 km, tako da je vreme puta signala manje od 0.1 s.

Pošto časovnici prijemnika i satelita odstupaju od sistemskog vremena, njihova čitanja u trenucima t i $t - \tau$ iznosiće:

$$\begin{aligned} t_A(t) &= t + \delta t_A(t) \\ t^i(t - \tau) &= t - \tau + \delta t^i(t - \tau) \end{aligned} \quad (7.2)$$

gde su sa δt_A i δt^i označene greške časovnika prijemnika i satelita u odgovarajućim trenucima vremena. Zamenom izraza (7.2) u izraz (7.1) dobija se:

$$P_{A,f}^i(t) = c_0\tau + c_0[\delta t_A(t) - \delta t^i(t - \tau)]. \quad (7.3)$$

Proizvod brzine svetlosti i vremena puta $c_0\tau$ daje ukupan put koji je signal prešao od satelita do prijemnika, prolazeći naravno tom prilikom kroz jonosferu i troposferu. Ovaj put je jednak zbiru pravolinijskog (geometrijskog) rastojanja r između satelita i prijemnika, troposferskog kašnjenja T i jonosferskog kašnjenja I :

$$c_0\tau = r_A^i(t, t - \tau) + T_A^i(t) + I_{A,f}^i(t). \quad (7.4)$$

Primetimo da je geometrijsko rastojanje funkcija dva trenutka vremena jer se odnosi na dužinu između satelita u trenutku emitovanja signala i prijemnika u trenutku prijema signala. Osim toga, u članu za jonosfersko kašnjenje stoji indeks

frekvencije f zbog toga što je jonosfera disperzivna sredina. Da bi se kompletirao funkcionalni model kodnih pseudodužina potrebno je još uzeti u obzir sledeće:

- Položaj satelita u trenutku emitovanja signala računa se na osnovu podataka navigacione poruke, što znači da nije apsolutno tačno poznat. Stoga se mora predvideti i greška kodne pseudodužine E satelitskih efemerida u trenutku emitovanja signala $t - \tau$. Pošto se ta greška sporo menja, može se reći da ima istu vrednost i u trenutku prijema signala t .
- Satelitski časovnici su visokostabilni i njihova greška se takođe sporo menja. Stoga se može reći da je greška satelitskog časovnika u trenutku prijema signala t ista kao i u trenutku emitovanja signala $t - \tau$.
- Izmerena kodna pseudodužina opterećena je greškom M zbog višestruke refleksije koja nastupa kada se direktni signal meša u prijemniku sa signalom odbijenim od okolnih prirodnih i veštačkih reflektujućih površi.
- Konačno, u funkcionalnom modelu mora biti prisutna i slučajna greška merenja ε koja se nikada ne može u potpunosti izbeći.

Pošto se sada svi članovi modela odnose na trenutak prijema signala t , eksplicitna zavisnost od vremena se može izostaviti da bi se pojednostavila notacija. Konačni oblik funkcionalnog modela u tom slučaju glasi:

$$P_{A,f}^i = r_A^i + E_A^i + c_0 \delta t_A - c_0 \delta t^i + T_A^i + I_{A,f}^i + M_{A,f,P}^i + \varepsilon_{A,f,P}^i. \quad (7.5)$$

Funkcionalni model faznih pseudodužina. Faznu pseudodužinu od stanice A do satelita i koja je u trenutku GPS vremena t izmerena na frekvenciji f (ili 1 ili 2) označavaćemo sa $L_{A,f}^i(t)$. Ona se dobija kada se talasnom dužinom λ pomnoži razlika faze nosećeg talasa prijemnika φ_A u trenutku prijema t , i faze nosećeg talasa satelita φ^i u trenutku kada je signal emitovan $t - \tau$:

$$L_{A,f}^i(t) = \lambda_f [\varphi_{A,f}(t) - \varphi_f^i(t - \tau)] + \lambda_f N_{A,f}^i. \quad (7.6)$$

Veličina N predstavlja takozvanu faznu neodređenost. Ona se pojavljuje zato što je noseći talas jednostavni periodični sinusni talas, tako da prijemnik može da meri faznu razliku samo u okviru jedne talasne dužine. Fazna neodređenost ostaje konstantna, odnosno ne zavisi od vremena, sve dok prijemnik neprekidno prati signal sa konkretnog satelita. Bilo kakav prekid praćenja signala znači potpuno novu faznu neodređenost.

Imajući u vidu da je faza jednaka proizvodu iz frekvencije i vremena, faze nosećih talasa prijemnika i satelita mogu se napisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}\varphi_{A,f}(t) &= f_f t_A(t) = f_f [t + \delta t_A(t)] \\ \varphi_f^i(t - \tau) &= f_f t^i(t - \tau) = f_f [t - \tau + \delta t^i(t - \tau)]\end{aligned}\quad (7.7)$$

Kada se izraz (7.7) zameni u izrazu (7.6), i pri tome uzme u obzir fundamentalna relacija u vakuumu između brzine svetlosti, frekvencije i talasne dužine $c_0 = \lambda f$, dobija se:

$$L_{A,f}^i(t) = c_0 \tau + c_0 [\delta t_A(t) - \delta t^i(t - \tau)] + \lambda_f N_{A,f}^i. \quad (7.8)$$

Postupajući dalje kao u slučaju kodnih pseudodužina, dolazi se do funkcionalnog modela faznih pseudodužina sledećeg oblika:

$$L_{A,f}^i = r_A^i + E_A^i + c_0 \delta t_A - c_0 \delta t^i + T_A^i - I_{A,f}^i + \lambda_f N_{A,f}^i + M_{A,f,L}^i + \varepsilon_{A,f,L}^i. \quad (7.9)$$

Upoređenje funkcionalnih modela kodnih i faznih pseudodužina, (7.5) i (7.9), otkriva da oni imaju veoma sličnu strukturu, ali i da između njih postoje sledeće razlike:

- Kod kodnih pseudodužina je znak člana koji opisuje jonosfersku refrakciju pozitivan, dok je kod faznih pseudodužina negativan. Ova razlika potiče od činjenice da prisustvo jonosfere produžava kodne pseudodužine, a skraćuje fazne pseudodužine.
- Kod faznih pseudodužina postoji član sa faznom neodređenošću, dok kod kodnih pseudodužina tog člana nema. Prema tome, kodne pseudodužine predstavljaju punu meru rastojanja između satelita i prijemnika, za razliku od faznih pseudodužina koje sadrže nepoznati broj talasnih dužina.
- Uticaj višestruke refleksije na kodne i fazne pseudodužine značajno se razlikuje. Dok kod kodnih pseudodužina dostiže metarske iznose, a u ekstremnim uslovima čak i nekoliko desetina metara, taj uticaj na fazne pseudodužine ne prelazi vrednost od nekoliko centimetara.
- Slučajne greške merenja kodnih i faznih pseudodužina razlikuju se za dva do tri reda veličine. Slučajna greška merenja kodnih pseudodužina je metarskog nivoa, dok su kod faznih pseudodužina u pitanju milimetri.

Na osnovu navedenih razlika može se reći da kodne pseudodužine predstavljaju potpuna, ali neprecizna rastojanja, a fazne pseudodužine veoma precizna ali zato neodređena rastojanja. Kada se, međutim, na neki način reši fazna neodređenost odnosno ceo broj talasnih dužina N , fazne pseudodužine pretvaraju se u potpuna, milimetarski precizna rastojanja, kojima se u geodeziji mogu određivati isto tako milimetarski precizne koordinate tačaka.

Preostaje još pitanje gde su u funkcionalnim modelima (7.5) i (7.9) koordinate tačke A ? One su implicitno sadržane u geometrijskom rastojanju r . Ako su $x_A(t)$,

$y_A(t)$ i $z_A(t)$ koordinate tačke A u trenutku prijema, a $x^i(t - \tau)$, $y^i(t - \tau)$ i $z^i(t - \tau)$ koordinate satelita i u trenutku emitovanja signala, tada se geometrijsko rastojanje r uvek može napisati u obliku:

$$r_A^i = \sqrt{\left[x_A(t) - x^i(t - \tau) \right]^2 + \left[y_A(t) - y^i(t - \tau) \right]^2 + \left[z_A(t) - z^i(t - \tau) \right]^2}. \quad (7.10)$$

7.2 Određivanje položaja GPS satelita

Iz prethodnog izraza vidi se da je za računanje geometrijskog rastojanja potrebno odrediti koordinate GPS satelita u trenutku emitovanja signala. Do njega se dovoljno tačno može doći ako se od poznatog trenutka prijema signala oduzme vreme puta signala P/c_0 , gde je P izmerena kodna pseudoduzina, a c_0 brzina svetlosti u vakuumu.

Određivanje položaja GPS satelita vrši se u principu uz pomoć Keplerovih orbitalnih parametara. Oni, sa izuzetkom srednje anomalije, imaju konstantne vrednosti tokom vremena, ali to važi samo za neporemećeno satelitsko kretanje. U realnim uslovima postoji čitav niz poremećajnih sila koje utiču na kretanje satelita.

Tabela 7.1. Podaci navigacione poruke koji omogućuju računanje koordinata GPS satelita u proizvoljnom trenutku vremena.

Parametar	Značenje
t_{0e}	referentni trenutak vremena satelitskih efemerida na koji se odnose svi Keplerovi elementi
$a^{1/2}$	kvadratni koren velike poluose satelitske orbite
e	prvi numerički ekscentricitet satelitske orbite
i_0	inklinacija satelitske orbite u referentnom trenutku vremena
Ω_0	longituda uzlaznog čvora satelitske orbite u referentnom trenutku vremena, u odnosu na položaj Griničkog meridijana na početku aktuelne GPS nedelje
ω	argument perigeuma satelitske orbite
M_0	srednja anomalija GPS satelita u referentnom trenutku vremena
di/dt	brzina promene inklinacije satelitske orbite
$\dot{\Omega}$	brzina promene rektascenzije uzlaznog čvora satelitske orbite
Δn	korekcija srednjeg kretanja satelita
C_{re}, C_{rs}	harmonijski koeficijenti za računanje korekcije rastojanja do satelita
C_{uc}, C_{us}	harmonijski koeficijenti za računanje korekcije argumenta širine
C_{ic}, C_{is}	harmonijski koeficijenti za računanje korekcije inklinacije satelitske orbite

Zbog toga se aktuelno satelitsko kretanje mora opisivati i dodatnim parametrima koji definišu promene Keplerovih elemenata tokom vremena. Rešenje koje je usvojeno pri dizajnu NAVSTAR sistema podrazumeva sadržaj navigacione poruke prikazan u tabeli 7.1, na osnovu kojeg se računanje položaja GPS satelita u proizvoljnom trenutku vremena t vrši u sledećim koracima:

- Vremensko udaljenje t_k od referentnog trenutka vremena:

$$t_k = t - t_{0e}, \quad (7.11)$$

- Popravljenno srednje kretanje satelita n (pri čemu je vrednost geocentrične gravitacione konstante GM poznata):

$$n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} + \Delta n, \quad (7.12)$$

- Srednja anomalija M_k :

$$M_k = M_0 + n \cdot t_k, \quad (7.13)$$

- Ekscentrična anomalija E_k iterativnim rešavanjem Keplerove jednačine:

$$E_k = M_k + e \sin E_k, \quad (7.14)$$

- Prava anomalija v_k :

$$\tan \frac{v_k}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E_k}{2}, \quad (7.15)$$

- Približna vrednost argumenta širine φ_k :

$$\varphi_k = \omega + v_k, \quad (7.16)$$

- Korekcija za rastojanje do satelita δr_k :

$$\delta r_k = C_{rc} \cos(2\varphi_k) + C_{rs} \sin(2\varphi_k), \quad (7.17)$$

- Korekcija za argument širine δu_k :

$$\delta u_k = C_{uc} \cos(2\varphi_k) + C_{us} \sin(2\varphi_k), \quad (7.18)$$

- Korekcija za inklinaciju orbite δi_k :

$$\delta i_k = C_{ic} \cos(2\varphi_k) + C_{is} \sin(2\varphi_k), \quad (7.19)$$

- Korigovano rastojanje do satelita r_k :

$$r_k = a(1 - e \cos E_k) + \delta r_k, \quad (7.20)$$

- Korigovani argument širine u_k :

$$u_k = \varphi_k + \delta u_k, \quad (7.21)$$

- Korigovana inklinacija orbite i_k :

$$i_k = i_0 + \frac{di}{dt} t_k + \delta i_k, \quad (7.22)$$

- Korigovana longituda uzlaznog čvora Ω_k (pri čemu je vrednost uglovne brzine rotacije Zemlje $\dot{\Omega}_e$ poznata):

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e) t_k - \dot{\Omega}_e t_{0e}, \quad (7.23)$$

- Koordinate satelita u orbitalnom sistemu x_0, y_0, z_0 :

$$\begin{aligned} x_0 &= r_k \cos u_k \\ y_0 &= r_k \sin u_k, \\ z_0 &= 0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

- Koordinate satelita u sistemu WGS84:

$$\begin{aligned} x_{WGS84} &= x_0 \cos \Omega_k - y_0 \cos i_k \sin \Omega_k \\ y_{WGS84} &= x_0 \sin \Omega_k + y_0 \cos i_k \cos \Omega_k . \\ z_{WGS84} &= y_0 \sin i_k \end{aligned} \quad (7.25)$$

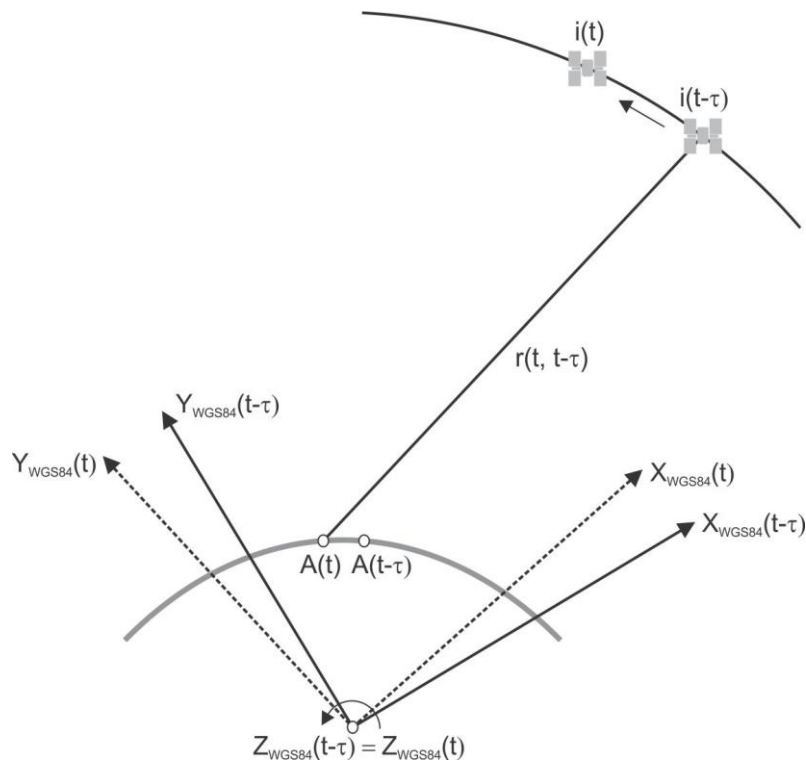
Korekciju longitude uzlaznog čvora u izrazu (7.23) potrebno je dodatno objasniti. Parametar Ω_0 koji je dat u okviru navigacione GPS poruke predstavlja longitudu uzlaznog čvora satelitske orbite u referentnom trenutku vremena, u odnosu na položaj Griničkog meridijana na početku aktuelne GPS nedelje. On se dakle može prikazati kao:

$$\Omega_0 = \Omega(t_{0e}) - \theta(t_0), \quad (7.26)$$

gde $\Omega(t_{0e})$ označava rektascenziju uzlaznog čvora u referentnom trenutku vremena, dok je $\theta(t_0)$ časovni ugao Griničkog meridijana u trenutku početka aktuelne GPS nedelje. Odatle sledi da je longituda uzlaznog čvora u proizvoljnom trenutku vremena t jednaka:

$$\begin{aligned}
\Omega_k &= \Omega(t) - \theta(t) \\
&= \Omega(t_{0e}) + \dot{\Omega}t_k - \theta(t_0) - \dot{\Omega}_e(t_{0e} + t_k). \\
&= \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e)t_k - \dot{\Omega}_e t_{0e}
\end{aligned}
\tag{7.27}$$

Iako se opisanim algoritmom dobijaju koordinate GPS satelita u trenutku emitovanja signala, potrebno je napomenuti da se te koordinate odnose na referentni sistem WGS84 u istom tom trenutku. Međutim, dok signal putuje prema anteni na Zemljinoj površi, referentni sistem WGS84 će se zarotirati zajedno sa Zemljom za neki mali ugao, i u trenutku prijema signala zauzeće položaj koji nije identičan položaju koji je imao u trenutku emitovanja signala (slika 7.1). Da bi dužina između prijemnika A i satelita i mogla da se izrazi u funkciji koordinata krajnjih tačaka, te koordinate moraju se odnositi na jedinstveni koordinatni sistem. To znači da je WGS84 koordinate satelita u trenutku emitovanja signala potrebno transformisati u referentni sistem WGS84 za njegov položaj u trenutku prijema signala. Pojava se naziva Sanjakovim efektom, i očigledno predstavlja posledicu konačne brzine prostiranja signala.



Slika 7.1. Ilustracija Sanjakovog efekta koji nastaje kao posledica konačne brzine prostiranja signala.

Transformacija kojom se uzima u obzir Sanjakov efekat lako se izvodi. Ako je $\mathbf{x}_{\text{WGS84}, t-\tau}$ vektor položaja satelita u sistemu WGS84 za trenutak emitovanja signala $t - \tau$, tada se vektor položaja satelita $\mathbf{x}_{\text{WGS84}, t}$ koji se odnosi na sistem WGS84 u trenutku prijema signala t dobija kao:

$$\mathbf{x}_{\text{WGS84}, t} = \mathbf{R}_3(\dot{\Omega}_e \tau) \cdot \mathbf{x}_{\text{WGS84}, t-\tau}, \quad (7.28)$$

pri čemu matrica rotacija \mathbf{R}_3 ima oblik:

$$\mathbf{R}_3(\dot{\Omega}_e \tau) = \begin{bmatrix} \cos(\dot{\Omega}_e \tau) & \sin(\dot{\Omega}_e \tau) & 0 \\ -\sin(\dot{\Omega}_e \tau) & \cos(\dot{\Omega}_e \tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

7.3 Modeli popravaka GPS merenja

Kada je u pitanju korišćenje GPS u geodetske svrhe, najkorisniju informaciju u funkcionalnim modelima merenih kodnih i faznih pseudoduzina predstavlja geometrijsko rastojanje r jer su u njemu sadržane koordinate tačke čiji se položaj određuje. Međutim, funkcionalni modeli pokazuju da su u strukturi merenih pseudoduzina prisutne razne greške, kao što su odstupanja časovnika, troposferska i jonosferska refrakcija, ili uticaj višestruke refleksije. Da bi se obezbedila što viša tačnost određivanja koordinata tačaka, neophodno je da se te greške svedu na najmanju moguću meru, ili po mogućstvu potpuno eliminišu. Neke od njih moguće je u manjoj ili većoj meri kompenzovati računanjem odgovarajućih popravaka. U tom smislu ograničićemo se u nastavku na računanje popravaka za satelitski časovnik, jonosfersku i troposfersku refrakciju.

Popravka za satelitski časovnik. Već je pomenuto da kontrolni GPS segment određuje pored satelitskih orbita i stanja časovnika GPS satelita. Rezultat ovog određivanja predstavljaju koeficijenti kvadratnog polinoma a_{f0} , a_{f1} i a_{f2} koji se zajedno sa referentnim vremenom časovnika t_{0c} smeštaju u navigacionu poruku da bi bili na raspolaganju korisnicima u realnom vremenu.

Popravka za satelitski časovnik δt^i u proizvoljnom trenutku vremena t računa se uz pomoć ovih podataka po izrazu:

$$\delta t^i = a_{f0} + a_{f1}(t - t_{0c}) + a_{f2}(t - t_{0c})^2 + \Delta t_r, \quad (7.30)$$

pri čemu Δt_r označava periodičnu relativističku korekciju. Ona je funkcija orbitalnog položaja GPS satelita, i određuje se kao:

$$\Delta t_r = Fe\sqrt{a} \sin E. \quad (7.31)$$

Konstanta F ima vrednost $-4.442\,807\,633 \cdot 10^{-10}$, e i a predstavljaju prvi numerički ekscentricitet i veliku poluosu satelitske orbite iz navigacione poruke, a E je ekscentrična anomalija koja se lako računa. Rezultat za relativističku popravku časovnika satelita dobija se u sekundama i može se smatrati tačnim.

Alternativni izraz za računanje relativističke popravke, koji je pogodniji u slučaju da se koriste precizne efemeride, ima oblik:

$$\Delta t_r = -2 \frac{\mathbf{x}^i \cdot \mathbf{v}^i}{c_0^2}, \quad (7.32)$$

gde \mathbf{x}^i i \mathbf{v}^i predstavljaju respektivno vektore položaja i brzine satelita i .

Popravka za jonosfersku refrakciju. Jonosfera je disperzivna sredina za radio talase koje koristi GPS, tako da je još u fazi dizajna NAVSTAR sistema bilo predviđeno da GPS sateliti emituju signale na dve frekvencije. Kombinacijom merenja izvršenih na dve frekvencije moguće je gotovo u potpunosti eliminisati uticaj jonosferskog kašnjenja signala, ali je za to naravno potrebno vršiti merenja dvofrekventnim GPS prijemnikom. Korisnici opremljeni jednofrekventnim GPS prijemnicima još uvek mogu svoja merenja korigovati zbog jonosferske refrakcije koristeći podatke iz satelitske navigacione poruke. Ti podaci sastoje se od ukupno 8 koeficijenata α_i, β_i ($i = 0, \dots, 3$) pomoću kojih se računaju amplituda AMP i period PER jonosferskog kašnjenja u zenitnom pravcu:

$$\begin{aligned} \text{AMP} &= \sum_{i=0}^3 \alpha_i \varphi_m^i \\ \text{PER} &= \sum_{i=0}^3 \beta_i \varphi_m^i \end{aligned} \quad (7.33)$$

pri čemu φ_m označava geomagnetsku širinu takozvane jonosferske tačke, odnosno tačke u kojoj signali prodiru kroz zamišljeni sloj za koji se smatra da sadrži skoncentrisanu svu jonosferu. Za visinu ovog jonosferskog sloja obično se usvaja vrednost između 300 km i 400 km. Zenitno jonosfersko kašnjenje pseudoduzine na prvoj frekvenciji računa se u linearnim jedinicama po modelu:

$$I_1^z = A_1 + c_0 \text{AMP} \cos\left(\frac{2\pi(t - A_3)}{\text{PER}}\right), \quad (7.34)$$

gde je $A_1 = 1.5$ m, $A_3 = 14^h$ po lokalnom vremenu, a parametar t označava lokalno vreme jonosferske tačke. Jonosfersko kašnjenje u proizvoljnom pravcu I_1 dobija se

pomoću funkcije zenitnog odstojanja z' pod kojim signal prolazi kroz jonosfersku tačku:

$$I_1 = \frac{I_1^z}{\cos z'} . \quad (7.35)$$

Prikazani postupak po kojem se računa jonosfersko kašnjenje signala zove se model KLOBUCHAR po svom autoru. Model KLOBUCHAR, čije koeficijente sadrži navigaciona poruka, formulisan je tako da odražava prosečne jonosferske uticaje tokom cele godine i za celu Zemljinu kuglu. Zbog toga se ovim modelom ne može eliminisati ukupan uticaj jonosferske refrakcije. Procenjeno je da se modelom KLOBUCHAR može u najboljem slučaju obuhvatiti oko 50% – 60% jonosferskog kašnjenja signala.

Popravka za troposfersku refrakciju. Za razliku od jonosfere, troposfera nije disperzivna sredina za radio talase koje koristi GPS, tako da njihova brzina zavisi samo od atmosferskih parametara: temperature vazduha, atmosferskog pritiska i vlažnosti (parcijalnog pritiska vodene pare). S obzirom na to da se atmosferski parametri mogu direktno meriti ili eventualno procenjivati na lokaciji na kojoj se nalazi GPS prijemnik, u satelitskoj navigacionoj poruci nisu predviđeni nikakvi podaci u vezi troposferske refrakcije.

Uticaj troposferske refrakcije za pseudodužinu u pravcu zenita (T_{z0}) razdvaja se na komponentu troposferskog uticaja suvih atmosferskih gasova ($T_{z,d}$) i komponentu troposferskog uticaja vodene pare ($T_{z,w}$):

$$T_{z0} = T_{z,d} + T_{z,w} . \quad (7.36)$$

Suva komponenta po pravilu zavisi od temperature (T) i atmosferskog pritiska (P), dok dominantni uticaj u vlažnoj komponenti ima parcijalni pritisak vodene pare (e).

Na raspolaganju su mnogobrojni modeli kojima se može izračunati uticaj troposferskog kašnjenja signala, ali se najčešće koriste model SAASTAMOINEN i model HOPFIELD, nazvani tako po svojim autorima. Ova dva modela izvedena su sa različitim polazištima. Model HOPFIELD zasniva se na empirijski određenoj zavisnosti refrakcionog broja od visine nad površi Zemlje. S druge strane, model SAASTAMOINEN izveden je na osnovu fizičkih zakona idealnih gasova.

Komponente zenitnog troposferskog kašnjenja računaju se po modelu SAASTAMOINEN sledećim formulama:

$$\begin{aligned} T_{z,d} &= 0.002277(1 + 0.0026 \cos 2\varphi + 0.00028H)P \\ T_{z,w} &= 0.002277 \left(\frac{1255}{T} + 0.05 \right) e \end{aligned} , \quad (7.37)$$

pri čemu φ označava geodetsku širinu stanice, H je visina stanice u (m) P je atmosferski pritisak na stanici u (mbar), T je temperatura vazduha na stanici u ($^{\circ}\text{K}$), i e je parcijalni pritisak vodene pare na stanici u (mbar). Rezultati se dobijaju u metrima. SAASTAMOINEN je izveo i poboljšane verzije svojih formula sa korekcionim članovima koji zavise od visine stanice i zenitnog odstojanja satelita.

Računanje po modelu HOPFIELD vrši se u skladu sa sledećim osnovnim formulama:

$$\begin{aligned} T_{z,d} &= 77.6 \cdot 10^{-6} \frac{P}{T} \cdot \frac{h_d}{5} \\ T_{z,w} &= 0.373 \frac{e}{T^2} \cdot \frac{h_w}{5} \end{aligned} \quad (7.38)$$

gde je h_d referentna visina za suhu komponentu i iznosi 43 000 m, h_w je referentna visina za vlažnu komponentu i iznosi 12 000 m, a ostale oznake i njihove jedinice već su definisane u modelu SAASTAMOINEN. Rezultati se dobijaju u metrima. Navedene referentne visine su, ustvari, samo prosečne. Optimalne vrednosti nalaze se u intervalima $40 \text{ km} < h_d < 45 \text{ km}$, i $10 \text{ km} < h_w < 13 \text{ km}$. Tokom vremena izvedeno je nekoliko modifikacija modela HOPFIELD.

Većina drugih modela, pored modela SAASTAMOINEN i HOPFIELD, takođe definiše troposfersko kašnjenje signala samo u zenitnom pravcu. Međutim, pseudoduzina po pravilu nije u pravcu zenita već se odnosi na satelit koji je pod zenitnim odstojanjem z u odnosu na stanicu. Uticaj troposferske refrakcije za takvu pseudoduzinu (T_z) najjednostavnije se dobija kada se zenitna vrednost (T_{z0}) podeli kosinusom zenitnog odstojanja:

$$T_z = \frac{T_{z0}}{\cos z} \quad (7.39)$$

Postoje, međutim, i mnogo adekvatniji modeli redukcionih funkcija $m(z)$, kojima se zenitno troposfersko kašnjenje preslikava u kašnjenje pod proizvoljnim zenitnim odstojanjem. Pri tome se te redukcione funkcije mogu razlikovati za suhu i vlažnu troposfersku komponentu čak i po obliku. Na primer, model redukcionih funkcija MARINI:

$$m(z) = \frac{1 + \frac{a}{1 + \frac{b}{1 + c}}}{\cos z + \frac{a}{\cos z + \frac{b}{\cos z + c}}}, \quad (7.40)$$

sadrži koeficijente a , b i c koji zavise od geografske širine i visine stanice kao i od temperature vazduha, i imaju različite vrednosti za suhu i vlažnu troposfersku komponentu. Model NIELL ima sličnu formu, s tim što koeficijenti koji se odnose na suhu komponentu zavise još i od dana u godini.

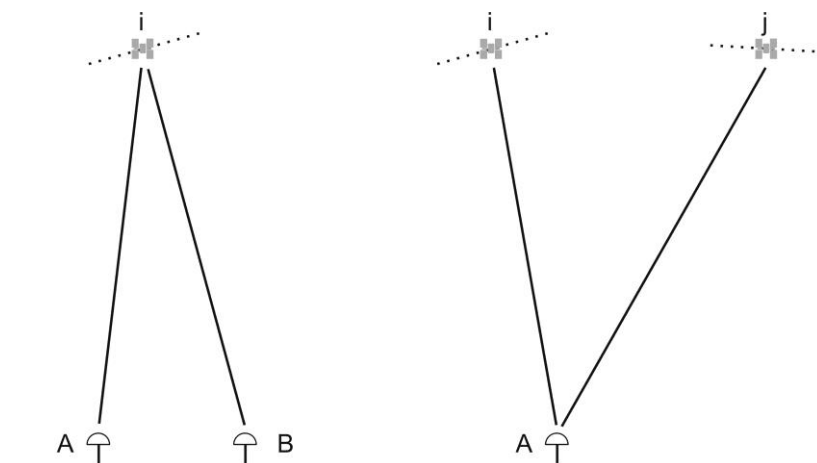
7.4 Proste, dvostruke i trostruke razlike

Formiranje linearnih kombinacija merenih pseudoduzina u vidu takozvanih prostih, dvostrukih i trostrukih razlika predstavlja drugi način da se uticaj pojedinih izvora grešaka eliminiše ili svede na minimalnu meru. Osnovna ideja kod formiranja razlika sastoji se u korišćenju korelativne zavisnosti koja je prisutna kod simultanih merenja sa dve stanice prema satelitima, izvršenih u različitim epohama. U skladu s tim, razlike se mogu formirati po prijemnicima, satelitima i po vremenu.

U nastavku ćemo formiranje razlika prikazati na primeru faznih pseudoduzina jer se njima postiže geodetska tačnost. Potpuno isti postupci važe i za kodne pseudoduzine.

Proste razlike. Proste razlike dobijaju se kada se formira razlika simultano izmerenih pseudoduzina od tačaka A i B prema istom satelitu i , ili razlika simultano izmerenih pseudoduzina od jedne tačke, na primer A , prema dva satelita i i j . U prvom slučaju radi se o prostim razlikama interferometrijskog tipa. Drugi slučaj predstavljaju proste razlike Doplerskog tipa. Slika 7.2 ilustruje koncept ova dva tipa prostih razlika.

Razmotrimo sada samo proste razlike interferometrijskog tipa, zato što se one najčešće koriste u geodetske svrhe. Funkcionalni modeli faznih pseudoduzina od tačaka A i B prema istom satelitu i , izmerenih u istom trenutku vremena t , imaju



Slika 7.2. Ilustracija prostih razlika interferometrijskog tipa (levo) i Doplerskog tipa (desno).

poznatu strukturu:

$$\begin{aligned} L_{A,f}^i &= r_A^i + E_A^i + c_0 \delta t_A - c_0 \delta t^i + T_A^i - I_{A,f}^i + \lambda_f N_{A,f}^i + M_{A,f,L}^i + \varepsilon_{A,f,L}^i \\ L_{B,f}^i &= r_B^i + E_B^i + c_0 \delta t_B - c_0 \delta t^i + T_B^i - I_{B,f}^i + \lambda_f N_{B,f}^i + M_{B,f,L}^i + \varepsilon_{B,f,L}^i \end{aligned} \quad (7.41)$$

Oduzimanjem ove dve pseudodužine dobija se prosta razlika čiji funkcionalni model ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} L_{AB,f}^i &= L_{A,f}^i - L_{B,f}^i \\ &= (r_A^i - r_B^i) \\ &\quad + (E_A^i - E_B^i) \\ &\quad + c_0 (\delta t_A - \delta t_B) \\ &\quad + (T_A^i - T_B^i) \\ &\quad - (I_{A,f}^i - I_{B,f}^i) \\ &\quad + \lambda_f (N_{A,f}^i - N_{B,f}^i) \\ &\quad + (M_{A,f,L}^i - M_{B,f,L}^i) \\ &\quad + (\varepsilon_{A,f,L}^i - \varepsilon_{B,f,L}^i) \end{aligned} \quad (7.42)$$

Model proste razlike napisali smo na ovaj način da bi se videlo da sadrži osam članova koje možemo sada ukratko prodiskutovati.

Prvi član modela sastoji se od razlike geometrijskih rastojanja od tačaka A i B prema istom satelitu i . Dok su pojedinačna rastojanja veličine oko 20 000 km, njihova razlika je mnogo manja, i iznosi otprilike onoliko koliko je i rastojanje između tačaka A i B .

Drugi član predstavlja razliku uticaja grešaka satelitskih efemerida na izmerene pseudodužine. Iako greška položaja satelita i može imati proizvoljnu orijentaciju, od značaja je pre svega njena radijalna komponenta, odnosno komponenta u pravcu izmerene pseudodužine. Pošto je ta komponenta gotovo identična za pseudodužine do stanica A i B koje su na relativno malom međusobnom rastojanju u poređenju sa visinom leta GPS satelita, može se reći da drugi član funkcionalnog modela proste razlike ima zanemarljivo malu vrednost.

Treći član je razlika odstupanja časovnika prijemnika na tačkama A i B . Kolika će ta razlika biti zavisi od znakova pojedinačnih odstupanja. Savremeni prijemnici ne dopuštaju da im odstupanje časovnika od sistemskog GPS vremena bude veće od 1 ms po apsolutnoj vrednosti, tako da razlika može dostići najviše 2 ms. Međutim, treba imati u vidu da se ova razlika množi brzinom svetlosti, što onda dostiže vrednost i do 600 km! Primitimo da funkcionalni model ne sadrži grešku časovnika satelita.

Četvrti član sastoji se u razlici troposferskih uticaja. Ovi uticaji će na stanicama A i B biti tim sličniji što su stanice bliže jedna drugoj, a posebno ukoliko između stanica nije velika visinska razlika. Sličnost troposferskih uticaja pravda se činjenicom da u slučaju međusobno bliskih stanica satelitski signal putuje do jedne i druge kroz regione troposfere sa sličnim atmosferskim uslovima.

Peti član predstavlja razliku jonosferskih uticaja. Iako se uslovi u jonosferi mogu menjati značajnije nego u troposferi, i za ovaj član važi da je praktično beznačajan kada su stanice A i B na kratkom međusobnom rastojanju, tim pre što su jonosferski slojevi viši od troposferskih.

Šesti član je praktično fazna neodređenost proste razlike. Pošto fazne neodređenosti pseudodužina sa tačaka A i B nemaju između sebe nikakve veze, ovaj član može imati proizvoljno veliku vrednost.

Sedmi član opisuje uticaj višestruke refleksije na vrednost proste razlike. Zbog njenog slučajnog karaktera, sledi da je uticaj višestruke refleksije na prostu razliku u proseku veći nego na pojedinačne pseudodužine.

Konačno, osmi član predstavlja slučajnu grešku merenja proste razlike. Pošto pojedinačne greške imaju slučajan karakter, tačnost proste razlike je manja od tačnosti pojedinačnih pseudodužina.

Izraz (7.42) je praktično kompletan funkcionalni model proste razlike. Ako su tačke A i B na kratkom međusobnom rastojanju (na primer manjem od 10 km), troposferski i jonosferski uticaji mogu se zanemariti, kao i uticaj greške satelitskih efemerida. Smatrajući da su u članu ε zbirno sadržani slučajni uticaji (višestruka refleksija i greška merenja), funkcionalni model poprima još jednostavniji oblik:

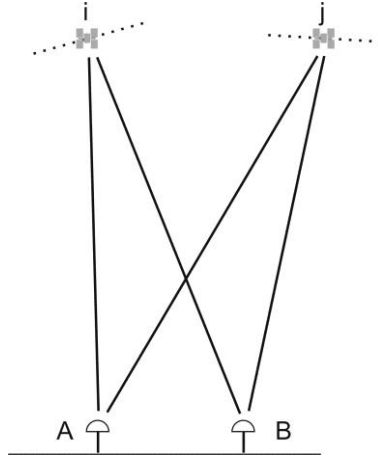
$$L_{AB,f}^i = r_{AB}^i + c_0(\delta t_A - \delta t_B) + \lambda_f N_{AB,f}^i + \varepsilon_{AB,f,L}^i, \quad (7.43)$$

pri čemu smo kod nekih članova upotrebili označavanje kao kod proste razlike. U svakom slučaju, obradom prostih razlika ne određuju se koordinate tačaka A i B , već koordinatne razlike između njih.

Dvostruke razlike. Dvostruka razlika dobija se kada se formira razlika između proste razlike simultano izmerenih pseudodužina od tačaka A i B prema satelitu i , i proste razlike simultano izmerenih pseudodužina od istih tačaka A i B prema drugom satelitu j . Slika 7.3 ilustruje koncept dvostruke razlike.

Za formiranje dvostruke razlike korišćićemo kompletan funkcionalni model prostih razlika (7.42). Modeli prostih razlika do satelita i i j glase:

$$\begin{aligned} L_{AB,f}^i &= r_{AB}^i + E_{AB}^i + c_0(\delta t_A - \delta t_B) \\ &\quad + T_{AB}^i - I_{AB,f}^i + \lambda_f N_{AB,f}^i + M_{AB,f,L}^i + \varepsilon_{AB,f,L}^i, \\ L_{AB,f}^j &= r_{AB}^j + E_{AB}^j + c_0(\delta t_A - \delta t_B) \\ &\quad + T_{AB}^j - I_{AB,f}^j + \lambda_f N_{AB,f}^j + M_{AB,f,L}^j + \varepsilon_{AB,f,L}^j \end{aligned} \quad (7.44)$$



Slika 7.3. Ilustracija dvostrukih razlika.

Oduzimanjem ove dve proste razlike dobija se tražena dvostruka razlika čiji je funkcionalni model:

$$\begin{aligned}
 L_{AB,f}^{ij} &= L_{AB,f}^i - L_{AB,f}^j \\
 &= (r_{AB}^i - r_{AB}^j) \\
 &\quad + (E_{AB}^i - E_{AB}^j) \\
 &\quad + (T_{AB}^i - T_{AB}^j) \\
 &\quad - (I_{AB,f}^i - I_{AB,f}^j) \\
 &\quad + \lambda_f (N_{AB,f}^i - N_{AB,f}^j) \\
 &\quad + (M_{AB,f,L}^i - M_{AB,f,L}^j) \\
 &\quad + (\varepsilon_{AB,f,L}^i - \varepsilon_{AB,f,L}^j)
 \end{aligned} \tag{7.45}$$

Očigledno je da u dvostrukoj razlici više nisu prisutne ni greške časovnika prijemnika, tako da model sada sadrži ukupno sedam članova. Njihova veličina je generalno približna veličini odgovarajućih članova u modelu proste razlike. Kada su, dakle, tačke *A* i *B* na kratkom međusobnom rastojanju, tada se troposferski i jonosferski uticaji ponovo mogu zanemariti, kao i uticaj greške satelitskih efemerida, tako da pojednostavljeni model dvostruke razlike ima sledeći oblik:

$$L_{AB,f}^{ij} = r_{AB}^{ij} + \lambda_f N_{AB,f}^{ij} + \varepsilon_{AB,f,L}^{ij}, \tag{7.46}$$

pri čemu su ponovo u članu ε sadržani svi slučajni efekti.

Dvostruke razlike su naročito popularne za obradu GPS merenja kod geodetskog pozicioniranja. Njihova glavna prednost sastoji se u tome što ne sadrže greške časovnika prijemnika i satelita, i što im se generalno mnogo lakše rešavaju fazne neodređenosti. Štaviše, strogo gledano, fazne neodređenosti imaju celobrojni karakter jedino na nivou dvostrukih razlika.

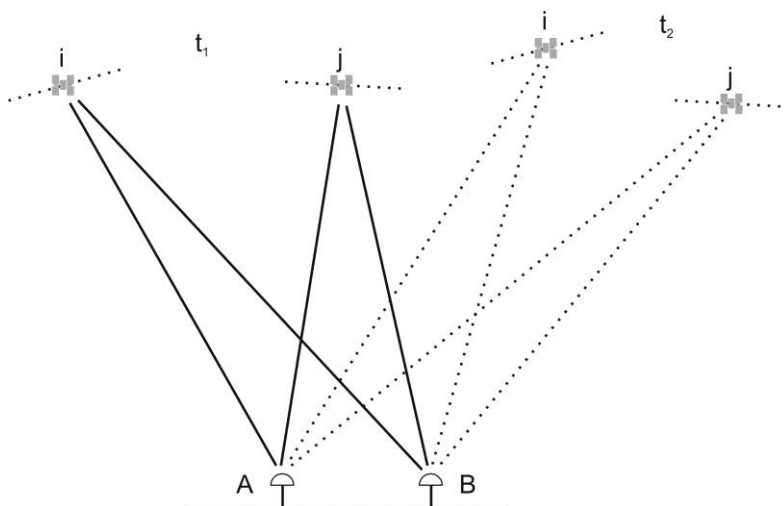
S druge strane, dvostruke razlike predstavljaju linearnu kombinaciju četiri pseudoduzine, tako da im je tačnost još niža od tačnosti prostih razlika. Osim toga, obradom dvostrukih razlika takođe se mogu oceniti samo koordinatne razlike između tačaka, a ne njihove koordinate.

Trostruke razlike. Trostruka razlika dobija se kada se formira razlika između dvostruke razlike simultano izmerenih pseudoduzina od tačaka A i B prema satelitima i , i i j u trenutku vremena t_1 , i iste te dvostruke razlike u trenutku t_2 . Slika 7.4 ilustruje situaciju.

Ako se napišu modeli dvostruke razlike u trenucima vremena t_1 i t_2 :

$$\begin{aligned}
 L_{AB,f}^{ij}(t_1) &= r_{AB}^{ij}(t_1) + E_{AB}^{ij}(t_1) + T_{AB}^{ij}(t_1) - I_{AB,f}^{ij}(t_1) \\
 &\quad + \lambda_f N_{AB,f}^{ij} + M_{AB,f,L}^{ij}(t_1) + \varepsilon_{AB,f,L}^{ij}(t_1) \\
 L_{AB,f}^{ij}(t_2) &= r_{AB}^{ij}(t_2) + E_{AB}^{ij}(t_2) + T_{AB}^{ij}(t_2) - I_{AB,f}^{ij}(t_2) \\
 &\quad + \lambda_f N_{AB,f}^{ij} + M_{AB,f,L}^{ij}(t_2) + \varepsilon_{AB,f,L}^{ij}(t_2)
 \end{aligned} \tag{7.47}$$

primetićemo pre svega da jedino fazne neodređenosti nisu funkcija vremena, što uvek važi ukoliko ne dođe do prekida prijema signala. Oduzimanjem dvostrukih razlika dobiće se funkcionalni model trostruke razlike, koji ima sledeći oblik:



Slika 7.4. Ilustracija trostrukih razlika.

$$\begin{aligned}
\delta L_{AB,f}^{ij} &= L_{AB,f}^{ij}(t_1) - L_{AB,f}^{ij}(t_2) \\
&= [r_{AB}^{ij}(t_1) - r_{AB}^{ij}(t_2)] \\
&\quad + [E_{AB}^{ij}(t_1) - E_{AB}^{ij}(t_2)] \\
&\quad + [T_{AB}^{ij}(t_1) - T_{AB}^{ij}(t_2)] \\
&\quad - [I_{AB,f}^{ij}(t_1) - I_{AB,f}^{ij}(t_2)] \\
&\quad + [M_{AB,f,L}^{ij}(t_1) - M_{AB,f,L}^{ij}(t_2)] \\
&\quad + [\varepsilon_{AB,f,L}^{ij}(t_1) - \varepsilon_{AB,f,L}^{ij}(t_2)]
\end{aligned} \tag{7.48}$$

Iz ove jednačine postaje jasno u čemu su prednosti trostrukih razlika. Pre svega, struktura trostruke razlike smanjena je još za jedan član, tako da ih je sada šest. Eliminisan je član koji se odnosi na fazne neodređenosti jer su one konstantne veličine pa se ne pojavljuju u razlici. Preostali članovi po pravilu su još manji u odnosu na dvostruke razlike. Jedine izuzetke predstavljaju članovi sa uticajem višestruke refleksije i slučajnim greškama merenja.

Članovi u strukturi trostruke razlike koji se odnose na troposferske i jonosferske uticaje mogu se praktično zanemariti kada su merenja međusobno vremenski malo razdvojena. Uobičajeni intervali u kojima se izvode uzastopna GPS merenja kreću se od nekoliko sekundi do nekoliko minuta. Za tako kratke vremenske periode stanje troposfere i jonosfere gotovo da se uopšte ne menja. Isto važi i za uticaj greške satelitskih efemerida. Ako se, dakle, svi ti uticaji zanemare, a u član ε ponovo smeste svi slučajni uticaji, dobija se izuzetno jednostavan funkcionalni model trostruke razlike:

$$\delta L_{AB,f}^{ij} = \delta r_{AB}^{ij} + \delta \varepsilon_{AB,f,L}^{ij} \tag{7.49}$$

Nažalost, i pored jednostavnosti, trostruke razlike nisu pogodne za geodetsko određivanje koordinatnih razlika jer im je tačnost mnogo niža u odnosu na tačnost dvostrukih razlika. One se, međutim, mogu koristiti za otkrivanje faznih skokova, odnosno trenutaka vremena kada je tokom merenja došlo do prekida prijema signala.

7.5 Frekvencijske kombinacije

Korisnici koji raspolažu dvofrekventnim GPS prijemnicima imaju mogućnost da linearno kombinuju merenja iste pseudodužine izvršena na obe frekvencije. Takve linearne kombinacije nazivaju se frekvencijskim kombinacijama. Pošto ih teorijski ima beskonačno mnogo, formiranje frekvencijskih kombinacija ima smisla samo ako se na taj način postiže neki od sledećih ciljeva:

- eliminacija ili značajna redukcija uticaja nekog izvora grešaka,
- olakšano rešavanje faznih neodređenosti,
- dobijanje frekvencijske kombinacije koja ima višu tačnost.

Razmotrićemo u nastavku frekvencijske kombinacije samo faznih merenja. Postupak je potpuno identičan i za kodna merenja.

Ako su $L_{A,1}^i$ i $L_{A,2}^i$ fazna merenja jedne iste pseudodužine između stanice A i satelita i , koja su izvršena na frekvencijama f_1 i f_2 , tada opšti oblik frekvencijske kombinacije glasi:

$$L_{A,k}^i = aL_{A,1}^i + bL_{A,2}^i, \quad (7.50)$$

gde je k oznaka konkretne kombinacije, a a i b predstavljaju realne brojeve. Dublji uvid u osobine određene frekvencijske kombinacije može se ostvariti kada se funkcionalni modeli pseudodužina $L_{A,1}^i$ i $L_{A,2}^i$ napišu u kompaktnoj formi:

$$\begin{aligned} L_{A,1}^i &= \rho_A^i - I_{A,1}^i + \lambda_1 N_{A,1}^i \\ L_{A,2}^i &= \rho_A^i - I_{A,2}^i + \lambda_2 N_{A,2}^i \end{aligned}, \quad (7.51)$$

tako da su u ρ sadržani svi nedisperzivni članovi (geometrijsko rastojanje, greška efemerida, greške časovnika satelita i prijemnika i troposferska refrakcija), a slučajni uticaji višestruke refleksije i greške merenja zanemaruju se jer nisu od značaja za ovu diskusiju.

Od teorijski beskonačno mnogo frekvencijskih kombinacija izdvojićemo samo nekoliko onih koje se naročito često koriste u geodetskoj obradi GPS merenja.

Frekvencijska kombinacija L_{IF} . Ova frekvencijska kombinacija dobija se kada koeficijenti a i b u izrazu (7.50) imaju sledeće vrednosti:

$$a = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2}, \quad b = -\frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2}, \quad (7.52)$$

tako da je:

$$\begin{aligned} L_{A,IF}^i &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{A,1}^i - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{A,2}^i \\ &= \rho_A^i + \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \lambda_1 N_{A,1}^i - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \lambda_2 N_{A,2}^i \end{aligned}. \quad (7.53)$$

Značaj ove frekvencijske kombinacije sastoji se u tome što u potpunosti eliminiše uticaj jonosfere, odakle joj potiče i ime (IF = Ionosphere Free). Da bismo videli da je to zaista tako, podsetimo se da su jonosferski uticaji na prvoj i drugoj frekvenciji obrnuto proporcionalni kvadratima frekvencija:

$$I_{A,1}^i = \frac{C}{f_1^2}, \quad I_{A,2}^i = \frac{C}{f_2^2}, \quad (7.54)$$

pri čemu je C jedna ista konstanta. Ako se sada ovi članovi kombinuju pomoću koeficijenata a i b , dobija se:

$$\frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} I_{A,1}^i - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} I_{A,2}^i = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \frac{C}{f_1^2} - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \frac{C}{f_2^2} = 0. \quad (7.55)$$

Činjenica da ne sadrži jonosferske uticaje, čini frekvencijsku kombinaciju L_{IF} naročito atraktivnom za geodetsku obradu GPS merenja, iako njena fazna neodređenost nema celobrojni karakter. Ustvari, kada su GPS prijemnici na većem međusobnom rastojanju (od nekoliko desetina kilometara do nekoliko stotina kilometara), kombinacija L_{IF} predstavlja glavni izbor ukoliko treba postići geodetsku tačnost.

Frekvencijska kombinacija L_{GF} . Ova frekvencijska kombinacija dobija se jednostavnim oduzimanjem faznih merenja izvršenih na obe frekvencije:

$$L_{A,GF}^i = L_{A,1}^i - L_{A,2}^i, \quad (7.56)$$

odakle se vidi da koeficijenti imaju vrednosti $a = 1$ i $b = -1$. Ova kombinacija nema frekvenciju, pa joj prema tome talasna dužina nije definisana. Ako se u izraz (7.56) zamene modeli faznih pseudodužina, u rezultujućoj kombinaciji neće biti ni geometrijskih rastojanja, ni grešaka satelitskih efemerida, ni grešaka časovnika, ni troposferskih uticaja. Odatle i ime ove frekvencijske kombinacije (GF = Geometry Free). U frekvencijskoj kombinaciji L_{GF} preostaju samo jonosferski uticaji, koji su uz to i značajno redukovani, i fazne neodređenosti:

$$\begin{aligned} L_{A,GF}^i &= -I_{A,1}^i + I_{A,2}^i + \lambda_1 N_{A,1}^i - \lambda_2 N_{A,2}^i \\ &= \frac{f_1^2 - f_2^2}{f_2^2} I_{A,1}^i + \lambda_1 N_{A,1}^i - \lambda_2 N_{A,2}^i, \end{aligned} \quad (7.57)$$

Pošto frekvencijska kombinacija L_{GF} ne sadrži geometrijska rastojanja, ona se ne može koristiti za određivanje koordinata tačaka niti koordinatnih razlika. Glavna primena joj se sastoji u ispitivanju jonosfere. Kada su jonosferski uslovi relativno

mirni, frekvencijska kombinacija L_{GF} može veoma dobro poslužiti za otkrivanje faznih skokova.

Frekvencijska kombinacija L_{WL} . Ova frekvencijska kombinacija dobija se kada koeficijenti a i b imaju sledeće vrednosti:

$$a = \frac{f_1}{f_1 - f_2}, \quad b = -\frac{f_2}{f_1 - f_2}, \quad (7.58)$$

tako da je:

$$\begin{aligned} L_{A,WL}^i &= \frac{f_1}{f_1 - f_2} L_{A,1}^i - \frac{f_2}{f_1 - f_2} L_{A,2}^i \\ &= \rho_A^i + \frac{f_1}{f_2} I_{A,1}^i + \frac{c_0}{f_1 - f_2} (N_{A,1}^i - N_{A,2}^i) \end{aligned} \quad (7.59)$$

Formalna talasna dužina ove frekvencijske kombinacije iznosi 0.86 m, što je mnogo više od talasnih dužina originalnih nosećih talasa, zbog čega se tako i zove (WL = Wide Lane). Velika talasna dužina pruža dodatnu prednost što se fazne neodređenosti mnogo lakše rešavaju nego u slučaju malih talasnih dužina, tim pre što fazne neodređenost ove frekvencijske kombinacije zadržavaju celobrojnu prirodu. Stoga se frekvencijska kombinacija L_{WL} masovno koristi u geodetskoj obradi izvršenih GPS merenja, uprkos činjenici da sadrži nešto pojačani uticaj jonosferske refrakcije.

Frekvencijska kombinacija L_{NL} . Ova frekvencijska kombinacija dobija se kada koeficijenti a i b imaju sledeće vrednosti:

$$a = \frac{f_1}{f_1 + f_2}, \quad b = \frac{f_2}{f_1 + f_2}, \quad (7.60)$$

tako da je:

$$\begin{aligned} L_{A,NL}^i &= \frac{f_1}{f_1 + f_2} L_{A,1}^i + \frac{f_2}{f_1 + f_2} L_{A,2}^i \\ &= \rho_A^i - \frac{f_1}{f_2} I_{A,1}^i + \frac{c_0}{f_1 + f_2} (N_{A,1}^i + N_{A,2}^i) \end{aligned} \quad (7.61)$$

Formalna talasna dužina ove frekvencijske kombinacije iznosi svega 0.11 m, što je mnogo manje od talasnih dužina originalnih nosećih talasa, odakle se tako i zove (NL = Narrow Lane). Stoga je rešavanje faznih neodređenosti veoma otežano uprkos činjenici da je očuvan njihov celobrojni karakter. S druge strane, ova

frekvencijska kombinacija ima veću tačnost od pseudodužina na pojedinačnim frekvencijama, što omogućuje veoma precizno pozicioniranje pod uslovom da su rešene fazne neodređenosti.

Frekvencijska fazno-kodna kombinacija L_{MW} . Ova kombinacija naziva se po autorima (Melbourne-Wuebbena) i obuhvata kako fazna tako i kodna merenja na obe frekvencije:

$$L_{A,MW}^i = \frac{1}{f_1 - f_2} (f_1 L_{A,1}^i - f_2 L_{A,2}^i) - \frac{1}{f_1 + f_2} (f_1 P_{A,1}^i + f_2 P_{A,2}^i). \quad (7.62)$$

Zahvaljujući ovako specifičnoj formi, u kombinaciji L_{MW} eliminisani su gotovo svi članovi, osim faznih neodređenosti koje su na nivou kombinacije L_{WL} :

$$L_{A,MW}^i = \frac{c_0}{f_1 - f_2} (N_{A,1}^i - N_{A,2}^i) = \lambda_{WL} N_{A,WL}^i. \quad (7.63)$$

Ukoliko su kodna merenja kvalitetna i imaju tačnost bolju od 1 m, frekvencijska kombinacija LMW može se koristiti za rešavanje faznih neodređenosti N_{WL} i otkrivanja faznih skokova.

Našoj diskusiji frekvencijskih kombinacija neophodno je dodati još neka zapažanja. Prvo, frekvencijske kombinacije mogu da se formiraju samo ako su na raspolaganju dvofrekventna merenja. To naravno iziskuje nabavku generalno skupljih dvofrekventnih GPS prijemnika. Zatim, frekvencijske kombinacije nisu ograničene na originalna merenja. Naprotiv, najčešći slučaj je ustvari da se one formiraju na svim nivoima razlika (prostih, dvostrukih i trostrukih). Konačno, u frekvencijskim kombinacijama kombinuju se i slučajne greške. Zbog toga je tačnost kombinacija u opštem slučaju niža od tačnosti originalnih merenja.

7.6 Stohastički model GPS merenja

Geodetsko korišćenje sistema NAVSTAR GPS podrazumeva da se izvršena GPS merenja obrađuju po metodi najmanjih kvadrata kako bi se statistički optimalno ocenile nepoznate koordinate tačaka. Metod najmanjih kvadrata sa svoje strane zahteva da se pored funkcionalnog modela merenja formuliše i njihov stohastički model. Pojednostavljeno govoreći, formulisanje stohastičkog modela znači da se svakom merenju koje učestvuje u obradi dodeli standardna devijacija σ koja karakteriše njegovu tačnost.

Bilo bi sasvim pogrešno verovati da pseudodužine izmerene sa neke stanice prema svim vidljivim GPS satelitima imaju istu tačnost. Razlozi su sledeći:

- Signali sa satelita koji je bliže horizontu putuju duže kroz jonosferski omotač Zemlje u odnosu na signale sa satelita koji je u zenitu. Iako se formiranjem razlika i frekvencijskih kombinacija u najvećoj meri otklanja delovanje jonosferske refrakcije, u merenjima uvek preostanu rezidualni jonosferski uticaji.
- Signali sa satelita koji je bliže horizontu putuju takođe duže i kroz troposferu. Prema tome, i iz tog razloga su merenja prema nižim satelitima manje tačnosti u odnosu na merenja u pravcu zenita.
- Signali sa satelita koji je bliže horizontu imaju mnogo više mogućnosti odbijanja od horizontalnih i vertikalnih reflektujućih površina u odnosu na signale koji dolaze iz pravca zenita. To znači da su merenja prema nižim satelitima podložnija uticaju višestruke refleksije.
- Konačno, signali sa satelita koji je bliže horizontu imaju dosta manju snagu u odnosu na signale iz pravca zenita, tako da ih GPS prijemnici prate sa većom greškom.

Navedene činjenice pokazuju da se merenja pod različitim vertikalnim uglovima α u odnosu na horizont razlikuju međusobno u stohastičkom smislu. U opštem slučaju, tačnost pseudodužine raste (odnosno smanjuje joj se standard σ) kako se povećava njen vertikalni ugao (odnosno smanjuje zenitno odstojanje z). Ako se standard pseudodužine koja je u pravcu zenita ($\alpha = 90^0$ ili $z = 0^0$) obeleži sa σ_0 , tada se standard pseudodužine koja ima vertikalni ugao α obično modelira kao:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_0}{\sin \alpha} = \frac{\sigma_0}{\cos z}. \quad (7.64)$$

Problem različitih standarda nije jedini kada je u pitanju stohastički model. Kombinacije GPS merenja u vidu razlika takođe pokazuju i međusobnu zavisnost. Tako, na primer, između dvostrukih razlika postoji značajna algebarska korelacija, kao i kod trostrukih razlika. Da bismo se u to uverili, pretpostavimo radi jednostavnosti da su pseudodužine iste tačnosti i da ih karakteriše standardna devijacija σ . Dve dvostruke razlike sa stanica A i B prema satelitima i, j i k , pri čemu se, na primer, satelit i bira kao referentni, mogu se napisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} L_{AB}^j \\ L_{AB}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_A^i \\ L_B^i \\ L_A^j \\ L_B^j \\ L_A^k \\ L_B^k \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}. \quad (7.65)$$

Tabela 7.2. Odnos standarda frekvencijske kombinacije i standarda faznih merenja.

Kombinacija	Faktor t
L_{IF}	3.33
L_{GF}	1.41
L_{WL}	6.38
L_{NL}	0.71

Primenom zakona o prenosu grešaka dobija se sledeći rezultat za kovarijacionu matricu ovog para dvostrukih razlika:

$$\mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \sigma^2 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (7.66)$$

odakle se pored toga da su korelisane, vidi i da su njihove varijanse četiri puta veće od varijansi originalnih pojedinačnih pseudodužina. Na identičan način može se izvesti izraz za kovarijacionu matricu para trostrukih razlika:

$$\mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \sigma^2 \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}, \quad (7.67)$$

koji pokazuje da im je tačnost dva puta manja od tačnosti dvostrukih razlika.

Ako se sada zakon o prenosu grešaka primeni na opšti izraz za frekvencijsku kombinaciju, smatrajući radi jednostavnosti da fazna merenja na obe frekvencije imaju istu standardnu devijaciju σ , dobija se:

$$\sigma_k = \sigma \sqrt{a^2 + b^2} = \sigma \cdot t. \quad (7.68)$$

Faktor t očigledno zavisi od koeficijenata frekvencijske kombinacije i izražava odnos njenog standarda i standarda faznih merenja. Vrednost faktora t za pojedine frekvencijske kombinacije data je u tabeli 7.2.

GPS merenja koja su izvedena u kratkom vremenskom intervalu takođe imaju korelaciju koja je jača nego kod merenja izvedenih u dužem vremenskom periodu. Pošto je empirijsko određivanje korelacije inače teško i nepouzđano, ova pitanja se obično zanemaruju, osim kada se GPS merenja koriste za visokoprecizne radove ili u naučne svrhe.

Poglavlje 8
GPS pozicioniranje, primene
i modernizacija

8.1 Autonomno GPS pozicioniranje

Korisnik opremljen GPS prijemnikom je u stanju da odredi svoj trenutni položaj u realnom vremenu, bez ikakve pomoćne infrastrukture u vidu dodatnih prijemnika, radio komunikacije, ili signala sa posebnom strukturom. Ovakav način korišćenja naziva se autonomnim ili apsolutnim GPS pozicioniranjem. Međutim, autonomno GPS pozicioniranje ne mora biti ograničeno na određivanje položaja u realnom vremenu, iako je ovaj režim rada prvenstveno predviđen za navigaciju. Ako to dozvoljava priroda njegove aplikacije, korisnik može jednostavno samo memorisati rezultate izvršenih GPS merenja, a naknadno određivati položaj odgovarajućom softverskom obradom.

Imajući u vidu da su merenja opterećena greškama, skup kodnih pseudoduzina, simultano izmerenih u trenutku t sa stanice A do n satelita, može se matematički modelirati na sledeći način:

$$\begin{aligned} P_A^i &= r_A^i + c_0 \delta t_A + \varepsilon_A^i \\ &= \sqrt{(x_A - x^i)^2 + (y_A - y^i)^2 + (z_A - z^i)^2} + b_A + \varepsilon_A^i, \end{aligned} \quad (8.1)$$

gde gornji indeks i uzima vrednosti $i = 1, 2, \dots, n$. Koordinate opažanih satelita (x^i, y^i, z^i) računaju se iz podataka navigacione poruke za trenutak emitovanja signala, i predstavljaju poznate veličine. U modelu nije prisutna većina članova jer se pretpostavlja da im se vrednosti mogu odrediti i oduzeti od merenih pseudoduzina. Na primer, odstupanje časovnika satelita takođe se računa iz podataka navigacione poruke. Uticaj jonosferske refrakcije obuhvata se standardnim KLOBUCHAR modelom, ili se potpuno eliminiše ako se umesto originalnih kodnih pseudoduzina koriste frekvencijske kombinacije P_{IF} . Za računanje troposferskog kašnjenja može se upotrebiti neki od mnogobrojnih troposferskih modela i redukcionih funkcija. Član ε^i obuhvata sve greške merenja, efekat višestruke refleksije i preostale nemodelirane uticaje koji se odnose na kodnu pseudoduzinu P^i . Primetimo da je član sa greškom časovnika prijemnika iz praktičnih razloga izražen kao veličina b_A u linearnim jedinicama (metrima).

Potreban je sistem od najmanje četiri ovakve jednačine ($n = 4$) da bi se odredile nepoznate koordinate i greška sinhronizacije prijemnika (x_A, y_A, z_A, b_A) , pri čemu se očigledno mora ignorisati prisustvo nepoznatih članova ε^i . Kada je $n > 4$, uzima se u obzir prisustvo grešaka, a sistem jednačina tretira se tako da rešenje u nekom smislu bude najbolje prilagođeno izmerenim pseudoduzinama. Pristup koji se najčešće koristi za rešavanje ovakvog optimizacionog problema je statistički postupak ocenjivanja pod nazivom metod najmanjih kvadrata (MNK). Imajući u vidu različitu tačnost izmerenih pseudoduzina, MNK ocene nepoznatih parametara (x_A, y_A, z_A, b_A) izvode se pod matematičkim uslovom:

$$\sum_{i=1}^n w^i \left(\sqrt{(x_A - x^i)^2 + (y_A - y^i)^2 + (z_A - z^i)^2} + b_A - P_A^i \right)^2 = \min, \quad (8.2)$$

gde w^i označava težinu odgovarajuće pseudodužine, koja se računa kao recipročna vrednost njene varijanse. Gornji uslov transformiše početni sistem od n jednačina sa 4 nepoznate veličine u jedinstveno rešivi sistem od 4 jednačine sa 4 nepoznate veličine, i istovremeno omogućuje ocenjivanje nepoznatih grešaka merenja ε^i . Da bismo videli kako, primetimo prvo da su jednačine (8.1) nelinearne, i da bi za njihovo rešavanje bilo pogodno izvršiti linearizaciju oko približnih vrednosti nepoznatih veličina $\mathbf{x}_{A,0} = [x_{A,0} \ y_{A,0} \ z_{A,0}]^T$ i $b_{A,0}$. Ako se ocenjene vrednosti nepoznatih izraze kao:

$$\mathbf{x}_A = \mathbf{x}_{A,0} + d\mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ dz_A \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

$$b_A = b_{A,0} + db_A$$

a približna vrednost pseudodužina kao:

$$P_{A,0}^i = r_{A,0}^i + c_0 \delta t_{A,0} = \sqrt{(x_{A,0} - x^i)^2 + (y_{A,0} - y^i)^2 + (z_{A,0} - z^i)^2} + b_{A,0}, \quad (8.4)$$

tada se linearizovana veza između priraštaja pseudodužina i priraštaja nepoznatih može napisati u sledećem matričnom obliku:

$$d\mathbf{P}_A = \begin{bmatrix} dP_A^1 \\ dP_A^2 \\ \dots \\ dP_A^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A^1 - P_{A,0}^1 \\ P_A^2 - P_{A,0}^2 \\ \dots \\ P_A^n - P_{A,0}^n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}_A \\ db_A \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_A. \quad (8.5)$$

gde je sa $\boldsymbol{\varepsilon}$ označen vektor slučajnih grešaka. Matrica \mathbf{A} ima članove koji predstavljaju parcijalne izvode pseudodužina po nepoznatim veličinama:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\mathbf{1}_A^1)^T & 1 \\ (\mathbf{1}_A^2)^T & 1 \\ \dots & \dots \\ (\mathbf{1}_A^n)^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.6)$$

pri čemu su sa $\mathbf{1}$ označeni jedinični vektori sa stanice A u pravcu svakog satelita, čije su komponente jednake:

$$\mathbf{1}_A^i = \frac{1}{\sqrt{(x_{A,0} - x^i)^2 + (y_{A,0} - y^i)^2 + (z_{A,0} - z^i)^2}} \begin{bmatrix} x_{A,0} - x^i \\ y_{A,0} - y^i \\ z_{A,0} - z^i \end{bmatrix}. \quad (8.7)$$

Ako se sada sa \mathbf{C}_P označi dijagonalna kovarijaciona matrica sa varijansama $1/w$ pojedinih pseudodužina duž glavne dijagonale, konačno MNK rešenje za priraštaje nepoznatih dobija se u obliku:

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{x}_A \\ db_A \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_P^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_P^{-1} d\mathbf{P}_A. \quad (8.8)$$

Formalizam metode najmanjih kvadrata omogućuje da se dalje mogu određivati između ostalog i veličine kao što je vektor ocena grešaka merenja \mathbf{v} , standard jedinice težine σ_0 i kovarijaciona matrica nepoznatih veličina \mathbf{C} :

$$\mathbf{v}_A = d\mathbf{P}_A - \mathbf{A} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}_A \\ db_A \end{bmatrix}, \quad (8.9)$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}_A^T \mathbf{C}_P^{-1} \mathbf{v}_A}{n-4}}, \quad (8.10)$$

$$\mathbf{C} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_P^{-1} \mathbf{A})^{-1} = \sigma_0^2 \mathbf{H}. \quad (8.11)$$

Iz izraza (8.11) vidi se da je kvalitet autonomnog GPS pozicioniranja u vezi sa dva ključna faktora: kvalitetom izvršenih merenja (standard jedinice težine σ_0), i brojem i rasporedom satelita (matrica \mathbf{H}). To postaje još očiglednije kada se uzme u obzir da su dijagonalni članovi kovarijacione matrice \mathbf{C} ustvari varijanse nepoznatih veličina, tako da su njihove standardne devijacije jednake:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 \sqrt{h_{11}} \\ \sigma_y &= \sigma_0 \sqrt{h_{22}} \\ \sigma_z &= \sigma_0 \sqrt{h_{33}} \\ \sigma_b &= \sigma_0 \sqrt{h_{44}} \end{aligned}, \quad (8.12)$$

gde su sa h_{ii} označeni dijagonalni članovi matrice \mathbf{H} .

Kvalitet izmerenih pseudodužina zavisi od čitavog niza izvora sistematskih i slučajnih grešaka koje utiču na tačnost. Njihovo poreklo može biti u navigacionim podacima, sredini prostiranja signala, ili samom GPS prijemniku i njegovoj neposrednoj okolini. Uticaj nekih izvora grešaka, kao što je troposferska refrakcija, može se značajno smanjiti računanjem popravaka, a korisnici sa dvofrekventnim

prijemnicima u stanju su da gotovo potpuno eliminišu uticaj jonosferskog kašnjenja signala. U svakom slučaju, efekti pojedinih izvora grešaka veoma su različiti, i kreću se u rasponu od nekoliko decimetara pa do nekoliko desetina metara.

Broj satelita i njihov prostorni raspored u odnosu na lokaciju korisnika često se nazivaju satelitskom geometrijom. Ona se menja u funkciji vremena pošto se sateliti kreću, zalaze za horizont ili se pojavljuju iznad horizonta. Uobičajeno je da se kod autonomnog GPS pozicioniranja sudi o kvalitetu satelitske geometrije na osnovu takozvanih DOP faktora (Dilution of Precision) koji se mogu definisati pomoću članova matrice \mathbf{H} na sledeći način:

- geometrijski DOP faktor (GDOP): $\sqrt{h_{11} + h_{22} + h_{33} + h_{44}}$,
- položajni DOP faktor (PDOP): $\sqrt{h_{11} + h_{22} + h_{33}}$,
- vremenski DOP faktor (VDOP): $\sqrt{h_{44}}$,

tako da je, na primer, standard ocenjenog 3D položaja:

$$\sigma_{3D} = \sigma_0 \text{PDOP}, \quad (8.13)$$

Moguće je na sličan način definisati i DOP faktore horizontalnog položaja i visine (HDOP i VDOP), ali je prethodno potrebno transformisati kovarijacionu matricu \mathbf{C} tako da joj se članovi odnose na ose lokalnog geodetskog sistema umesto na ose sistema WGS84.

U principu, dobru satelitsku geometriju čini nekoliko satelita koji su ravnomerno raspoređeni po azimutu a nalaze se nešto iznad horizonta, sa još jednim ili dva satelita u pravcu bliskom zenitu. Tada će DOP faktori imati minimalne vrednosti. Ako je deo neba zaklonjen prirodnim ili veštačkim preprekama, broj vidljivih satelita još uvek može biti dovoljan za određivanje položaja, ali će on svakako biti niže tačnosti.

U opštem slučaju, za kvalitet horizontalnog položaja određenog autonomnim GPS pozicioniranjem može se usvojiti standardna devijacija od nekoliko metara. Tačnost visina tipično je lošija 50%.

Situacija sa autonomnim GPS pozicioniranjem postaje nešto drugačija kada je u pitanju skup simultano merenih faznih pseudoduzina. Njihov matematički model ima oblik:

$$L_A^i = \sqrt{(x_A - x^i)^2 + (y_A - y^i)^2 + (z_A - z^i)^2} + b_A + \lambda \cdot N_A^i + \varepsilon_A^i, \quad (8.14)$$

koji se od odgovarajućeg modela kodnih pseudoduzina razlikuje po dodatnom članu $\lambda \cdot N_A^i$, gde λ označava talasnu dužinu nosećeg talasa L1 ili L2, a N_A^i je nepoznati ceo broj faznih ciklusa u faznoj pseudoduzini do satelita i . Pošto faznih neodređenosti ima onoliko koliko i izmerenih faznih pseudoduzina, dobija se

sistem od n jednačina sa $n + 4$ nepoznatih ($x_A, y_A, z_A, b_A, N_A^i, i = 1, 2 \dots n$), koji ima beskonačno mnogo rešenja. Korisnik dakle ne može određivati položaj u realnom vremenu merenjem faznih pseudoduzina. Autonomno GPS pozicioniranje u strogom smislu te reči (na osnovu merenja u jednoj epohi vremena) zasniva se prevashodno na kodnim pseudoduzinama. Potrebno je, međutim, napomenuti da fazne neodređenosti ostaju konstantne veličine ukoliko ne dođe do prekida signala, tako da će u dve epohe biti izmereno $2n$ faznih pseudoduzina, dok će se broj nepoznatih veličina povećati na $n + 5$ jer se u svakoj novoj epohi pojavljuje nova nepoznata greška časovnika prijemnika. To ipak znači da je sa dve epohe merenja faznih pseudoduzina prema $n > 5$ GPS satelita moguće odrediti nepoznate koordinate tačke.

8.2 Precizno apsolutno pozicioniranje

Precizno apsolutno pozicioniranje, skraćeno poznato kao PPP (Precise Point Positioning), predstavlja verziju pozicioniranja jednim prijemnikom u autonomnom režimu rada, ali bez korišćenja podataka navigacione poruke za računanje položaja GPS satelita i odstupanja njihovih časovnika. Umesto toga, PPP metod koristi eksterne informacije u vidu IGS ili JPL preciznih efemerida i stanja časovnika, čime se smatra da greške efemerida i časovnika više ne učestvuju u funkcionalnom modelu pseudoduzina. Osim toga, PPP podrazumeva upotrebu dvofrekventnih merenja, čijom se kombinacijom eliminiše uticaj jonosferske refrakcije.

Međutim, pošto je visoka preciznost glavna odlika ovog načina pozicioniranja, postoji i nekoliko specifičnih izvora grešaka koji se moraju tretirati odgovarajućim modeliranjem:

Plima Zemljine kore. Kao što je to slučaj sa okeanskim vodenim masama, tako i čvrsta Zemljina kora pokazuje plimatske deformacije zahvaljujući privlačnim silama Sunca, meseca i planeta. Stanica na površi Zemlje će zbog plimatskih uticaja periodično menjati svoj položaj za vektor $\Delta \mathbf{r} = [\Delta x, \Delta y, \Delta z]^T$ koji iznosi:

$$\Delta \mathbf{r} = \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j}{GM} \frac{r^4}{r_j^3} \left\{ \left[3l_2 (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}) \right] \mathbf{e}_j + \left[3 \left(\frac{h_2}{2} - l_2 \right) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e})^2 - \frac{h_2}{2} \right] \mathbf{e} \right\}, \quad (8.15)$$

$$- [0.0025 \text{ m} \cdot \sin \varphi \cos \varphi \sin(\theta + \lambda)] \mathbf{e}$$

gde indeks j uzima vrednost 2 (Mesec) i 3 (Sunce), GM je gravitaciona konstanta Zemlje ili tela j , r geocentrično rastojanje do stanice ili tela j , \mathbf{e} geocentrični jedinični vektor stanice ili tela j , φ i λ geografske koordinate stanice, h_2 i l_2 Lav i Šida brojevi sa nominalnim vrednostima 0.609 i 0.085, i θ srednje Griničko zvezdano vreme.

Ova plimatska korekcija sastoji se od konstantnog i periodičnog dela, i može dostići 30 cm u radijalnom i 5 cm u horizontalnom pravcu. Periodični deo odnosi se uglavnom na poludnevne i dnevne periode. Celodnevni opažanjima eliminiše se periodični deo plimatske korekcije, ali konstantni deo ostaje.

Okeansko opterećenje Zemljine kore. Uticaj plimatskih sila Sunca i Meseca podrazumeva periodično premeštanje ogromnih masa okeanske vode koje opterećuju Zemljinu koru, posebno u priobalnom području, i izazivaju njenu deformaciju. Pomeranje stanice Δc (u radijalnom pravcu, pravcu juga i pravcu zapada) u trenutku vremena t može se izraziti na sledeći način:

$$\Delta c = \sum_j f_j A_{cj} \cos(\omega_j t + \chi_j + u_j - \Phi_{cj}), \quad (8.16)$$

gde f i u označavaju funkcije longitude Mesečevog čvora, A i Φ su amplituda i faza specifični za lokaciju stanice i radijalni, južni i zapadni pravac, dok su ω i χ uglovna brzina i astronomski argument. Indeks j obuhvata ukupno 11 glavnih plimatskih talasa Sunca i Meseca, od kojih su neki poludnevni, neki dnevni, a neki dugoperiodični.

Ova korekcija može biti značajna za stanice u blizini morske obale, i dostići vrednost od nekoliko centimetara. Pri tome je vertikalno pomeranje stanice oko tri puta veće od horizontalnog. Kod stanica udaljenih od obale (> 1000 km), korekcija se može zanemariti.

Atmosfersko opterećenje Zemljine kore. Plimatski uticaj Sunca i Meseca na Zemljinu atmosferu takođe podrazumeva varijacije položaja ogromnih vazdušnih masa, što se ogleda u promenama atmosferskog pritiska. Ove promene za posledicu imaju i određenu deformaciju Zemljine kore, čije se vertikalno pomeranje može približno izraziti kao:

$$\Delta h = -0.35p - 0.55p_{sr}. \quad (8.17)$$

U ovom izrazu p je odstupanje atmosferskog pritiska na stanici od standardne vrednosti (1013 mbar), dok je p_{sr} odstupanje srednjeg atmosferskog pritiska u području radijusa 2000 km oko stanice od standardne vrednosti. Rezultat se dobija u (mm) ako se pritisci izraze u (mbar).

Više nezavisnih istraživanja potvrdilo je da vertikalno pomeranje stanice usled opterećenja atmosferskih masa može dostići 25 mm, pri čemu je horizontalno pomeranje oko tri puta manje.

Efekat faznog uvijanja. Ovaj interesantan fenomen posledica je činjenice da su GPS radio talasi kružno polarizovani, pri čemu je polarizacija desne orijentacije. Zbog toga će rotacija antene satelita ili prijemnika oko svoje ose u suštini biti

interpretirana kao promena u fazi nosećeg talasa, a samim tim i kao promena fazne pseudoduzine. Dok je antena prijemnika uglavnom stacionarna, satelitska antena vrši laganu rotaciju oko svoje ose zbog toga što se paneli GPS satelita konstantno reorijentišu u pravcu Sunca. Rotacija postaje veoma brza i nepravilna u periodima kada je satelit u Zemljinoj senci.

Popravka za efekat faznog uvijanja određuje se po izrazu:

$$\delta\phi = \text{sign}[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{d}_r \times \mathbf{d}^s)] \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{d}_r \cdot \mathbf{d}^s}{|\mathbf{d}_r| |\mathbf{d}^s|} \right), \quad (8.18)$$

u kojem \mathbf{k} označava jedinični vektor u pravcu sa stanice prema satelitu, a \mathbf{d}_r i \mathbf{d}^s su vektori koji se odnose na prijemnik i satelit, a računaju se na osnovu jediničnih vektora duž osa koordinatnog sistema sa početkom u centru mase satelita i lokalnog koordinatnog sistema sa početkom u stanici. Ukoliko se efekat faznog uvijanja zanemari, greška može dostići decimetarski nivo, odnosno nivo jednog faznog ciklusa.

Ako se, dakle, prepostavi da su navedeni efekti eliminisani modeliranjem, a da su istovremeno korišćene precizne efemeride i stanja satelitskih časovnika, funkcionalni modeli kodnih i faznih pseudoduzina na kojima počiva PPP metod dobijaju jednostavniji oblik:

$$P_{A,f}^i = r_A^i + c_0 \delta t_A + T_A^i + I_{A,f}^i + \varepsilon_{A,f,P}^i, \quad (8.19)$$

$$L_{A,f}^i = r_A^i + c_0 \delta t_A + T_A^i - I_{A,f}^i + \lambda_f N_{A,f}^i + \varepsilon_{A,f,L}^i, \quad (8.20)$$

pri čemu su u članu ε sadržani slučajni uticaji greške merenja i višestruke refleksije, kao i preostali nemodelirani efekti. Na osnovu ovih jednačina do sada su formulisana dva modela za precizno apsolutno pozicioniranje, koji se međusobno razlikuju po načinu na koji tretiraju uticaj jonosferske refrakcije. Prvi model naziva se tradicionalnim. Drugi potiče sa Univerziteta u Kalgariju i naziva se skraćeno UofC modelom.

Tradicionalni PPP metod zasniva se na frekvencijskim kombinacijama kodnih i faznih pseudoduzina, oslobođenih uticaja jonosfere (P_{IF} i L_{IF}), tako da funkcionalni model glasi:

$$\begin{aligned} P_{A,IF}^i &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} P_{A,1}^i - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} P_{A,2}^i, \\ &= r_A^i + c_0 \delta t_A + m(z) T_A^i + \varepsilon_{A,IF}^i \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned}
L_{A,IF}^i &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{A,1}^i - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{A,2}^i, \\
&= r_A^i + c_0 \delta t_A + m(z) T_A^i + \frac{f_1^2 \lambda_1 N_{A,1}^i - f_2^2 \lambda_2 N_{A,2}^i}{f_1^2 - f_2^2} + \varepsilon_{A,LIF}^i
\end{aligned} \quad (8.22)$$

gde je sa $m(z)$ označena redukciona funkcija kojom se množi zenitno troposfersko kašnjenje. Nepoznate veličine u tradicionalnom PPP modelu predstavljaju tri koordinate stanice, jedna greška časovnika prijemnika, jedno zenitno troposfersko kašnjenje i fazna neodređenost frekvencijske kombinacije L_{IF} za svaki opažani satelit. Iz matematičkog izraza tradicionalnog PPP modela vide se i određene karakteristike. Prvo, strogo posmatrano, IF frekvencijska kombinacija ne eliminiše jonosferske uticaje višeg reda koji mogu dostići vrednost i do par centimetara. Zatim, fazna neodređenost IF frekvencijske kombinacije ne poseduje više celobrojni karakter, tako da se mora ocenjivati kao realna vrednost. I konačno, standardna devijacija IF frekvencijske kombinacije tri puta je veća u odnosu na standardne devijacije originalnih faznih pseudodužina.

Kod UofC metode preciznog apsolutnog pozicioniranja iskorišćena je osobina jonosferske refrakcije da utiče podjednako na kodne i fazne pseudodužine ali sa suprotnim predznakom. To znači da će jonosfersko kašnjenje biti u potpunosti eliminisano u kodno-faznoj kombinaciji. Pored dve takve kombinacije, UofC metod koristi i tradicionalnu IF frekvencijsku kombinaciju, tako da kompletan funkcionalni model ima oblik:

$$\begin{aligned}
L_{A,IF1}^i &= 0.5(P_{A,1}^i + L_{A,1}^i) \\
&= r_A^i + c_0 \delta t_A + m(z) T_A^i + 0.5 \lambda_1 N_{A,1}^i + 0.5 \varepsilon_{A,LIF1}^i,
\end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned}
L_{A,IF2}^i &= 0.5(P_{A,2}^i + L_{A,2}^i) \\
&= r_A^i + c_0 \delta t_A + m(z) T_A^i + 0.5 \lambda_2 N_{A,2}^i + 0.5 \varepsilon_{A,LIF2}^i,
\end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned}
L_{A,IF}^i &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{A,1}^i - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{A,2}^i, \\
&= r_A^i + c_0 \delta t_A + m(z) T_A^i + \frac{f_1^2 \lambda_1 N_{A,1}^i - f_2^2 \lambda_2 N_{A,2}^i}{f_1^2 - f_2^2} + \varepsilon_{A,LIF}^i
\end{aligned} \quad (8.25)$$

Nepoznate veličine u UofC PPP modelu predstavljaju tri koordinate stanice, jedna greška časovnika prijemnika, jedno zenitno troposfersko kašnjenje i dve fazne neodređenosti za svaki opažani satelit. U poređenju sa tradicionalnim modelom, UofC model ima manju standardnu devijaciju kodno-fazne kombinacije, a pošto se fazne neodređenosti pojavljuju odvojeno, to znači da im je očuvan celobrojni

karakter. S druge strane, dok se kod tradicionalnog PPP modela može smatrati da između merenja nema zavisnosti, što rezultira dijagonalnom kovarijacionom matricom, to nije slučaj sa modelom UofC. Tri prikazana merenja ovog modela imaju u parovima zajedničke elemente, čime se između njih formira algebarska korelacija, a samim tim i kompleksniji stohastički model.

Za ocenjivanje nepoznatih parametara u PPP modelima obično se koristi neka forma sekvencijalnog filtera koji je u stanju da se adaptira varijabilnoj dinamici, kao što je to Kalmanov filter. Pošto se precizno apsolutno pozicioniranje može izvoditi kako stacionarnim prijemnikom (statički režim), tako i prijemnikom u pokretu (kinematički režim), pojedine grupe nepoznatih parametara tretiraju se na različite načine. Na primer, nepoznate koordinate modeliraju se kao konstante u statičkom režimu, ali se dozvoljava njihova promena u kinematičkom režimu. Fazne neodređenosti se smatraju konstantama bez obzira na režim rada, sve dok nema prekida signala. Greški časovnika prijemnika obično se pridružuje beli šum kao stohastički proces, dok je kod zenitnog troposferskog kašnjenja to slučajni hod.

Tačnost preciznog apsolutnog pozicioniranja zavisi od režima rada i dužine vremena opažanja. Poseban uticaj ima i kvalitet preciznih satelitskih orbita, a naročito podataka o stanju satelitskih časovnika. Više istraživanja potvrdilo je mogućnost pozicioniranja u statičkom režimu sa tačnošću od nekoliko centimetara, ali sa vremenom opažanja od preko 30 minuta. Sa protokom vremena, kvalitet konvergira ka centimetarskoj vrednosti. Međutim, u kinematičkom režimu rada tačnost pozicioniranja uglavnom dostiže nivo od par decimetara ako se koriste IGS efemeride i stanja časovnika.

8.3 Diferencijalno GPS pozicioniranje

Tačnost položaja od nekoliko metara koja se može postići autonomnim GPS pozicioniranjem, zadovoljava većinu potreba navigacije u otvorenom prostoru. Mnoge važne aplikacije međutim imaju zahteve za većom navigacionom tačnošću. Uplovljavanje u luke i marine po lošem vremenu, kretanje specijalizovanih aerodromskih vozila ili gradska vožnja, samo su neke od situacija gde se zahteva metarska tačnost navigacije. Kriterijumi kvaliteta preciznog sletanja ili upravljanja velikim građevinskim i poljoprivrednim mašinama još su oštriji, i kreću se od nekoliko decimetara pa do svega nekoliko centimetara.

Imajući u vidu faktore koji utiču na tačnost određivanja položaja, već je konstatovano da se kvalitet autonomnog GPS pozicioniranja može povećati na dva načina: poboljšanjem satelitske geometrije i redukcijom grešaka merenja. Da bi se poboljšala satelitska geometrija neophodno je pre svega povećati broj GPS satelita. Jasno je da korisnici nemaju takvu mogućnost, ali zato mogu koristiti poseban uređaj, pod nazivom pseudolit (skraćeno od pseudosatelit), koji emituje signale identične onima koje emituju pravi GPS sateliti. Nekoliko pseudolita raspoređenih na području radova izvanredno doprinosi ukupnoj satelitskoj geometriji, naročito u

slučajevima kada je deo neba blokiran za prijem pravih GPS signala. Nažalost, GPS prijemnici moraju u tom slučaju biti naročito modifikovani da bi mogli primati pseudolitske signale.

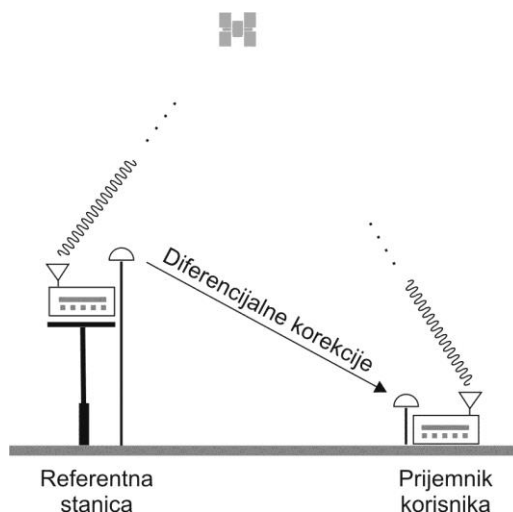
Ispostavlja se da je pristup sa redukcijom grešaka merenja mnogo jednostavniji. Simultana merenja dva relativno bliska GPS prijemnika biće opterećena greškama koje su po znaku i intenzitetu veoma slične. Isto važi i za greške dva merenja koja su izvedena uzastopno u relativno kratkom vremenskom roku. Drugim rečima, greške GPS merenja međusobno su korelisane i prostorno i vremenski. Osim toga, ukupna greška merenja lako se ocenjuje ako je GPS prijemnik na poznatoj lokaciji, jer je onda prijemnik u stanju da uporedi izmerene pseudodužine sa rastojanjima sračunatim iz koordinata referentne stanice i satelita. Ove činjenice omogućuju poseban način pozicioniranja koje se naziva diferencijalnim GPS pozicioniranjem (DGPS).

Osnovni DGPS koncept prikazan je na slici 8.1. GPS prijemnik na referentnoj stanici R vrši merenje kodnih pseudodužina do svih vidljivih satelita u unapred definisanim trenucima vremena koji se nazivaju epohama opažanja:

$$P_{R,f}^i = r_R^i + E_R^i + c_0 \delta t_R - c_0 \delta t^i + T_R^i + I_{R,f}^i + M_{R,f,P}^i + \varepsilon_{R,f,P}^i. \quad (8.26)$$

Pošto se referentna stanica nalazi na lokaciji sa poznatim koordinatama, prijemnik je u stanju da za svaku epohu opažanja odredi rastojanje do satelita r , oceni greške izmerenih pseudodužina e i emituje ih radio antenom u okolni prostor:

$$r_R^i = \sqrt{(x_R - x^i)^2 + (y_R - y^i)^2 + (z_R - z^i)^2}, \quad (8.27)$$



Slika 8.1. Princip diferencijalnog GPS pozicioniranja.

$$\begin{aligned}
e_{R,f}^i &= r_R^i - P_{R,f}^i \\
&= -E_R^i - c_0 \delta t_R + c_0 \delta t^i - T_R^i - I_{R,f}^i - M_{R,f,P}^i - \varepsilon_{R,f,P}^i.
\end{aligned} \tag{8.28}$$

U ovom kontekstu, ocenjene greške pseudodužina e nazivaju se diferencijalnim korekcijama. GPS korisnik A , koji je u blizini referentne stanice, vrši manje ili više simultano svoja merenja kodnih pseudodužina do istih satelita:

$$P_{A,f}^i = r_A^i + E_A^i + c_0 \delta t_A - c_0 \delta t^i + T_A^i + I_{A,f}^i + M_{A,f,P}^i + \varepsilon_{A,f,P}^i. \tag{8.29}$$

prihvata diferencijalne korekcije radio antenom, i primenjuje ih na svoja merenja:

$$\begin{aligned}
\bar{P}_{A,f}^i &= P_{A,f}^i + e_{A,f}^i \\
&= (E_A^i - E_R^i) + c_0 (\delta t_A - \delta t_R) + (T_A^i - T_R^i) + (I_{A,f}^i - I_{R,f}^i), \\
&\quad + M_{AR,f,P}^i + \varepsilon_{AR,f,P}^i
\end{aligned} \tag{8.30}$$

pri čemu se očigledno eliminiše greška časovnika satelita. Za prenos diferencijalnih korekcija može se upotrebiti i bilo koji drugi oblik terestričke ili satelitske telemetrije (kontrolisane radio veze). Imajući sada na umu da greške satelitskih orbita, troposferska i jonosferska refrakcija slično deluju na merenja na referentnoj stanici i stanici korisnika zbog njihove blizine, i da se stoga u dobroj meri poništavaju, sa veoma dobrom aproksimacijom važi sledeći izraz za popravljene korisničke pseudodužine:

$$\bar{P}_{A,f}^i = c_0 (\delta t_A - \delta t_R) + M_{AR,f,P}^i + \varepsilon_{AR,f,P}^i. \tag{8.31}$$

Odavde se vidi i da se poništavanje uticaja ne odnosi na efekte višestruke refleksije i greške merenja zbog njihovog slučajnog karaktera, već da se ustvari uvećavaju. Bez obzira na to, koristeći popravljene kodne pseudodužine korisnik može odrediti svoj položaj autonomnim GPS pozicioniranjem mnogo tačnije nego sa originalnim merenjima.

Pored satelitske geometrije i tačnosti merenja, kod DGPS pozicioniranja pojavljuju se dva dodatna faktora od kojih zavisi kvalitet određivanja položaja:

- *Udaljenost od referentne stanice.* Kada je korisnik u neposrednoj blizini referentne stanice, pretpostavka o visokoj korelaciji između grešaka njegovih merenja i merenja na referentnoj stanici ima potpuno opravdanje. Sa udaljavanjem od referentne stanice prostorna korelacija između grešaka postaje sve slabija, tako da se smatra da na rastojanjima većim od 100 km diferencijalne korekcije više ne reprezentuju adekvatno greške merenja na lokaciji korisnika. Rastojanje između referentne stanice i korisnika može

takođe imati značaja i zbog dometa radio veze ako se ona koristi za prenos korekcija.

- *Starost i kašnjenje korekcija.* S druge strane, da bi pretpostavka o visokoj vremenskoj korelaciji grešaka odgovarala stvarnosti neophodno je da vremenski interval od generisanja diferencijalnih korekcija do njihove primene bude što kraći. U tom pogledu ponekad se razlikuju dva pojma. Pod kašnjenjem korekcija podrazumeva se interval vremena od trenutka kada su korekcije generisane na referentnoj stanici do trenutka njihovog prijema korisničkim prijemnikom. Starost korekcija je vremenski interval od trenutka njihovog generisanja do trenutka kada ih korisnički prijemnik primeni na svoja merenja. Da bi se smanjio uticaj kašnjenja i starosti, referentna stanica može određivati i emitovati ne samo diferencijalne korekcije već i brzinu njihove promene.

Kada se primeni u svom izvornom obliku, DGPS se naziva apsolutnim i omogućuje pozicioniranje sa tačnošću od 1 – 3 m, u zavisnosti od rastojanja do referentne stanice i starosti diferencijalnih korekcija. Međutim, ispostavlja se da zahtev da referentni prijemnik bude na stanici sa poznatim koordinatama nije neophodan. Ako su koordinate referentne stanice poznate samo približno, tada će diferencijalne korekcije biti opterećene njihovom greškom, ali kada se primene na korisnička merenja imaće za rezultat podjednako približan položaj i korisnika. Pošto će s druge strane položaj korisnika u odnosu na referentnu stanicu biti dobro određen, ovaj vid DGPS pozicioniranja označava se kao relativan.

Ne postoji nikakav principijeni razlog da se DGPS filozofija ne primeni i na fazne pseudodužine. Diferencijalne korekcije računaju se na potpuno isti način, ali njihovo korišćenje podrazumeva rešavanje problema faznih neodređenosti. Ako rastojanje do referentne stanice nije veće od 20 – 30 km, moguće je postići tačnost bolju od 0.1 m, zbog čega se ovaj način pozicioniranja zove precizni DGPS.

8.4 Relativno GPS pozicioniranje

Umesto da računa i emituje korekcije, referentna stanica može direktno emitovati svoja originalna opažanja zajedno sa njihovim epohama. Korisnički GPS prijemnik kombinuje primljene pseudodužine sa sopstvenim pseudodužinama izmerenim u istim epohama, i tako dobija:

$$\begin{aligned}
 P_{AR,f}^i &= P_{A,f}^i - P_{R,f}^i \\
 &= (r_A^i - r_R^i) + (E_A^i - E_R^i) + c_0(\delta t_A - \delta t_R) + (T_A^i - T_R^i) + (I_{A,f}^i - I_{R,f}^i) \cdot (8.32) \\
 &\quad + M_{AR,f,P}^i + \varepsilon_{AR,f,P}^i
 \end{aligned}$$

Slično korišćenju diferencijalnih korekcija, i u ovoj situaciji se zbog relativne blizine referentne i korisničke stanice u dobroj meri poništavaju uticaji grešaka efemerida, troposferske i jonosferske refrakcije, čime model dobija jednostavniju strukturu:

$$\begin{aligned} P_{AR,f}^i &= (r_A^i - r_R^i) + c_0(\delta t_A - \delta t_R) + M_{AR,f,P}^i + \varepsilon_{AR,f,P}^i \\ &= r_{AR}^i + c_0\delta t_{AR} + M_{AR,f,P}^i + \varepsilon_{AR,f,P}^i \end{aligned} \quad (8.33)$$

U modelu se pojavljuje razlika geometrijskih rastojanja ($r_A - r_R$), tako da se na ovaj način ustvari određuje relativni položaj korisnika u odnosu na referentnu stanicu. Nepoznate veličine čine tri koordinatne razlike i jedna greška nesinhronizacije časovnika, što znači da su za rešenje neophodne najmanje četiri izmerene kodne pseudoduzine. S obzirom na to da se umesto koordinata dobijaju koordinatne razlike, metoda se naziva relativnim GPS pozicioniranjem. Naravno, koordinate korisnika lako se računaju kada se koordinatne razlike dodaju na poznate koordinate referentne stanice.

Iako se relativno GPS pozicioniranje pojavljuje kao alternativa diferencijalnom GPS, između dve metode postoji jedna suptilna razlika. Diferencijalni GPS koristi korekcije koje se sporo menjaju, i praktično se mogu smatrati konstantnim u periodu od jednog ili dva minuta. Relativno GPS pozicioniranje zasniva se na originalnim pseudoduzinama, a njihova promena je mnogo brža i dostiže 1 km/s. To znači da se posebna pažnja mora obratiti na nepoklapanje epoha merenja na referentnoj stanici i stanici korisnika, čak i kad je ono manje od 1 ms. Pošto sistemi za emitovanje podrazumevaju tipično kašnjenje od 1 – 2 s, neophodno je isto tako primeniti i odgovarajući interpolacioni postupak da bi se merenja referentnog prijemnika svela na epohu kada su vršena merenja korisničkog prijemnika.

Relativno GPS pozicioniranje se naravno može izvoditi i tako da referentna stanica emituje fazne pseudoduzine. Odgovarajući funkcionalni model kombinacije koju formira korisnički prijemnik glasi u tom slučaju:

$$\begin{aligned} L_{AR,f}^i &= (r_A^i - r_R^i) + c_0(\delta t_A - \delta t_R) + \lambda_f(N_{A,f}^i - N_{R,f}^i) + M_{AR,f,L}^i + \varepsilon_{AR,f,L}^i \\ &= r_{AR}^i + c_0\delta t_{AR} + \lambda_f N_{AR,f}^i + M_{AR,f,L}^i + \varepsilon_{AR,f,L}^i \end{aligned} \quad (8.34)$$

što je identično modelu kodnih pseudoduzina, sa dodatkom člana koji se odnosi na faznu neodređenost. Pored toga, kombinovani uticaj višestruke refleksije i grešaka merenja višestruko je manji kod faznih pseudoduzina u poređenju sa kodnim. Modeli kodnih i faznih kombinacija (8.33) i (8.34) predstavljaju ustvari poznati slučaj prostih razlika interferometrijskog tipa. Korisnički prijemnik može isto tako formirati i, na primer, dvostruke razlike:

$$P_{AR,f}^{ij} = r_{AR}^{ij} + M_{AR,f,P}^{ij} + \varepsilon_{AR,f,P}^{ij} \quad (8.35)$$

$$L_{AR,f}^{ij} = r_{AR}^{ij} + \lambda_f N_{AR,f}^{ij} + M_{AR,f,L}^{ij} + \varepsilon_{AR,f,L}^{ij}, \quad (8.36)$$

ili njihove frekvencijske kombinacije, i određivati svoj relativni položaj shodno tim modelima.

U principu, postoje dva osnovna režima rada kada je u pitanju relativno GPS pozicioniranje:

- *Kinematičko pozicioniranje.* Kinematičko pozicioniranje je relativno GPS pozicioniranje pokretnog korisnika u realnom vremenu. Ako se tom prilikom koriste kodne pseudoduzine, postiže se tačnost relativnih položaja na nivou od nekoliko decimetara. Kinematičko pozicioniranje faznim pseudoduzinama obezbeđuje tačnost bolju od decimetra, pod uslovom da su prethodno rešene fazne neodređenosti, i tada se ova posebna forma određivanja putanje pokretnog korisnika naziva RTK pozicioniranjem. Proces rešavanja faznih neodređenosti poznat je kao inicijalizacija. Ukoliko iz bilo kog razloga dođe do prekida signala neophodna je ponovna inicijalizacija. RTK varijantom, pod nazivom Stop&Go, postiže se čak centimetarska tačnost ako se korisnik kraće vreme zadržava na tačkama čiji se položaji određuju.
- *Statičko pozicioniranje.* Relativno pozicioniranje stacionarnog korisnika u odnosu na referentnu stanicu naziva se statičkim pozicioniranjem. Ono očigledno nema nikakav navigacioni značaj, niti su rezultati potrebni u realnom vremenu, pa stoga ne zahteva ni komunikacionu vezu korisnika sa referentnom stanicom. Relativni položaji tačaka određuju se umesto toga naknadnom softverskom obradom proizvoljno dugo prikupljenih rezultata merenja. Zbog velikog broja opažanja, odnosno mogućnosti stroge statističke analize i pouzdanog rešavanja faznih neodređenosti, statičkim GPS pozicioniranjem postiže se milimetarska tačnost relativnih položaja.

U stručnoj literaturi ne samo da postoji određena terminološka nekonzistentnost u korišćenju pojmova diferencijalnog i relativnog GPS pozicioniranja, već se vodi i polemika o tome jesu li to različite metode ili dve varijante istog postupka. U svakom slučaju, ove metode razlikuju se po tome što jedna koristi diferencijalne korekcije a druga originalna opažanja. Diferencijalnim pozicioniranjem formalno se određuju apsolutni položaji tačaka, a relativnim pozicioniranjem koordinatne razlike. S druge strane zajedničko im je to da nijedna nije autonomna, jer se obe zasnivaju na korišćenju dva GPS prijemnika. Moglo bi se ustvari dokazati da diferencijalno i relativno pozicioniranje daju teorijski iste rezultate pod uslovom da nema nikakvog kašnjenja diferencijalnih korekcija.

8.5 Problem faznih neodređenosti

Već je više puta pomenuto u kontekstu diferencijalnog GPS i relativnog GPS pozicioniranja, da se značajno veća tačnost položaja ostvaruje upotrebom faznih pseudoduzina, ali pod uslovom da su prethodno rešene fazne neodređenosti. Uopšteno posmatrano, metode rešavanja faznih neodređenosti razvijane su uglavnom paralelno za dva velika područja primene. Prvo se odnosi na statičke metode pozicioniranja u višestaničnim mrežama u kojima je vreme zaposedanja tačaka od nekoliko sati do nekoliko dana, i u kojima međustanična rastojanja mogu iznositi do više hiljada kilometara. Drugo su brze statičke, kinematičke i navigacione primene, koje po pravilu podrazumevaju dve tačke od kojih je barem jedna pokretna, sa veoma kratkim vremenom zaposedanja i rastojanjima koja iznose do nekoliko desetina kilometara. Međutim, savremena klasifikacija metoda rešavanja faznih neodređenosti ne zasniva se na području primene već na kriterijumu načina korišćenja informacija sadržanih u faznim merenjima. U tom smislu postoje geometrijske metode iz domena merenja, metode pretraživanja iz domena koordinata i metode pretraživanja iz domena faznih neodređenosti.

Obrada GPS merenja danas podrazumeva gotovo isključivu upotrebu metoda koje se zasnivaju na pretraživanju u prostoru faznih neodređenosti. Ovim metodama vrši se prvo ocenjivanje realnih vrednosti faznih neodređenosti, zatim utvrđivanje njihovih celobrojnih vrednosti, i na kraju konačno ocenjivanje koordinata tačaka. Najvažniji rezultati ocenjivanja prve faze su vektor realnih vrednosti faznih neodređenosti $\hat{\mathbf{x}}_N$ i odgovarajuća kovarijaciona matrica \mathbf{C}_N . Drugom i trećom fazom definiše se prostor potencijalnih rešenja, iterativno određuje vektor celobrojnih vrednosti faznih neodređenosti $\tilde{\mathbf{x}}_N$ i vrednuje kvalitet njihovog izbora. U ovim fazama metode se mogu razlikovati po nizu kriterijuma, odakle i potiče njihova mnogobrojnost.

Određivanje celobrojnih vrednosti faznih neodređenosti u svom osnovnom obliku svodi se na zaokruživanje realne ocene \hat{N}_i na najbliži celi broj \tilde{N}_i . Međutim, ovako jednostavan postupak primenljiv je samo kada realne vrednosti konvergiraju odgovarajućim celobrojnim vrednostima, što podrazumeva veoma duge nizove merenja i mala međustanična rastojanja. U suprotnom, svaka celobrojna vrednost \tilde{N}_k može se smatrati potencijalno tačnim rešenjem ako zadovoljava nejednakosti:

$$\hat{N}_i - t_{f,1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{ii} \leq \tilde{N}_k \leq \hat{N}_i + t_{f,1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{ii}, \quad (8.37)$$

gde t označava kvantil Studentovog rasporeda za f stepeni slobode i nivo značajnosti α , dok je $\hat{\sigma}$ ocena standarda odgovarajuće realne vrednosti fazne neodređenosti. FARA metodom smanjuje se broj svih kombinacija potencijalnih celobrojnih vrednosti zadržavanjem samo onih čiji parovi \tilde{N}_i i \tilde{N}_j zadovoljavaju nejednakosti:

$$\left| \hat{N}_i - \hat{N}_j \right| - t_{f,1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{ij} \leq \left| \tilde{N}_i - \tilde{N}_j \right| \leq \left| \hat{N}_i - \hat{N}_j \right| + t_{f,1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{ij}, \quad (8.38)$$

pri čemu se standard $\hat{\sigma}_{ij}$ računa pomoću odgovarajućih članova kovarijacione matrice \mathbf{C}_N :

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sqrt{c_{ii} - 2c_{ij} + c_{jj}}. \quad (8.39)$$

Svaka potencijalna kombinacija celobrojnih faznih neodređenosti uvodi se potom u postupak MNK ocenjivanja, a konačno rešenje predstavlja kombinacija koja za posledicu ima najmanju ocenu $\hat{\sigma}_0$.

Sasvim drugačiji pristup pri redukciji ukupnog broja kombinacija potencijalnih celobrojnih vrednosti faznih neodređenosti upotrebljen je kod LSAST metode. On se sastoji u razdvajanju vektora dvostrukih razlika \mathbf{I}_{DD} na primarne (p) koje su neophodne za jednoznačno rešenje, i sekundarne (s) koje čine sve ostale:

$$\mathbf{I}_{DD} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{DD,p} & \mathbf{I}_{DD,s} \end{bmatrix}. \quad (8.40)$$

Kada se formiraju kombinacije potencijalnih celobrojnih vrednosti samo za primarna opažanja, njihov ukupan broj biće znatno manji u poređenju sa brojem svih mogućih kombinacija. Za svaki skup primarnih potencijalnih celobrojnih vrednosti, MNK ocena nepoznatih koordinata dobija se kao:

$$\hat{\mathbf{x}}_p = \left(\mathbf{A}_p^T \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p \right)^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{I}_{DD,p} = \mathbf{N}_p^{-1} \mathbf{n}_p, \quad (8.41)$$

i omogućuje preliminarno rešavanje faznih neodređenosti sekundarnih opažanja operatorom zaokruživanja na najbliži ceo broj (NINT):

$$\tilde{N}_{DD,s} = \text{NINT} \left(\frac{L_{DD,s} - r_{DD,s}}{\lambda} \right). \quad (8.42)$$

Efikasnost LSAST metode ogleda se upravo u korišćenju ovog operatora, jer se na taj način eliminiše potreba za testiranjem alternativnih sekundarnih kombinacija. Ocene koordinata dobijaju se rekurzivnim postupkom, a za konačno rešenje usvaja se onaj skup primarnih i sekundarnih faznih neodređenosti koji za posledicu ima najmanju ocenu $\hat{\sigma}_0$.

Koncept primarnih i sekundarnih faznih neodređenosti iskorišćen je i kod FASF metode, s tom razlikom što primarna grupa nije konstantnih dimenzija već sukcesivno uključuje prethodno rešene celobrojne vrednosti u postupku koji se naziva rekurzivnim računanjem intervala pretraživanja (RCSR). Granice intervala određene su izrazom:

$$\left(\hat{N}_{i1,2,\dots,i-1}\right)_{\min} \leq \tilde{N}_i \leq \left(\hat{N}_{i1,2,\dots,i-1}\right)_{\max}, \quad (8.43)$$

i može se dokazati da sadrže tačnu vrednost proizvoljne fazne neodređenosti N_i pod uslovom da su već utvrđene tačne vrednosti prethodnih faznih neodređenosti.

Međusobna zavisnost realnih vrednosti MNK ocena faznih neodređenosti $\hat{\mathbf{x}}_N$ obrnuto je proporcionalna vremenu merenja. U hipotetičkom slučaju da te zavisnosti nema, odnosno da je odgovarajuća kovarijaciona matrica \mathbf{C}_N dijagonalna, postupak rešavanja faznih neodređenosti sastojao bi se u jednostavnom zaokruživanju, jer bi na taj način bio ispunjen uslov:

$$\|\hat{\mathbf{x}}_N - \tilde{\mathbf{x}}_N\|_{\mathbf{C}_N^{-1}} = \min. \quad (8.44)$$

Osnovna ideja LAMBDA metode zasniva se upravo na maksimalnoj dekorelaciji realnih vrednosti MNK ocena faznih neodređenosti, čime se znatno olakšava proces određivanja njihovih celobrojnih vrednosti. Dekorelacija se izvodi nalaženjem celobrojne matrice \mathbf{Z} kojom se transformiše vektor ocena faznih neodređenosti i njegova kovarijaciona matrica:

$$\hat{\mathbf{z}}_N = \mathbf{Z}^T \hat{\mathbf{x}}_N, \quad (8.45)$$

$$\mathbf{C}_Z = \mathbf{Z}^T \mathbf{C}_N \mathbf{Z}. \quad (8.46)$$

Međutim, zbog uslova celobrojnosti transformacione matrice moguća je samo približno potpuna dekorelacija. Najvažnija osobina transformisanih faznih neodređenosti je da njihov region poverenja:

$$\left(\hat{\mathbf{z}}_N - \mathbf{z}_N\right)^T \mathbf{C}_Z^{-1} \left(\hat{\mathbf{z}}_N - \mathbf{z}_N\right) \leq \chi^2 \quad (8.47)$$

približno odgovara po obliku hipersferi, za razliku od hiperelipsoidnog i veoma izduženog oblika regiona poverenja originalnih faznih neodređenosti. Na taj način se mnogo pogodnije formulišu skupovi potencijalnih celobrojnih faznih neodređenosti i omogućuje primena efikasnih algoritama pretraživanja. Nalaženje transformacione matrice \mathbf{Z} operativno se sprovodi nizom celobrojnih Gausovih transformacija i permutacija kolona i vrsta.

Metode pretraživanja u prostoru faznih neodređenosti koje se danas primenjuju uglavnom su optimizovane u smislu brzine računanja. Neke od njih, kao FASF ili LAMBDA, rešavaju fazne neodređenosti za manje od stotog dela sekunde, što je dovoljno za najveći broj praktičnih situacija. Slabije su istraženi neki drugi aspekti problema kao što su stohastički model i sistem kontrole kvaliteta. Stoga su istraživački naponi trenutno usmereni na definisanje opšteg oblika postupka rešavanja faznih neodređenosti, primenljivog jednako i na statičke i kinematičke

situacije, nezavisnog od međustaničnih rastojanja, i sposobnog za reprodukciju rezultata na proizvoljnom mestu i u bilo kom trenutku vremena.

8.6 Višestanični DGPS sistemi

Diferencijalno pozicioniranje može se zasnivati na jednostaničnoj ili višestaničnoj arhitekturi. U jednostaničnom DGPS modelu koristi se samo jedna referentna stanica za računanje diferencijalnih korekcija. Ovaj koncept je jednostavan, ali ograničava korisnika na relativno mali prostor oko referentne stanice u kojem su diferencijalne korekcije upotrebljive. Zbog degradacije tačnosti sa udaljavanjem od referentne stanice, jednostanični DGPS sistemi koriste se obično u izolovanim lokalnim aplikacijama.

Višestanični DGPS model podrazumeva korišćenje diferencijalnih korekcija sa nekoliko referentnih stanica. Prednost ovog koncepta sastoji se u tome što znatno povećava područje pokrivenosti i obezbeđuje homogeniji kvalitet pozicioniranja. Implementacija višestaničnih DGPS sistema povezana je međutim sa većim troškovima instaliranja i održavanja, kompleksnijim hardverskim i softverskim zahtevima, i dodatnim kašnjenjem korekcija zbog mrežnog računanja.

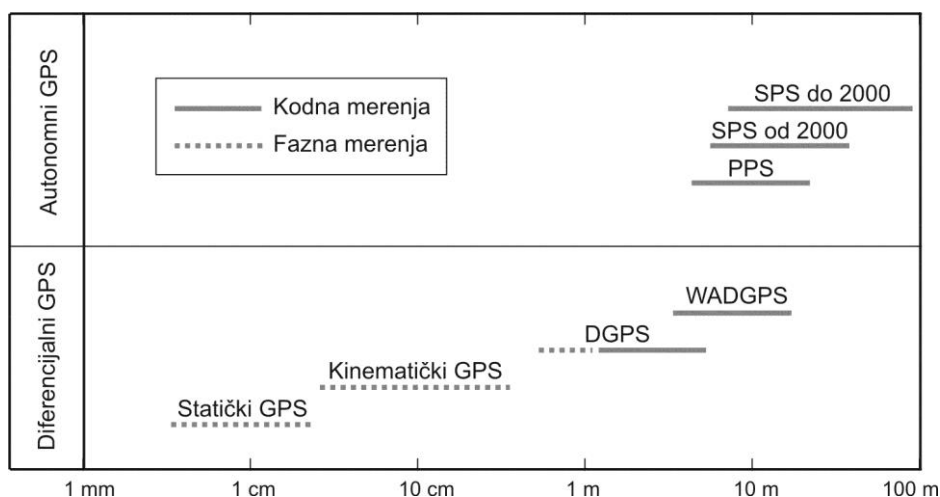
Višestanični DGPS sistemi sastoje se od mreže referentnih stanica, jednog ili više kontrolnih centara i odgovarajuće komunikacione infrastrukture. U zavisnosti od područja pokrivenosti, gustine referentnih stanica, strukture diferencijalnih korekcija i načina njihovog emitovanja, razlikuju se dva osnovna tipa realizacije:

- *Lokalni DGPS sistemi (LADGPS)*. Ovo su višestanični DGPS sistemi sa ograničenim područjem pokrivenosti i relativno velikom gustinom referentnih stanica. Princip LADGPS korišćenja sastoji se u prijemu korekcija sa najbliže referentne stanice, ili osrednjenih vrednosti korekcija sa nekoliko okolnih referentnih stanica. Diferencijalne korekcije računaju se u skalarnom obliku, a emituju se po pravilu terestričkim sredstvima veze. Zbog područja pokrivenosti i načina emitovanja korekcija, LADGPS sistemi nazivaju se još i lokalnim sistemima unapređenja (LAAS), ili terestričkim sistemima unapređenja (GBAS). LADGPS sistemi obično su predviđeni za precizno DGPS pozicioniranje.
- *Globalni DGPS sistemi (WADGPS)*. Uspostavljanje LADGPS sistema na području veličine kontinenta bilo bi nepraktično i neekonomično zbog velikog broja referentnih stanica. Alternativa je centralizovani WADGPS sistem malog broja referentnih stanica i velikog područja pokrivenosti. Korekcije se po WADGPS konceptu određuju u vektorskom obliku. To znači da kontrolni centar prikuplja skalarnu korekciju sa svih referentnih stanica i razlaže ih na komponente koje predstavljaju efekte pojedinih izvora grešaka. Vektorske korekcije prosleđuju se GEO satelitima sa kojih se emituju u takvom obliku da korisnik može odrediti vrednosti pojedinih

komponenti na osnovu svog približnog položaja. Zbog toga su WADGPS sistemi poznati i kao globalni sistemi unapređenja (WAAS), ili satelitski sistemi unapređenja (SBAS). Najpoznatiji sistemi koji se trenutno razvijaju su američki WAAS, evropski EGNOS i japanski MSAS.

Negde unutar ove kategorizacije nalaze se i nacionalne mreže referentnih stanica koje su pojedine zemlje u međuvremenu uspostavile za potrebe precizne navigacije i pozicioniranja na svojoj teritoriji. Ovakve mreže ustvari najviše odgovaraju LADGPS arhitekturi sa prosečnim međustaničnim rastojanjima između 50 km i 100 km, ali imaju i neke karakteristike WADGPS sistema kao što su dekompozicija korekcija ili mogućnost njihovog prenosa putem Interneta.

Pregled tipične tačnosti pozicioniranja koja se može postići raznim metodama GPS korišćenja dat je na slici 8.2. Za vreme aktivne SA mere zaštite, autonomno SPS pozicioniranje moglo je obezbediti tačnost položaja od nekoliko desetina metara. Od 2000. godine, ovim režimom rada postiže se tačnost bolja od 10 m. PPS korisnici opremljeni dvofrekventnim prijemnicima imaju mogućnost eliminacije jonosferskih uticaja i nešto višeg kvaliteta pozicioniranja. Dalje poboljšanje GPS performansi moguće je jedino dodatnim investicijama u vidu sistemskih proširenja. WADGPS sistemi nude globalnu položajnu tačnost od nekoliko metara u realnom vremenu. Metarski i decimetarski nivo karakterističan je za LADGPS sisteme pozicioniranja, pri čemu ključnu ulogu imaju udaljenost referentne stanice i tip korekcija. Određivanje relativnih položaja u odnosu na obližnje referentne stanice izvodi se čak i sa centimetarskom tačnošću u realnom vremenu ako se koriste fazna GPS merenja. Sistemi sa takvim mogućnostima nalaze danas veliku primenu u preciznoj navigaciji i masovnim geodetskim radovima. Konačno, statičkim GPS



Slika 8.2. Tipična prosečna tačnost različitih metoda GPS pozicioniranja.

pozicioniranjem moguće je ostvariti milimetarsku preciznost relativnih položaja, ali ne u realnom vremenu. Ovakav režim korišćenja ograničen je na visokotačna geodetska i geodinamička istraživanja.

8.7 GPS primene i modernizacija

Od prvobitne ideje o isključivo vojnoj nameni, do današnje dominantno civilne upotrebe, broj i raznovrsnost GPS aplikacija narasli su do nivoa koji projektanti sistema nisu mogli ni da zamisle. Svaki dan se praktično otkrivaju sasvim nove oblasti primene. Rastući zahtevi naveli su DoD da još 1998. godine sačini plan modernizacije NAVSTAR sistema, predviđajući sve širi spektar korisnika u naredne dve decenije.

Većina GPS aplikacija može se smestiti u jednu od sledećih kategorija:

- precizno pozicioniranje i transfer vremena,
- vazduhoplovna i kosmička navigacija,
- kopneni transport i pomorska navigacija,
- potrošačko tržište.

Precizno pozicioniranje i transfer vremena. Precizno GPS pozicioniranje faznim merenjima nalazi primenu pre svega u geodetskim i geofizičkim istraživanjima. Milimetarski precizni relativni položaji omogućuju određivanje pomeranja kontinentalnih litosfernih ploča, istraživanje postglacijalnog izdizanja i deformacija Zemljine kore, tektonskih, seizmičkih i vulkanskih procesa, kretanja glečera i varijacija u Zemljinoj rotaciji. Rešavanje ovako krupnih naučnih problema naročito je dobilo na zamahu osnivanjem Međunarodne GPS službe (IGS), koja svoja istraživanja bazira na rezultatima permanentnih opažanja sa preko 200 globalno raspoređenih GPS stanica.

Mogućnosti preciznog relativnog GPS pozicioniranja takođe se sve više koriste za praćenje deformacija velikih inženjerskih objekata. Pomeranje brana, mostova i visokih zgrada pod uticajem vetra ili kontrolisanog opterećenja dobija se u realnom vremenu sa centimetarskom tačnošću. Podjednako efikasno je i korišćenje GPS za određivanje položaja i orijentacije kamere prilikom fotogrametrijskog snimanja iz vazduha. U istraživanjima atmosfere, precizna GPS merenja upotrebljavaju se za praćenje koncentracije elektrona u jonosferi i sadržaja vodene pare u troposferi.

Tržište za GPS prijemnike namenjene preciznim aplikacijama i naučnim istraživanjima veoma je malo. Međutim, tehnike koje su u okviru njih razvijene značajno su unapredile geodetski premer i izradu geografskih informacionih sistema (GIS), stvarajući na taj način ogromno tržište za GPS prijemnike visokih performansi i zaokružena GPS rešenja. Danas postoji veliki broj sistema sa integrisanim prijemnicima, personalnim računarima i radio vezom, koji omogućuju

brzo, efikasno i ekonomično prikupljanje pozicionih i atributskih informacija, njihovu vizualizaciju, i punjenje ili ažuriranje geografskih baza podataka.

Kontrola velikih poljoprivrednih, građevinskih ili rudarskih mašina u realnom vremenu još je jedno polje primene tehnika preciznog pozicioniranja. GPS se u ovim aplikacijama koristi za navigaciju mašina ili za navođenje pokretnih mašinskih delova na određenu visinu ili ugao. Tako su, na primer, već u upotrebi građevinske mašine sa računarski podržanim hidrauličkim sistemom, koje uz pomoć integrisanog GPS prijemnika mogu potpuno autonomno izvoditi zemljane radove, pri čemu se uloga čoveka svodi samo na kontrolisanje i nadgledanje.

GPS nije samo sredstvo za precizno pozicioniranje, nego i globalni izvor preciznog vremena i frekvencije. Nacionalne i međunarodne laboratorije, koje održavaju standard vremena, koriste GPS za međusobna upoređenja, jer su jeftini GPS prijemnici u stanju da ocenjuju vreme sa tačnošću koju su ranije postizali samo atomski standardi. GPS izvedeno vreme već se upotrebljava za sinhronizaciju elemenata telekomunikacionih mreža i analizu stanja energetskih sistema. U glavnim Internet čvorovima vreme se postavlja uz pomoć GPS.

Vazduhoplovna i kosmička navigacija. Sve do pre nekoliko godina civilno vazduhoplovstvo se u potpunosti oslanjalo na avionske inercijalne navigacione sisteme i pomoćna terestrička radionavigaciona sredstva. GPS se smatra velikim napretkom u ovoj oblasti, sa potencijalom da značajno poveća i ekonomičnost i sigurnost vazdušnih operacija.

Vazduhoplovna navigacija je osetljiva oblast sa veoma strogim zahtevima koji se ne odnose samo na tačnost, već i na integritet i kontinuitet navigacionog sistema. Da bi se ovi zahtevi ispunili, svaka država propisuje odgovarajuće standarde i kriterijume sertifikacije. GPS je u SAD sertifikovan kao primarno sredstvo za navigaciju u vazdušnom prostoru iznad okeana i udaljenih oblasti, a kao pomoćno navigaciono sredstvo za rutnu, terminalsku i prilaznu fazu leta.

U bližoj budućnosti očekuje se da GPS bude korišćen kao primarno navigaciono sredstvo u svim fazama leta. SAD, Evropa i Japan rade zajednički na realizaciji jedinstvenog WADGPS sistema sa globalnom pokrivenošću, u okviru kojeg će GEO sateliti emitovati na frekvenciji L1 ne samo diferencijalne korekcije nego i podatke o integritetu satelitskih signala. Sistem je planiran tako da u potpunosti ispunji kriterijume tačnosti, integriteta i kontinuiteta za rutnu i terminalsku fazu leta. Za fazu preciznog prilaza, kod koje se zahteva visinska tačnost bolja od 1 m sa garantovanim integritetom i kontinuitetom, predviđeno je uspostavljanje LADGPS sistema na svakom većem aerodromu. Funkcija ovih sistema biće i da omoguće automatsko sletanje aviona i kontrolu saobraćaja na pistama.

GPS prijemnici na LEO satelitima već postaju primarni izvor podataka o položaju, brzini, orijentaciji, promeni orijentacije i vremena umesto nizova senzora koji su se do sada koristili u te svrhe. Nekoliko kosmičkih misija izvedenih u poslednjih deset godina dokazalo je da se na taj način znatno smanjuje cena izrade i

kompleksnost kosmičkih letelica. Tako je i međunarodna kosmička stanica (ISS) projektovana da koristi GPS za navigaciju, određivanje orijentacije i praćenje letelica koje joj prilaze, a izvedeno GPS vreme za sinhronizaciju i raspored satelitskih operacija. Osim toga, izvesno je da će buduće satelitske misije koristiti GPS prijemnike i odgovarajući softver za autonomno određivanje i održavanje satelitskih orbita, jer su eksperimenti potvrdili da je takav koncept daleko bolji i efikasniji od svakog terestričkog radarskog sistema koji je danas u upotrebi.

Kopneni transport i pomorska navigacija. GPS se trenutno najviše koristi u kopnom transportu, naročito za navigaciju i praćenje vozila. Postoji velika potreba za GPS sistemima u komercijalnom transportu, javnom saobraćaju i hitnim službama, tako da je najveći broj GPS prijemnika proizvedenih posle 1990. godine bio namenjen upravo ovom tržištu. GPS sistemi za automatsko lociranje i navigaciju vozila danas su standardni deo ponude automobilske industrije. Železničke kompanije takođe razmatraju GPS kao alternativno sredstvo za kontrolu vozova. U toku je projektovanje sistema zasnovanih na GPS tehnologiji i bežičnim komunikacijama, koji bi služili za navođenje vozila do odredišta uz pomoć informacija o trenutnom stanju saobraćaja.

GPS sistemi za sada ne mogu biti isključivo sredstvo za kopnenu navigaciju zbog toga što je za autonomno GPS pozicioniranje neophodna vidljivost najmanje četiri satelita. Reljefni oblici, krošnje drveća i visoke zgrade mogu blokirati deo neba, tako da je neprekidni prijem signala sa četiri i više satelita često nemoguć. Zato se GPS sistemi za kopnenu navigaciju obično sastoje i od dopunskih senzora kao što su žiroskopi, odometri, inklinometri, kompasi i akcelerometri, kojima se ne mogu određivati apsolutni položaji vozila, ali se mogu premostiti kraći periodi kada GPS prijemnici nisu u stanju da prate signale sa dovoljnog broja satelita.

U odnosu na kopnenu navigaciju, situacija sa prijemom GPS signala daleko je povoljnija na otvorenom moru, gde praktično ne postoje prirodne prepreke koje zaklanjaju nebo. U tom pogledu, pomorska navigacija ima još jednu prednost. Pošto srednji nivo mora i okeana predstavlja površ čija je visina približno jednaka nuli, za određivanje horizontalnog položaja plovećeg objekta i greške časovnika GPS prijemnika dovoljna su opažanja i sa samo tri satelita.

Na svetskim morima i okeanima postoje milioni čamaca, ribarskih brodova, jahti, feribota, putničkih brodova, teretnih brodova i tankera koji se oslanjaju na GPS navigaciju. Nakon nekoliko ekoloških incidenata sa izlivanjem nafte, mnoge veće luke implementirale su sistem za aktivno praćenje, koji se bazira na prijemu DGPS pozicija tankera i većih brodova. GPS prijemnici i elektronske pomorske karte standardno se koriste za bezbednu plovidbu u priobalnim područjima i efikasno uplovljavanje u luke i marine. Precizna GPS navigacija je takođe priznato sredstvo za demarkaciju nacionalnih teritorijalnih voda i područja ribolova.

Potrošačko tržište. Poznavanje trodimenzionalnog položaja je samo za sebe jedino od akademskog interesa. Informacija o poziciji dobija međutim sasvim drugi smisao kada se poveže sa nameravanim kursom, tačkama koje su od nekog značaja ili lokacijama potencijalnog rizika. U tom kontekstu, poznavanje položaja planinara u odnosu na kamp, vozila u odnosu na mapu saobraćajnica ili plovila u odnosu na podvodne stene može biti od životne važnosti, a kada se kombinuje sa komunikacionom tehnologijom, kao što je mobilna telefonija, u stanju je da redukuje potragu i spašavanje samo na operaciju spašavanja.

Imajući u vidu današnje GPS proizvode namenjene masovnom tržištu, jasno je da GPS pokazuje svoj puni potencijal jedino u integraciji sa drugim tehnologijama, a naročito sa bežičnim komunikacionim sistemima, Internetom i geografskim bazama podataka. Telematika, kao tehnologija pružanja informacija u pokretu, doživljava veliki zamah zahvaljujući tome što se GPS položaji sada određuju tako lako. Na tržištu su široko zastupljeni dvosmerni sistemi poruka bazirani na GPS tehnologiji, koji omogućuju korisniku komunikaciju i navigaciju u odnosu na bilo koga ko ima elektronsku poštu. Sa pristupom bazama podataka raznih službi, ovaj trend prerasta u takozvane lokaciono bazirane usluge (LBS), kao što je na primer sistem obaveštavanja korisnika o uslovima na putu, udaljenosti do najbližeg restorana ili benziske stanice, blizine neke turističke atrakcije i slično.

Svedoci smo eksplozivnog rasta tržišta GPS proizvoda svakodnevne namene, zahvaljujući tome što se ceo GPS prijemnik može smestiti na jedan čip, i ugraditi u razne potrošačke proizvode kao što su mobilni telefoni, PDA računari ili automobilski sigurnosni uređaji. Potencijalno ogromna primena GPS leži u takozvanoj proširenoj službi hitnih poziva (E911). Ona se sastoji u tome da mobilni telefoni budu osposobljeni da odrede i emituju svoju lokaciju u hitnim slučajevima. Izazov leži u mogućnosti GPS pozicioniranja u zatvorenom prostoru, koje je otežano zbog toga što prijemnik ne može uspešno dekodirati navigacionu poruku u situaciji kada je signal suviše slab. Pristup koji se trenutno testira predviđa da navigacionu poruku dešifruje server na baznoj stanici, a zatim je prosledi GPS prijemniku bežičnim signalom.

Planovi GPS modernizacije. Situacija se u svetu značajno promenila od sedamdesetih godina prošlog veka kada je GPS projektovan. Novi politički poredak i nacionalna ekonomija omogućili su tako veliki zamah GPS industriji, da je ona sada postala ključni faktor uticaja na američku politiku modifikacije GPS dizajna. Ukidanje SA mere zaštite 2000. godine označava prvu takvu važnu promenu.

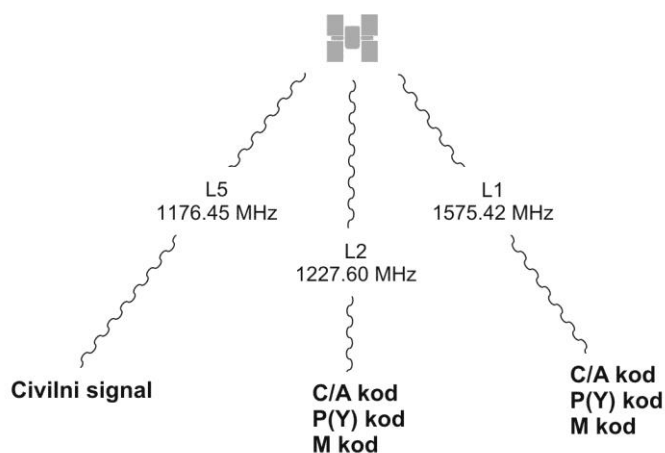
Sa rastućom zavisnošću od GPS, pojavila su se i druga otvorena pitanja. Svaki radio sistem osetljiv je na radiofrekventnu interferenciju. GPS je još osetljiviji zbog toga što je snaga signala izuzetno mala, a tehnika širokog spektra pruža samo delimičnu zaštitu. Prekid signala izazvan slučajnom ili namernom interferencijom ima očigledne implikacije na korišćenje GPS u vojnim operacijama i njegovu

primenu u vremenski kritičnim aplikacijama. Osim toga, elektromagnetni spektar postaje sve više predmet komercijalne eksploatacije. Kompanije za satelitsku komunikaciju umalo nisu 1997. godine dobile dozvolu od Međunarodne unije za telekomunikacije (ITU) da koriste deo opsega GPS frekvencije L1.

Ovi problemi naveli su DoD da već 1998. godine objavi ambiciozne planove GPS modernizacije, sa ciljem da sistem načini robusnijim i otpornijim na interferenciju, i da poveća tačnost pozicioniranja, navigacije i transfera vremena. Program modernizacije podrazumeva mere koje se odnose na civilne korisnike, vojne korisnike i kontrolni segment:

- *Civilni korisnici.* Povećanje tačnosti SPS pozicioniranja planirano je kroz uvođenje dva nova civilna signala. Pored toga što će noseći talas L2 biti modulisan C/A kodom, predviđen je i sasvim novi civilni signal, pod nazivom L5, na frekvenciji 1176.45 MHz.
- *Vojni korisnici.* Da bi se sprečilo zlonamerno korišćenje GPS, predviđeno je da vojni GPS signali budu spektralno razdvojeni od civilnih. U tu svrhu su definisana dva vojna M koda, koji će biti smešteni 6 – 9 MHz iznad i ispod L1 i L2 frekvencija. M kod će imati šifrovani oblik kao i postojeći P(Y) kod, i po potrebi će moći da se emituje sa snagom većom za 20 dB na regionalnoj osnovi.
- *Kontrolni segment.* Postojeći hardver i softver kontrolnog segmenta biće značajno unapređen. Planira se takođe i uključivanje NGA stanica za praćenje u proces određivanja satelitskih efemerida i parametara satelitskih časovnika.

Na slici 8.3 prikazana je struktura modernizovanih GPS signala, čija se puna



Slika 8.3. Struktura GPS signala oko 2015. godine.

Tabela 8.1. Evolucija kvaliteta standardnog GPS pozicioniranja.

Godina	Status signala	Tačnost položaja
1999	C/A kod na L1, aktivna SA mera zaštite	60 m
2000	C/A kod na L1, ukinuta SA mera zaštite	10 m
2010	C/A kod na L1 i L2	5 m
2015	C/A kod na L1 i L2, novi civilni signal na L5	1 m

implementacija očekuje do 2015. godine. Civilni signal na frekvenciji L1 ostaje nepromenjen, što će obezbediti da svi aktuelni GPS prijemnici mogu i dalje da funkcionišu. Modulacija L2 talasa C/A kodom značiće osetno povećanje tačnosti SPS pozicioniranja u realnom vremenu, jer će korisnici biti u stanju da pomoću dvofrekventnih merenja ocene i eliminišu uticaj jonosferske refrakcije. Treba međutim imati u vidu da je signal na L2 mnogo osetljiviji na interferenciju od signala na L1. Alokacija frekvencija je kompleksan proces u koji su uključeni mnogi interesi, tako da se može desiti da jedan frekvencijski opseg deli više korisnika. Opseg od 1215 MHz do 1350 MHz, u kojem je L2, primarno je dodeljen terestričkim radarima i radionavigacionim satelitskim sistemima, ali delove tog opsega koriste i sistemi za istraživanje kosmosa. Drugim rečima, nema garancije da L2 signal neće ometati neki drugi signal koji je formalno legalan.

Pravo poboljšanje kvaliteta pozicioniranja nastupiće onda kada bude aktiviran novi civilni signal na frekvenciji L5. Merenja na L1, L2 i L5 omogućiće formiranje dve linearne kombinacije sa mnogo većim talasnim dužinama od 86 cm, iz kojih se mogu oceniti simultano i pseudodužina i jonosferska refrakcija. Za razliku od dvofrekventnog slučaja, ove ocene imaće preciznost od nekoliko centimetara. Uz planirano poboljšanje kvaliteta satelitskih efemerida, to ustvari znači da će budući korisnici, opremljeni trofrekventnim GPS prijemnicima, moći da očekuju tačnost položaja bolju od 1 m.

Pregled evolucije kvaliteta standardnog civilnog GPS pozicioniranja do pune implementacije programa modernizacije dat je u tabeli 8.1. Planirano je da se poslednjih 12 satelita generacije Block IIR modifikuje kako bi se obezbedilo mesto za civilni signal na L2 i novi vojni signal na L1 i L2. Modifikovani sateliti nosiće oznaku Block IIR-M. Novi civilni signal na L5 već je predviđen kod satelita generacije Block IIF. Puna konstelacija od najmanje 18 satelita sa C/A kodom na L1 i L2 ostvarena je oko 2010. godine. Do 2015. godine biće dostignuta puna konstelacija i sa novim civilnim signalom na L5. Do tada će prema planu postojeće satelite postepeno zameniti sateliti generacije GPS III.

Poglavlje 9

Ostali satelitski sistemi i metode

9.1 Globalni navigacioni satelitski sistemi

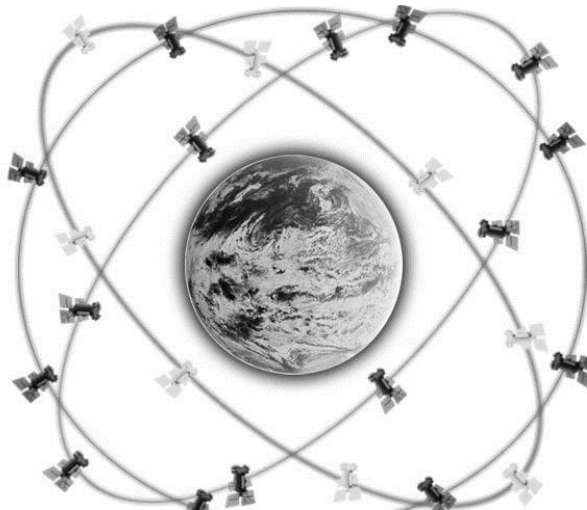
Iako je američki NAVSTAR GPS, kao prvi potpuno operativni sistem, zauzeo primat i postavio standarde u oblasti satelitskog pozicioniranja, navigacije i transfera vremena, on već odavno nije jedini predstavnik globalnih navigacionih satelitskih sistema. Više zemalja je u okviru svojih kosmičkih programa definisalo sopstvene projekte u ovoj oblasti. Neki, kao što je ruski GLONASS, dostigli su nivo potpune operativnosti, dok su drugi u različitim fazama razvoja. Za evropski sistem GALILEO već je više puta bezuspešno prognozirano završetak radova, iako je izvesno da će projekat biti realizovan. Kineski BeiDou i japanski QZSS u ovom momentu predstavljaju regionalne sisteme, ali sa jasnim potencijalom da u roku od jedne decenije prerastu u globalne sisteme.

U nastavku je dat sažet prikaz satelitskih sistema GLONASS, GALILEO, Beidou-2 i QZSS, koji zajedno sa sistemom NAVSTAR GPS, dele niz zajedničkih karakteristika. Pre svega, svi oni predstavljaju kompatibilne i interoperabilne sisteme koji su s namerom projektovani ili realizovani kao takvi. Kompatibilnost se odnosi na mogućnost da se koriste odvojeno ili zajedno, a da pri tome, nezavisno od krajnjih performansi, ne dođe do interferencije signala. Nasuprot tome, interoperabilnost znači mogućnost zajedničkog korišćenja u cilju povećanja performansi na korisničkom nivou. Pored toga, svi navedeni satelitski sistemi su jednosmerni, što znači da se zasnivaju na merenju dužina ili promena dužina emitovanjem signala sa Zemlje prema satelitima ili sa satelita prema površi Zemlje. Oni takođe pripadaju i klasi pasivnih sistema kod kojih korisnik nema mogućnosti da komunicira sa satelitima već samo prima satelitske signale.

Konačno, zahvaljujući navedenim osobinama, svi ovi satelitski sistemi mogu opsluživati neograničeni broj korisnika.

GLONASS. GLONASS je ruski globalni satelitski navigacioni sistem namenjen određivanju položaja i brzina u realnom vremenu za vojne i civilne korisnike. Projekat, osnovni parametri i početni razvoj veoma su slični sistemu GPS, jer su praktično oba sistema produkt hladnog rata i trke za dominacijom u kosmosu. Realizacija GLONASS projekta započeta je u vreme SSSR. Nakon raspada zemlje, Rusija je preuzela sve obaveze i nadležnosti.

Sateliti GLONASS sistema imaju visinu leta od 19 100 km, sa periodom obilaska Zemlje od $11^h 15^m$, i smešteni su u gotovo kružnim orbitama čija je inklinacija 64.8° . Konstelacija se sastoji od tri orbitalne ravni sa po osam satelita u svakoj od njih, i naročito je pogodna za korišćenje na velikim geografskim širinama gde prijem GPS signala može biti problematičan (slika 9.1). Potpuna operativnost sistema sa globalnom pokrivenošću, koja je prvo postignuta 1996. godine, a onda nakon raspada SSSR tek 2011. godine, podrazumeva ukupno 24 satelita, iako je za potrebe pozicioniranja i navigacije samo na teritoriji Rusije dovoljno i 18.



Slika 9.1. GLONASS satelitska konstelacija.

GLONASS sateliti emituju dva tipa signala: signale standardne preciznosti L1OF/L2OF i visokoprecizne signale L1SF/L2SF. Signali koriste modulaciju sličnu modulaciji kod GPS. Međutim, za razliku od GPS, svi GLONASS sateliti emituju isti pseudoslučajni kod ali na različitim frekvencijama, koje za opsege L1 i L2 iznose:

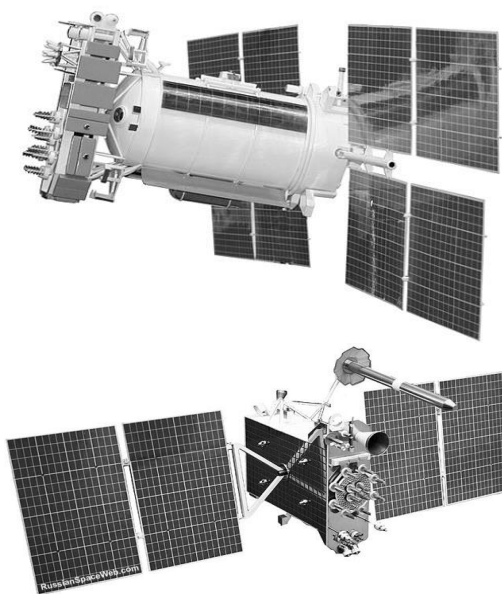
- L1: $1602 \text{ MHz} + n \cdot 0.5625 \text{ MHz}$,
- L2: $1246 \text{ MHz} + n \cdot 0.4375 \text{ MHz}$,

pri čemu ceo broj n uzima vrednosti $-7, -6, \dots, 0, \dots, 6$. Sistem, prema tome, koristi FDMA (Frequency Division Multiple Access) tehniku za razlikovanje satelita sa kojih stiže isti kod. Interesantno je da je svih 24 satelita obuhvaćeno sa 15 frekvencijskih kanala, što je moguće kada se identične frekvencije primene na antipodalne satelite, odnosno satelite sa suprotnih strana Zemlje, jer oni neće nikad biti simultano vidljivi korisniku na površi Zemlje. Od 2008. godine razmatra se mogućnost uvođenja signala CDMA tehnikom (Code Division Multiple Access) koju koristi GPS.

Navigaciona GLONASS poruka modulirana je sa frekvencijom od 50 bitova u sekundi, a kako se sastoji od 7500 bitova potrebno je 150 s za njeno kompletno emitovanje. Po strukturi je slična GPS navigacionoj poruci. Satelitske efemeride se ažuriraju iz kontrolnog segmenta svakih 30 minuta, i za razliku od GPS ne sadrže orbitalne elemente već komponente položaja i brzine po koordinatnim osama i parametre lunisolarnog poremećajnog ubrzanja. Almanah, koji se sastoji od modifikovanih Keplerovih parametara, ažurira se jednom dnevno.

Za više od tri decenije razvoja, dizajn GLONASS satelita doživeo je brojna poboljšanja. Do sada lansirani sateliti mogu se podeliti u tri kategorije (slika 9.2): originalni GLONASS sateliti (od 1982. godine), sateliti GLONASS-M (od 2003. godine) i sateliti GLONASS-K (od 2011. godine).

- Prva generacija satelita imala je masu od 1250 kg i životni vek od tri godine. Tokom vremena nadograđivana je na verzije Block IIa, IIb i IIv, od kojih je svaka donosila evolucionu poboljšanja u pogledu frekvencijske stabilnosti i vremena korišćenja.
- Druga generacija satelita, poznata kao GLONASS-M ima masu od 1480 kg i životni vek od sedam godina. Lokalni izvor vremena obezbeđuju im cezijumski oscilatori visoke stabilnosti. Sateliti ove generacije opremljeni su prizmama za lasersko merenje rastojanja, pomoću kojih im se određuju precizne orbite. Do kraja 2013. godine lansiran je ukupno 41 satelit druge generacije.
- GLONASS-K sateliti treće generacije predstavljaju značajno poboljšanje u odnosu na prethodne generacije. Zahvaljujući dvostruko manjoj masi od 750 kg mogu se lansirati u parovima. Životni vek projektovan im je na deset godina. Prvi GLONASS-K satelit lansiran je 2011. godine. Sateliti ove generacije emitovaće nove navigacione signale sa modulacijom koja je slična GPS, GALILEO i COMPASS rešenjima. Očekuje se da napredna satelitska tehnologija omogući dvostruko veću tačnost pozicioniranja.



Slika 9.2. Izgled GLONASS satelita: GLONASS-M (gore), GLONASS-K (dole).

Krajem 2013. godine u orbitama se nalazilo ukupno 28 GLONASS satelita, od čega je 24 operativno, 1 je u test fazi, a 3 su rezervna.

Kontrolni segment GLONASS sistema, koji se sastoji od kontrolnog centra, centra za sinhronizaciju, stanica za praćenje i telemetrijskih stanica, smešten je u celosti na teritoriji bivšeg SSSR, sa izuzetkom jedne stanice u Brazilu. GLONASS koristi referentni sistem pod nazivom PZ-90, koji je po definiciji geocentričan. Četiri parametra koji potpuno određuju elipsoid pridružen PZ-90 sistemu data su u tabeli 9.1.

Sistemska GLONASS vreme blisko je UTC vremenskoj skali, osim konstantne razlike od 3^h između Moskve i Griniča. Zbog veze sa UTC vremenom sadrži prestupne sekunde. Za održavanje GLONASS vremena zadužen je centar za sinhronizaciju, koji u tu svrhu koristi skup visokostabilnih vodoničnih mazera. Razlika τ_c između GLONASS vremena t_{GLO} i UTC vremena t_{UTC} manja je od 1 ms, i emituje se u okviru navigacione poruke. Prema tome, veza između dve vremenske skale glasi:

$$t_{UTC} = t_{GLO} + \tau_c - 3^h. \quad (9.1)$$

Na osnovu merenja prema četiri satelita prve generacije, procenjeno je da je tačnost GLONASS pozicioniranja 5 – 10 m u horizontalnom smislu i oko 15 m u vertikalnom, tačnost određivanja brzine 10 cm/s, a tačnost sinhronizacije vremena do 200 ns. Međutim, generacija satelita GLONASS-M dramatično je popravila ovu situaciju. Prema istraživanjima iz 2010. godine, preciznost GLONASS navigacije po geografskoj širini i dužini bila je između 4.5 m i 7.4 m za prosečan broj od 7 – 8 satelita. Prema tome, autonomno GLONASS pozicioniranje pomoću dostupnog civilnog signala samo je nešto malo slabije od GPS, ali ima prednost na velikim geografskim širinama zahvaljujući satelitskoj konstelaciji. Modernim prijemnicima koji su u stanju da prate kombinovane GLONASS i GPS signale sa preko 50 raspoloživih GLONASS/GPS satelita može se postići navigaciona preciznost od 2.4 m do 4.6 m za prosečan broj od 14 – 19.

Počev od maja 2009. godine, preduzimaju se mere za proširenje satelitske GLONASS konstelacije i kontrolnog segmenta sa ciljem povećanja navigacione tačnosti na nivo od 2.8 m do 2011. godine. Sa novom generacijom GLONASS-K

Tabela 9.1. Parametri referentnog PZ-90 elipsoida.

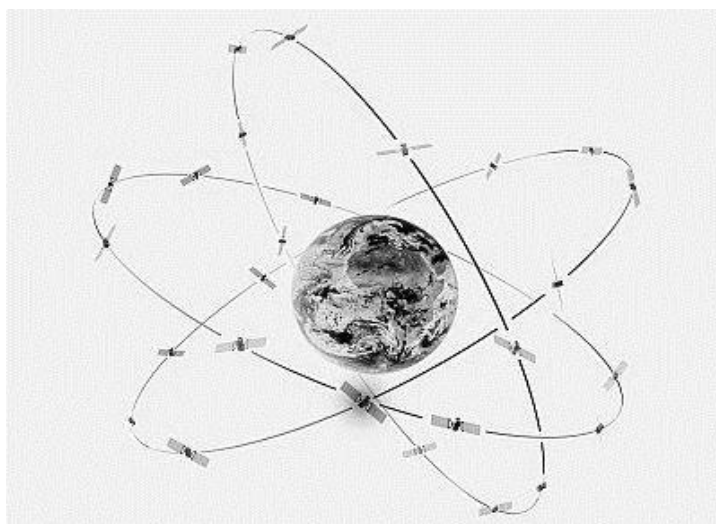
Parametar	Vrednost
Velika poluosa elipsoida	6 378 136 m
Spljoštenost elipsoida	1/298.257 839 303
Uglovna brzina rotacije Zemlje	$7\,292\,115 \cdot 10^{-11}$ rad/s
Geocentrična gravitaciona konstanta	$3\,986\,004.4 \cdot 10^8$ m ³ /s ²

satelita, 16 novih stanica za praćenje koje su već u izgradnji u Rusiji i bazama na Antarktiku, i stanicama planiranim na južnoj hemisferi, očekuje se da će do 2020. godine navigaciona GLONASS tačnost dostići nivo bolji od 0.6 m.

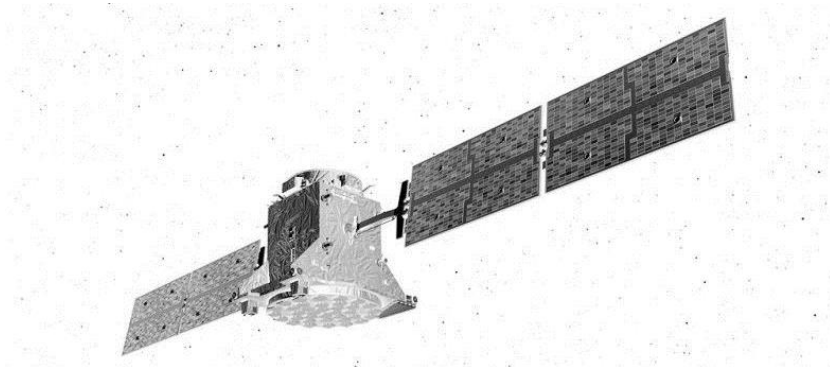
GALILEO. Evropa je rano prepoznala strateški, ekonomski, socijalni i tehnološki značaj satelitske navigacije, jednako kao i neophodnost značajnijih napora na polju satelitskog pozicioniranja i navigacije da bi se uspostavile transevropske veze u oblasti transportne, telekomunikacione i energetske infrastrukture. EU je u tu svrhu ostvarivala uglavnom blisku saradnju sa SAD u vidu aktivne uloge u razvoju sledeće generacije sistema GPS. Pregovori koji su vođeni otkrili su interes obe strane za saradnjom, ali su takođe izazvali i rezervisanost SAD u pogledu učešća stranih zemalja u definiciji i kontroli jednog takvog resursa kao što je GPS. S druge strane, EU je zahtevala maksimalni nivo kontrole koji bi joj garantovao suverenitet, autonomiju i konkurentnost. U okviru EU razmatrana je i mogućnost bliže saradnje sa Rusijom, ali je konačno 1999. godine prevladala odluka da se razvije sopstveni satelitski navigacioni sistem pod nazivom GALILEO.

GALILEO je projektovan tako da se pored korisničkog segmenta sastoji od tri komponente: globalne (kosmički i kontrolni segment), regionalne i lokalne.

Kosmički segment predviđa satelitsku konstelaciju od 27 operativnih i 3 rezervna satelita (slika 9.3), smeštenih u tri približno kružne orbite na srednjoj visini leta (MEO). Inklinacija orbitalnih ravni iznosi $i = 56^\circ$, a ekscentricitet orbita $e = 0.002$. Nominalna vrednost velike poluosa je $a = 29\,601.297$ km, što ima za rezultat period obilaska oko Zemlje u trajanju od $14^h\ 4^m\ 45^s$. Ovakva satelitska konstelacija garantuje da će bilo gde na površi Zemlje, i u bilo kom trenutku



Slika 9.3. GALILEO satelitska konstelacija.



Slika 9.4. Izgled prvog GALILEO satelita GIOVE-A.

vremena, iznad horizonta biti najmanje 6 satelita, sa maksimalnim vrednostima PDOP i HDOP faktora manjim od 3.3 i 1.6 respektivno. Prvi GALILEO eksperimentalni satelit pod nazivom GIOVE-A lansiran je decembra 2005. godine (slika 9.4). Trenutno su u orbitama četiri satelita.

Kontrolni segment sastoji se od dva kontrolna centra (u Nemačkoj i Italiji), 5 telemetrijskih stanica za praćenje, 9 stanica za emitovanje sa Zemlje i oko 40 takozvanih senzorskih stanica. Zadaci GALILEO kontrolnog segmenta su u mnogim aspektima slični kao kod NAVSTAR GPS sistema.

Regionalna komponenta podrazumeva niz stanica za praćenje integriteta i generisanje informacija o integritetu sistema koje se šalju sa Zemlje u satelitske memorije ali su regionalno ograničene. Lokalna GALILEO komponenta su sistemi za podršku lokalnih aplikacija u cilju poboljšanja performansi, kao što su različiti tipovi aerodromske i lučne navigacije, ili specijalizovane aplikacije na polju monitoringa i iz oblasti geonauka.

Međunarodna telekomunikaciona unija dodelila je pet frekvencijskih opsega za GALILEO. Njihove oznake i vrednosti dati su u tabeli 9.2. Frekvencijski opsezi E1 i E5a namerno su izabrani tako da se zbog interoperabilnosti podudaraju sa GPS

Tabela 9.2. Frekvencije GALILEO nosećih talasa.

Link	Frekvencija	Talasna dužina
E1	1575.420 MHz	19.0 cm
E6	1278.750 MHz	23.4 cm
E5	1191.795 MHz	25.2 cm
E5a	1176.450 MHz	25.5 cm
E5b	1207.140 MHz	24.8 cm

frekvencijskim opsezima. Sve frekvencije predstavljaju celobrojni umnožak osnovne frekvencije satelitskog atomskog oscilatora $f_0 = 10.23$ MHz.

Planirano je da GALILEO pruža sledeće usluge:

- otvoreni, javno dostupni servis (OS),
- komercijalni servis (CS),
- sigurnosni servis (SoL),
- servis javne uprave (PRS),
- servis pretraživanja i spašavanja (SAR).

Navedeni servisi međusobno se razlikuju po komercijalnosti, dostupnosti dodatnih podataka u navigacionoj poruci, prisustvu ili odsustvu informacija o integritetu sistema, i mogućnostima transfera poruka korisnicima satelitskim putem. PRS signal će za razliku od ostalih biti dostupan samo evropskim javnim službama i snagama reda zaduženim za civilnu zaštitu i nacionalnu sigurnost.

Podrška svim servisima koje GALILEO nudi zahteva specifikaciju čitavog niza različitih kodova za merenje dužina i navigacionih poruka. Na frekvencijskim opsezima E1, E6, E5a i E5b definisano je ukupno 10 navigacionih signala. Neki signali sadrže samo kodove (pilot kanali), a neki i kodove i navigacione poruke (kanali podataka). Razlikuju se tri tipa kodova za merenje dužina: (1) javno dostupni kodovi koji nisu šifrovani, (2) kodovi zaštićeni komercijalnom šifrom, i (3) kodovi zaštićeni državnom šifrom. Pošto svi sateliti koriste iste frekvencije za emitovanje signala, njihovo razlikovanje vrši se CDMA tehnikom.

GALILEO navigacione poruke sadrže ukupno pet tipova podataka: (1) navigacione podatke, odnosno podatke za pozicioniranje, (2) podatke o integritetu, (3) pomoćne, odnosno dodatne podatke, (4) podatke od značaja za javnu upravu, i (5) podatke za servis pretraživanja i spašavanja. Ovih pet tipova podataka definiše četiri vrste navigacionih poruka koje su navedene u tabeli 9.3.

Referentni sistem koji će GALILEO koristiti definiše se kao geocentrični, a njegova realizacija, pod nazivom GALILEO terestrički referentni okvir (GTRF) biće bliska međunarodnom terestričkom referentnom okviru (ITRF) na nivou boljem od 3 cm. Sistemsko GALILEO vreme (GST) definisano je kao atomska vremenska skala koja se od međunarodnog atomskog vremena (TAI) razlikuje za

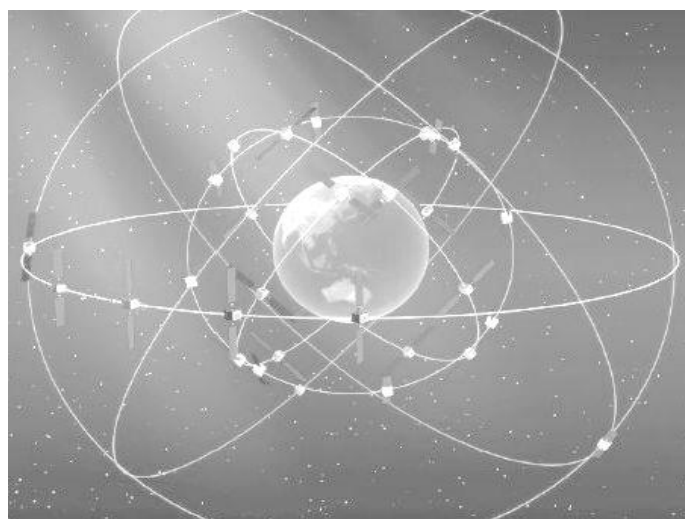
Tabela 9.3. Vrste GALILEO navigacionih poruka.

Oznaka	Značenje
F/NAV	Slobodno dostupna navigaciona poruka.
I/NAV	Navigaciona poruka integriteta.
C/NAV	Komercijalna navigaciona poruka.
G/NAV	Navigaciona poruka javne uprave.

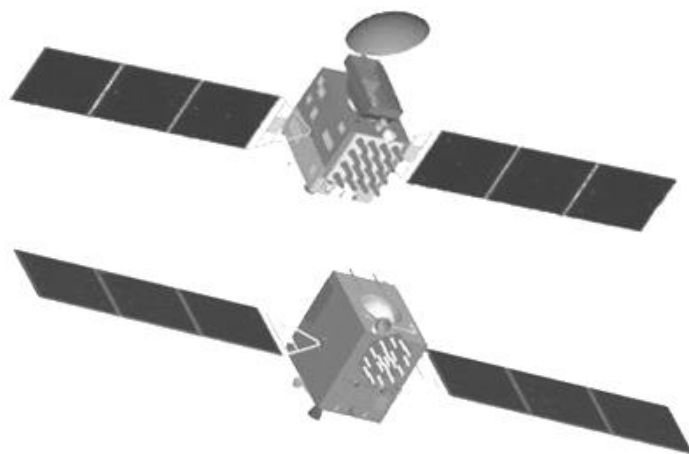
ceo broj sekundi. U odnosu na UTC vreme, GST će se razlikovati za ukupan broj prestupnih sekundi. Po specifikacijama, GST će odstupati od svoje nominalne TAI vremenske skale manje od 50 ns, i to odstupanje biće dato u navigacionoj poruci, kao i odstupanje od GPS sistemskog vremena. Pretpostavlja se da će razlike u odnosu na vreme drugih satelitskih navigacionih sistema takođe biti sastavni deo navigacione poruke.

Iako zbog različitih okolnosti realizacija GALILEO projekta kasni, već su započete diskusije u pogledu tehnološke evolucije sistema. One se trenutno odnose na razmatranja mogućnosti upotrebe C frekvencijskog opsega (5.01 – 5.03 GHz) za emitovanje signala za merenje dužina, kao i mogućnosti uspostavljanja međusatelitskih linkova za potrebe autonomnog funkcionisanja i brže distribucije informacija.

BeiDou. BeiDou je satelitski navigacioni sistem u okviru kosmičkog programa Kine koji traje još od kineskog lansiranja prvog veštačkog satelita sedamdesetih godina prošlog veka. Sistem BeiDou-1 uspostavljen je 1994. godine kao dvosmerni sistem. Sastoji se od ukupno tri satelita lansiranih 2000. i 2003. godine u geostacionarne orbite. Sateliti su opremljeni transponderima koji operišu u L i S frekvencijskom opsegu. Planirano je da BeiDou-1 pruža pet tipova servisa: pozicioniranje pokretnih korisnika, emitovanje korekcija i podataka o integritetu za upotrebu sa GPS i GLONASS sistemima, dvosmernu razmenu tekstualnih poruka, diseminaciju kineskog atomskog vremena za potrebe sinhronizacije i prenos GPS određenih položaja u centre koji upravljaju flotama letelica. U međuvremenu je Kina više puta revidovala i unapređivala BeiDou-1 da je konačno obelodanila planove za razvoj potpuno novog sistema BeiDou-2.



Slika 9.5. Projektovana konstelacija BeiDou-2 satelita.



Slika 9.6. Izgled BeiDou-2 satelita: GEO (gore), MEO (dole).

BeiDou-2, poznat i kao COMPASS, predstavlja kineski globalni satelitski navigacioni sistem koji zamenjuje prethodni BeiDou-1. Sistem će predstavljati konstelaciju od 35 satelita, od kojih je 5 sa geostacionarnim orbitama (GEO) zbog kompatibilnosti sa BeiDou-1, 27 satelita sa srednjim visinama leta (MEO) i 3 satelita u nagnutim geosinhronim orbitama. Kompletna satelitska konstelacija prikazana je na slici 9.5, a projektovani izgled COMPASS satelita verzije GEO i MEO na slici 9.6.

BeiDou-2 predviđa dva nivoa usluga: slobodno dostupnu civilnu službu i licenciranu službu dostupnu Vladi i vojsci. Civilna služba omogućiće tačnost pozicioniranja, vremena i brzine od 10 m, 10 ns i 0.2 m/s. Državni, odnosno vojni servis imaće tačnost pozicioniranja od 10 cm i moći će da se koristi kako za komunikaciju, tako i za informacije o statusu korisnika.

Signali sistema zasnivaju se na pseudoslučajnim kodovima kao i kod GPS. Frekvencije koje BeiDou-2 koristi (opsezi E1, E2, E5B i E6) preklapaju se sa frekvencijskim opsezima predviđenim za GALILEO. Prvi COMPASS-M1 satelit lansiran je 2007. godine za potrebe testiranja signala i konkurisanje za frekvencije. Orbita satelita COMPASS-M1 je gotovo kružna, ima inklinaciju od 55.5° a visina leta iznosi 21 150 km. Satelit emituje signale u opsezima E2, E5B i E6, i u okviru svake frekvencije mogu se identifikovati dva koherentna podsignala, I i Q, koji su u kvadraturi (faze im se razlikuju za 90°). Pretpostavlja se da prvi podržava civilni, a drugi zaštićeni servis. Ustvari, precizni detalji strukture navigacionih signala nisu u potpunosti poznati jer kineske vlasti nisu obelodanile službene informacije. Međutim, lansiranje prvog COMPASS satelita omogućilo je ne samo da istraživači upoznaju opšte karakteristike signala, već i da se napravi COMPASS prijemnik.

Decembra 2011. godine, sistem je pušten u probni rad, i u roku od nekoliko dana započeo je sa emitovanjem podataka za potrebe navigacije, pozicioniranja i sinhronizacije vremena na teritoriji Kine i okolnih zemalja. Za vreme ovog probnog perioda COMPASS je ostvarivao tačnost pozicioniranja od oko 25 m, ali se preciznost povećava kako se lansiraju novi sateliti. Od decembra 2012. godine, BeiDou-2 sistem nudi usluge za Azijsko-Pacifički region, i u ovom momentu je operativan za područje između 55°E i 180°E po geografskoj dužini, i od 55°S do 55°N po geografskoj širini. Sistem je za teritoriju Kine praktično potpuno operativan od kraja 2011. godine. Predviđa se da će BeiDou-2 biti završen do 2020. godine i tako postati globalni satelitski navigacioni sistem. Do decembra 2012. godine lansirano je ukupno 16 BeiDou-2 satelita, od kojih je 14 operativno.

QZSS (Quasi-Zenith Satellite System). Satelitski sistem QZSS razvija Japan kao satelitsku navigacionu službu za područja Istočne Azije i Okeanije. Sistem je dizajniran tako da omogućava pozicioniranje i u satelitski nepovoljnim uslovima kao što su urbane sredine i planinska područja. Iako je prvenstvena namena sistema da dopunjava i proširuje mogućnosti sistema NAVSTAR GPS, QZSS je projektovan da može operisati i u autonomnom režimu rada sa potencijalom da u budućnosti bude doveden na nivo regionalnog sistema potpune operativnosti.

QZSS predstavlja združenu inicijativu države i privatnog sektora, nastale iz potrebe za autonomnim satelitskim navigacionim sistemom za slučaj nepredviđenih anomalija ili kvarova postojećih globalnih sistema. Istraživanje takvog jednog koncepta započelo je još 2003. godine, i već 2010. godine lansiran je prvi satelit (slika 9.7). U 2013. godini naručena je izrada još dva. Nakon faze verifikacije, predviđeno je da započne komercijalizacija sistema.

Po projektu, QZSS koristi koordinatni sistem poznat kao Japanski geodetski sistem (JGS). On je po realizaciji veoma blizak međunarodnom referentnom okviru



Slika 9.7. Izgled QZSS satelita QZS-1.

Tabela 9.4. Osnovni orbitalni parametri QZSS satelita.

Parametar	Vrednost
Velika poluosa orbite	42 164 km
Maksimalni ekscentricitet orbite	0.099
Inklinacija orbite	45 ⁰
Rektascenzija uzlaznog čvora	88.09 ⁰ , 208.09 ⁰ , 328.09 ⁰
Argument perigeuma	270 ⁰
Longituda uzlaznog čvora	146.3 ⁰

ITRF (na nivou od 0.02 m), a u geometrijskom smislu koristi elipsoid GRS80 sa velikom poluosom $a = 6\,378\,137$ m, i spljoštenošću $f = 1/298.257\,222\,101$. QZSS vremenska skala poravnata je sa atomskom skalom vremena TAI, ali se kao i kod GPS razlikuje od nje za konstantnih 19 s. Razlika od sistemskog GPS i GALILEO vremena emituje se u navigacionoj poruci.

Predviđeno je da QZSS pruža tri vrste usluga. Prva je dopuna GPS, što se postiže emitovanjem navigacionih signala koji su GPS kompatibilni. Druga se sastoji u emitovanju dodatnih informacija pomoću kojih će GNSS signali moći da budu korigovani zbog atmosferskih efekata, orbitalnih grešaka i grešaka časovnika. Trećom uslugom omogućiće se komunikacija u satelitski nepovoljnim uslovima. Ovaj komunikacioni kanal iskoristiće se i za prenos pomoćnih podataka kojima se signal lakše prepoznaje i prati.

Kosmički QZSS segment obuhvata kvazizenitno pozicionirane satelite (QZS) sa velikom visinom leta u nagnutim geosinhronim orbitama (HEO). Osnovni orbitalni elementi dati su u tabeli 9.4. Tri satelita u tri orbitalne ravni garantuju dostupnost signala, čak i u veoma nepovoljnom okruženju. Kontrolni segment sastoji se od stanica za praćenje na kojima se vrše opažanja QZS signala ali i signala drugih GNSS satelita. Podaci se prosleđuju u glavnu stanicu gde se vrši određivanje orbita i parametara sinhronizacije satelitskih časovnika, da bi se nakon toga rezultujuća navigaciona poruka slala i smeštala u memorije satelita. Sateliti sistema QZSS emituju ukupno osam signala na frekvencijama koje koristi i GPS (L1, L2 i L5). Šest signala se koristi za pozicioniranje, dok su dva predviđena za emitovanje pomoćnih podataka. Za generisanje signala koriste se rubidijumski atomski oscilatori i koncept pseudoslučajnih kodova. Struktura navigacione poruke u osnovi je slična strukturi GPS navigacione poruke. Efemeride i almanah satelita ažuriraju se na sat vremena, parametri časovnika svakih 750 s, a podaci o razlikama u odnosu na druge sisteme svakih 300 s. Podaci o integritetu ažuriraju se sa još većom frekvencijom da bi se garantovao brzi odziv (najviše 24 s) u slučaju alarma. Životni vek QZSS satelita projektovan je na 10 godina.

9.2 Lasersko merenje rastojanja (SLR)

Određivanje rastojanja između stanice na Zemljinoj površi i satelita laserskim uređajima sastoji se u merenju vremena potrebnom kratkom laserskom impulsu da pređe dvostruki put, od uređaja do satelita i nazad.

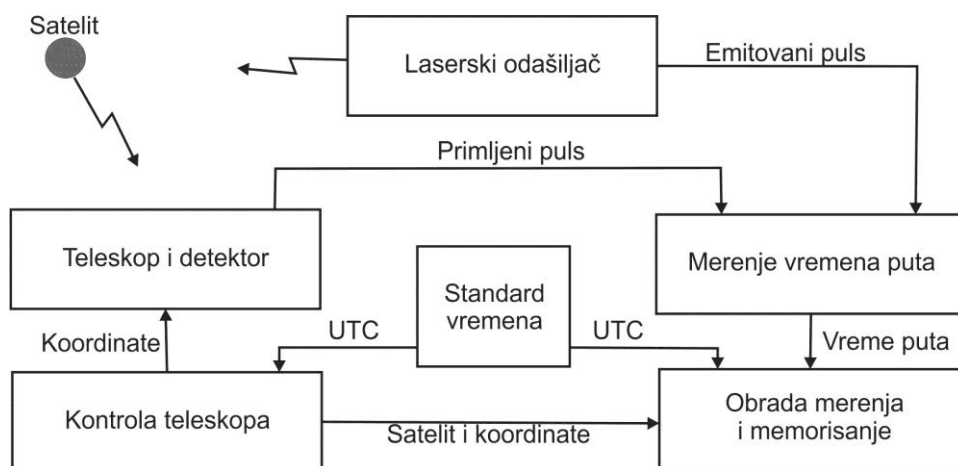
Funkcionalni dijagram uređaja za lasersko merenje rastojanja do satelita prikazan je na slici 9.8. U trenutku kada sistem generiše laserski impuls jedan njegov deo uključuje specijalni elektronski brojač vremenskih intervala. Impuls putuje do satelita, odbija se od prizmi kojima je pokrivena površina satelita i vraća se u sistem gde se pojačava i analizira, i tom prilikom se zaustavlja elektronsko brojanje. Ako izmereno proteklo vreme iznosi Δt , dužina od stanice do satelita dobija se po poznatom izrazu:

$$r = c_0 \frac{\Delta t}{2}. \quad (9.2)$$

Prema tome, najvažnije delove mernog sistema čine:

- generator i odašiljač laserskih impulsa,
- detektor i analizator povratnih impulsa,
- elektronski brojač za merenje proteklog vremena.

Tačnost merenja zavisi pre svega od mogućnosti generisanja i registrovanja što kraćeg laserskog impulsa. Ako je, na primer, dužina trajanja impulsa 1 ns, odgovarajuća greška izmerene dužine biće oko 15 cm. S obzirom na tehnologiju koja omogućuje skraćivanje trajanja impulsa, laserski sistemi prolazili su kroz tri



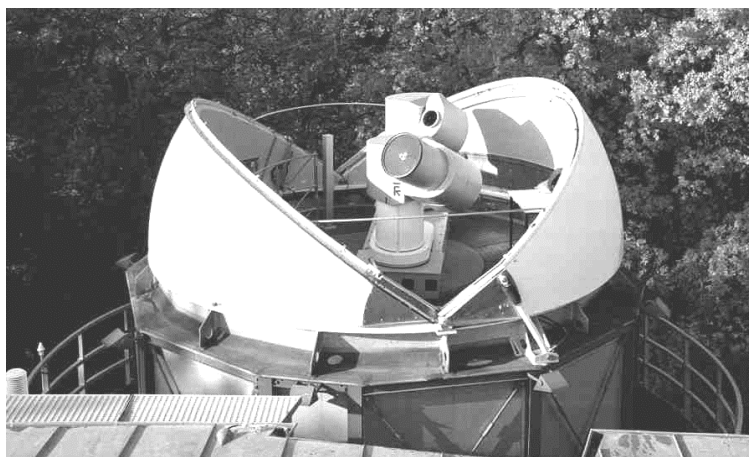
Slika 9.8. Funkcionalni dijagram uređaja za lasersko merenje rastojanja.

razvojne faze:

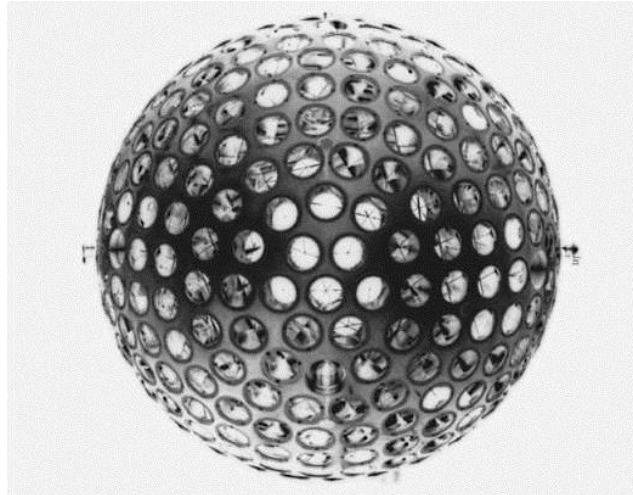
- laserski sistemi I generacije, opremljeni uglavnom rubinskim laserom, sa impulsima dužine 10 – 40 ns i tačnošću 1 – 6 m,
- laserski sistemi II generacije, dužine impulsa 2 – 5 ns i odgovarajućom tačnošću 1 – 6 m, sa poboljšanim sistemom za analizu impulsa,
- laserski sistemi III generacije, sa dužinom impulsa 0.1 – 0.2 ns i tačnošću 1 – 3 cm, opremljeni Nd YAG laserom, i sa mogućnošću da detektuju pojedinačne fotone.

Dakle, za tri decenije razvoja, laserska tehnologija povećala je tačnost određivanja dužina za tri reda veličine. Danas su u naučnoj primeni prisutni isključivo uređaji III generacije, s tim što se uveliko istražuju mogućnosti postizanja milimetarske tačnosti.

Moderni laserski uređaji predstavljaju veoma komplikovane sisteme sa visokom tehnologijom. Da bi se impuls usmerio prema satelitu koji se kreće oko Zemlje, neophodni su posebni motori kojima se sistem može rotirati u azimutalnom i visinskom smislu, čime upravlja poseban procesni računar i specijalizovani softver. Da bi sistem mogao da detektuje pojedinačne povratne fotone, tačnost usmerenja teleskopa prema satelitu mora biti veća od 1". Prijem impulsa vrši se kako optički pomoću teleskopa sa velikim otvorom objektiva, tako i elektronski uz pomoć fotomultiplikatora. Da bi se omogućilo tačno brojanje vremenskih intervala, kao frekvencijska normala koristi se cezijumski ili rubidijumski atomski standard, a često i vodonični mazer. Sve to zahteva posebne uslove i velike izvore energije, zbog čega su laserski uređaji uglavnom stacionarni (slika 9.9). U okviru projekata



Slika 9.9. Primer laserske stanice u Potsdamu.



Slika 9.10. Izgled satelita LAGEOS-1.

kao što je MEDLAS korišćeni su i mobilni sistemi, ali njihova upotreba iziskuje ogromne troškove i znatan broj specijalno kvalifikovanih stručnjaka.

Kosmički segment sistema čine sateliti. Za lasersko merenje dužina može se u principu koristiti bilo koji satelit ako je opremljen prizmama od kojih se impuls može odbiti, kao što su to danas GPS i GLONASS sateliti. Međutim, prvi satelit sa laserskim reflektorima lansiran je još 1964. godine od strane SAD (BEACON-Explorer-B). Satelit je leteo na visini od oko 1000 km, u orbitalnoj ravni sa nagibom $i = 80^{\circ}$. Već 1965. godine izvršena su prva merenja sa tačnošću od nekoliko metara. Savršeniji sateliti sa prizmama koje vraćaju impuls u istom pravcu iz kojeg je došao (takozvani retroreflektori), lansirani su 1975. godine (francuski STARLETTE), i 1976. godine (američki LAGEOS). Ovi sateliti su ustvari metalne sfere velike mase i malih dimenzija, sa površinom prekrivenom prizmama (slika 9.10). Neke od njihovih važnijih karakteristika prikazane su u tabeli 9.5.

Pošto su sateliti za lasersko merenje rastojanja pasivni sistemi koji osim prizmi

Tabela 9.5. Karakteristike satelita STARLETTE i LAGEOS.

Karakteristika	STARLETTE	LAGEOS
Visina leta	950 km	5900 km
Inklinacija orbite	49.8°	109.8°
Poluprečnik satelita	12 cm	30 cm
Masa satelita	47.3 kg	407 kg
Broj prizmi	60	422

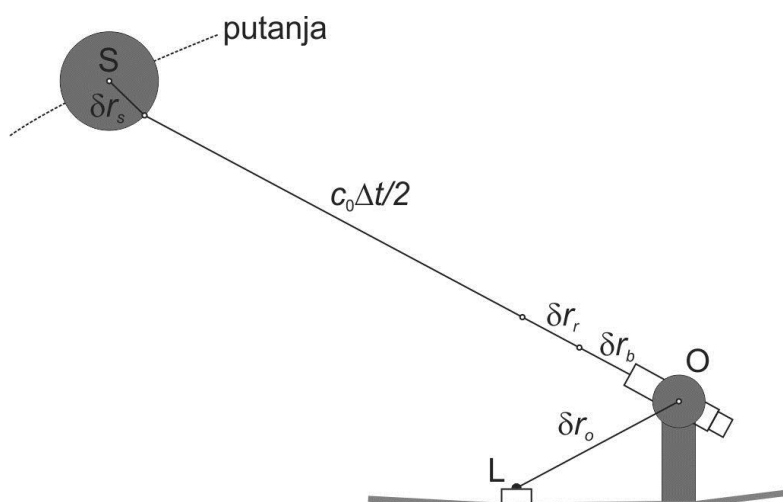
nemaju mnogo specijalizovanih modula, njihov životni vek je veoma dugačak. Procenjuje se, na primer, da je dužina života satelita LAGEOS nekoliko miliona godina, pa je stoga u njegovu unutrašnjost ugrađena ploča sa reljefom koji prikazuje današnje kontinente i pravce njihovog pomeranja.

Uprošćena jednačina (9.2) kojom se definiše dužina preko merenog vremena puta mora se proširiti da bi se adekvatno opisala situacija pri realnim merenjima. Ono što se u osnovi meri je dužina između referentne tačke u laserskom sistemu (prekret durbina) i optičkog centra prizme na satelitu. Pošto se prekret durbina ne poklapa sa oznakom tačke, niti prizma predstavlja geometrijski centar tela satelita, proširena jednačina laserskih merenja glasi:

$$r = c_0 \frac{\Delta t}{2} + \delta r_o + \delta r_s + \delta r_b + \delta r_r + \varepsilon, \quad (9.3)$$

gde δr_o označava korekciju za ekscentricitet na stanici, δr_s označava korekciju za ekscentricitet u satelitu, δr_b je kašnjenje impulsa pri kretanju kroz laserski sistem, δr_r korekcija za atmosfersku refrakciju, a ε sadrži slučajnu grešku merenja i rezidualne nemodelirane efekte (slika 9.11).

Dominantni član u proširenoj jednačini, $c_0\Delta t/2$, odnosi se na merenje vremena puta. U tom smislu moraju se uzeti u obzir dva aspekta. Prvo, izmerena dužina mora se povezati sa UTC vremenskom skalom zbog kretanja satelita. Tačnost registracije trenutka merenja treba da iznosi oko 100 ns, što odgovara promeni položaja satelita od 1 mm, i to ne predstavlja tehnološki problem. Drugo, greška merenja vremena puta impulsa ograničava ukupnu tačnost merenja dužina i poželjno je da bude na nivou od nekoliko pikosekundi (ps), što je mnogo ozbiljniji



Slika 9.11. Geometrijske veze kod laserskih merenja.

zahtev za tehnologiju koja prepoznaje trenutak emitovanja i prijema odbijenog signala.

Korekcije za ekscentričnost na terestričkoj stanici δr_o i u satelitu δr_s mogu se u svakom slučaju odrediti sa tačnošću od nekoliko milimetara. Na satelitskoj strani to je posebno lako kada su sateliti pravilnog sfernog oblika.

Kašnjenje signala pri prolasku kroz laserski sistem pojavljuje se zbog dodatnog puta koji signal prelazi zato što se geometrijski centar sistema O ne podudara sa elektronskom tačkom iz koje se signal emituje. Korekcija zbog kašnjenja δr_b tretira se kao neka vrsta adicione konstante, i kod savremenih uređaja određuje se kalibracijom unutar samog sistema bez ikakve spoljašnje reference.

Lasersko zračenje menja svoje karakteristike pri kretanju kroz atmosferu. Za pouzdano određivanje atmosferskog kašnjenja bilo bi neophodno poznavati atmosferske parametre u svakoj tački putanje signala. Pošto to nije moguće, korekcija za atmosfersku refrakciju δr_r obično se računa uz pomoć standardnog modela atmosfere i izmerenih vrednosti atmosferskih parametara na lokaciji laserske stanice. Model popravke koji preporučuje Međunarodna služba za Zemljinu rotaciju (IERS) glasi:

$$\delta r_r = \frac{f(\lambda)}{f(\varphi, H)} \frac{A + B}{\sin E + \frac{B / (A + B)}{\sin E + 0.01}}, \quad (9.4)$$

pri čemu je E vertikalni ugao pravca ka satelitu. Veličine A i B računaju se na osnovu vrednosti atmosferskog pritiska P_0 (u mbar), temperature T_0 (u $^{\circ}\text{K}$) i vlažnosti e_0 (u mbar), po izrazima:

$$A = 0.002357P_0 + 0.000141e_0, \quad (9.5)$$

$$B = 1.084 \cdot 10^{-8} P_0 T_0 K + 4.734 \cdot 10^{-8} \frac{P_0^2}{T_0} \frac{2}{(3 - 1/K)}, \quad (9.6)$$

$$K = 1.163 - 0.00968 \cos 2\varphi - 0.00104T_0 + 0.00001435P_0. \quad (9.7)$$

Laserske funkcije talasne dužine λ (u μm) i lokacije stanice (geografska širina φ i visina H u km) imaju oblik:

$$f(\lambda) = 0.965 + \frac{0.0164}{\lambda^2} + \frac{0.000228}{\lambda^4}, \quad (9.8)$$

$$f(\varphi, H) = 1 - 0.0026 \cos 2\varphi - 0.00031H. \quad (9.9)$$

Kod laserskih sistema III generacije koji su danas u isključivoj upotrebi, frekvencija generisanja impulsa obično iznosi 10 Hz, što znači da se pri jednom

satelitskom prolazu izmeri 2000 – 3000 dužina. Matematički posmatrano, veliki procenat ovih dužina ne sadrži nikakvu novu informaciju zbog visoke međusobne korelacije uzrokovane sličnim meteorološkim uslovima. Postupak kojim se ovaj nedostatak prevazilazi sastoji se u kondenzovanju dužina, čime im se broj smanjuje na oko 30 po satelitskom prolazu. Redukcija broja merenja operativno se izvodi računanjem takozvanih normalnih tačaka (NP), koje teče u nekoliko koraka (slika 9.12).

U prvom koraku, za svaku merenu dužinu r_0 računa se referentna dužina r_p uz pomoć koordinata stanice i koordinata satelita iz poznate satelitske orbite. Na osnovu ovih vrednosti dobijaju se reziduali r_r :

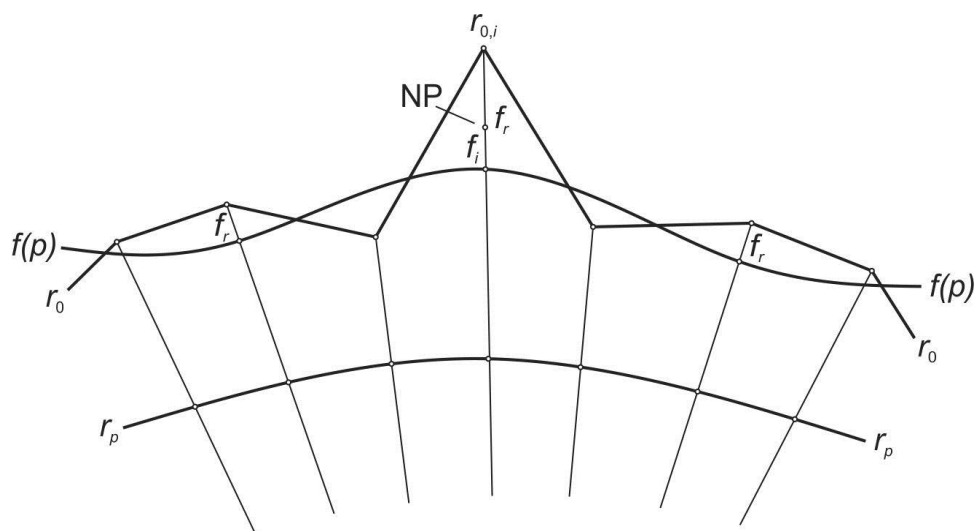
$$r_r = r_0 - r_p. \quad (9.10)$$

U drugom koraku, reziduali se aproksimiraju trend funkcijom $f(p)$. Obično se u tu svrhu koriste polinomi Čebiševa, kako se algebarskim polinomima višeg stepena ne bi uvodila u proces računanja neprirodna oscilatorna svojstva. Iz odstupanja f_r :

$$f_r = r_r - f(p), \quad (9.11)$$

eliminšu se onda odskakući rezultati po kriterijumu 3σ , a potom se postupak iterativno ponavlja sve dok se na taj način ne otkriju sve grube greške.

U trećem koraku, opažanja se dele u vremenske intervale fiksne širine, počev od 0^h UTC vremena. Kolika će biti širina intervala zavisi od brzine kretanja satelita, odnosno njegove visine leta. Kod GPS satelita širina intervala iznosi 300 sekundi,



Slika 9.12. Formiranje normalnih tačaka.

kod satelita LAGEOS 120 sekundi, a kod GRACE svega 5 sekundi. Za svaki interval i računa se aritmetička sredina f_i iz svih odstupanja f_r , koja se zatim za sredinu intervala dodaje na trend funkciju. Na taj način dobija se normalna tačka intervala NP_i i ona reprezentuje sva merenja iz intervala. Dužina koja odgovara normalnoj tački intervala $r_{NP,i}$ računa se pomoću merenja $r_{0,i}$ najbližeg sredini intervala i njegovog odstupanja f_r :

$$r_{NP,i} = r_{0,i} - (f_r - f_i). \quad (9.12)$$

Postupkom formiranja normalnih tačaka ostvaruje se niz pogodnosti: ostaje očuvan karakter originalnih merenja, eliminišu se grube greške, korelacija se svodi na zanemarljivu meru, i redukuje se merni šum.

Lasersko merenje rastojanja do satelita spada u najpreciznija geodetska merenja, zbog čega ostaje nezamenljivo oruđe u oblasti geonauka, bez obzira na pojavu mikrotalasnih satelitskih sistema kao što su NAVSTAR GPS ili GLONASS. Iako laserske sisteme prate visoki troškovi, ograničena mobilnost i određena zavisnost od vremenskih uslova, u prednosti laserskih merenja spada između ostalog:

- potencijal za još veću tačnost, s obzirom na svojstva prostiranja svetlosti,
- dugotrajnost satelita zbog toga što nemaju aktivnih elemenata,
- veoma dugačke vremenske serije opažanja i izvedenih parametara,
- mogućnost određivanja apsolutnih geocentričnih koordinata,
- mogućnost pružanja nezavisne kontrole drugih geodetskih tehnika.

Primena rezultata laserskih merenja rastojanja metodološki se može podeliti na geometrijsku i dinamičku. Geometrijske metode služe samo za određivanje položaja tačaka, odnosno baznih linija, i osnovna ideja sastoji se u simultanom merenju dužina sa više poznatih i nepoznatih tačaka do istog satelita. Međutim, kako je jednovremenost opažanja veoma teško ostvariti, geometrijske metode imaju više teorijski nego praktični značaj.

Kod dinamičkih metoda koriste se sva izvršena merenja, ali se ona funkcionalno povezuju sa položajima satelita koristeći teoriju satelitskog kretanja. Da bi se održala inače visoka tačnost merenja dužina, neophodno je da veoma tačno budu modelirani svi gravitacioni i negravitacioni uticaji koji mogu imati efekta na satelitsku putanju. Zajedničkom obradom svih izvršenih merenja, kod dinamičke metode ocenjuju se sledeće veličine:

- geocentrične koordinate tačaka ili komponente baznih linija,
- koeficijenti Zemljinog gravitacionog polja,
- komponente kretanja pola,
- parametri Zemljine rotacije,
- parametri okeanskih plima i plima Zemljine kore,
- korekcije satelitskih putanja.

Iz mernog materijala nije moguće simultano odrediti sve nabrojane veličine jer je u tom slučaju sistem neodređen. Stoga se, na primer, pri ocenjivanju komponenti baznih linija fiksiraju parametri Zemljinog gravitacionog polja, a kod određivanja komponenti kretanja polja, stanične koordinate smatraju se poznatim.

Određivanje geocentričnih koordinata se dakle ne vrši izolovano, već zajedno sa drugim nepoznatim parametrima. Tačnost koordinata je na centimetarskom nivou bez obzira na rastojanja, jer se tačke određuju pojedinačno. Na taj način moguće je ostvariti jedno globalno polje tačaka visoke tačnosti. Analizom dugogodišnjih opažanja lako se određuju položaji s tačnošću od 5 mm, ali i detektuju promene položaja s tačnošću od 2 mm/god. Tako je utvrđeno da se kod raseda San Andreas u Kaliforniji blokovi kore kreću relativnom brzinom od oko 6 cm/god, što se odlično slaže sa nezavisnim geološkim rezultatima.

Visoka tačnost laserskog merenja dužina relativno rano je počela da se koristi za određivanje parametara Zemljinog gravitacionog polja. Tako je, primera radi, izveden globalni geopotencijalni model GEM9 na osnovu 200 000 merenih dužina do 9 satelita. Značaj satelitskih geopotencijalnih modela leži prvenstveno u visokoj tačnosti dugoperiodičnih karakteristika gravitacionog polja koje odgovaraju prostornoj rezoluciji od oko 1000 km. Laserska merenja su takođe često deo baze podataka za određivanje geopotencijalnih modela visoke rezolucije, kao što je EGM96. Drugi važan rezultat analize laserskih merenja je vrednost geocentrične gravitacione konstante GM . Sa svakom globalnom mernom kampanjom taj rezultat se popravlja. Na osnovu višegodišnjih merenja ka satelitima LAGEOS-1/2, dobijena je vrednost:

$$GM = 398\,600.441\,87 \pm 0.000\,20 \text{ km}^3\text{s}^{-2}. \quad (9.13)$$

Određivanje parametara Zemljine rotacije (koordinate pola i Griničko zvezdano vreme), bazira se na visokoj stabilnosti putanje satelita LAGEOS. Naime, rastojanje od stanice do satelita ne menja se samo zbog kretanja satelita, već i zbog Zemljine rotacije. Na osnovu promena dužina danas se rutinski određuju promene koordinata pola sa tačnošću od 0.0001", i promena u brzini Zemljine rotacije sa tačnošću od 0.05 ms.

Zbog gravitacionog uticaja Sunca i Meseca, Zemljino telo doživljava periodične deformacije čija radijalna komponenta dostiže 30 – 40 cm. Za bliske stanice ova komponenta je praktično ista, ali se za veća rastojanja razlika mora uzeti u obzir. Osim toga, deformacija Zemlje uzrokuje poremećaje u satelitskoj orbiti, koji za niskoleteće satelite mogu iznositi i 10 m. Veličina Zemljine deformacije zavisi od njenih elastičnih svojstava koja se kod laserskih merenja modeliraju u vidu Lav brojeva i određuju iz analize satelitske putanje. U tom smislu, prednost satelitski određenih Lav brojeva u odnosu na terestričke leži u njihovom globalnom karakteru.

Od 1969. godine postoji mogućnost laserskog merenja rastojanja do Meseca na čiju su površinu tri američke svemirske misije postavile odgovarajuće reflektore. Laserskim merenjem rastojanja do Meseca mogu se ocenjivati svi već nabrojani parametri, uz dodatak:

- potvrđivanja nutacionih i precesionih teorija,
- određivanja putanje Meseca,
- određivanja rotacije Meseca i njegovog gravitacionog polja,
- utvrđivanja ukupne mase sistema Zemlja-Mesec,
- potvrđivanja teorije relativiteta.

9.3 Satelitska altimetrija

Satelitska altimetrija je relativno noviji merni postupak satelitske geodezije i jedini je predstavnik metoda koje pripadaju kategoriji Kosmos – Zemlja. To znači da se samo merenje obavlja u satelitu.

Osnovni princip altimetrijskih merenja veoma je jednostavan. Sistem koji se sastoji od satelita sa senzorom, emituje preko antene kratke impulse mikrotalasa u radarskom frekvencijskom opsegu. Radarski impulsi se po odbijanju od Zemljine površine ponovo primaju senzorom, i na osnovu izmerenog proteklog vremena Δt dobija se visina satelita iznad Zemlje, a , po izrazu identičnom onom kod laserskog merenja rastojanja:

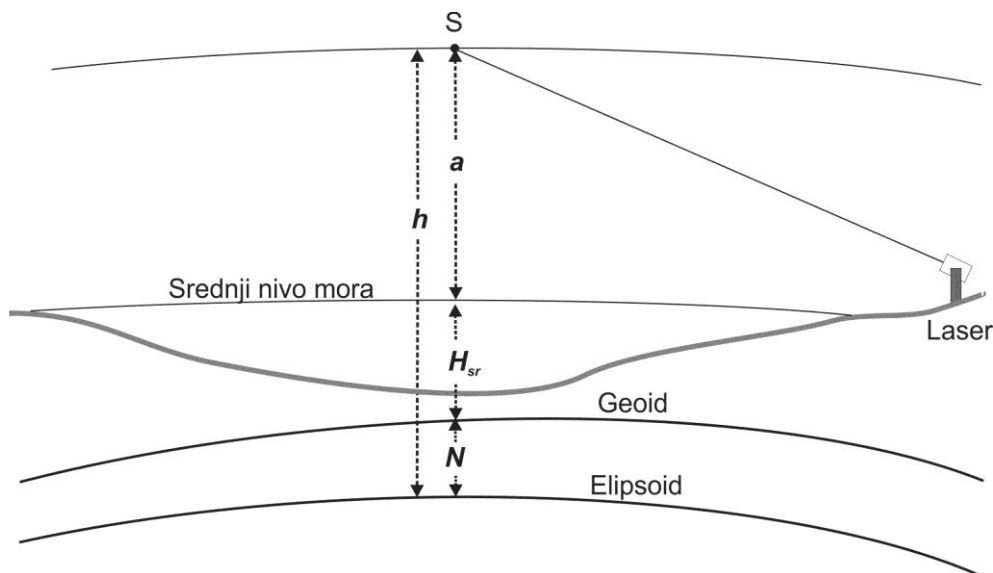
$$a = c_0 \frac{\Delta t}{2}. \quad (9.14)$$

Satelitski senzor radi na frekvenciji od oko 14 GHz (Ku frekvencijski opseg), tako da je talasna dužina generisanih mikrotalasa 2.2 cm. Dužina impulsa je nekoliko nanosekundi, a tačnost merenja bolja je od 5 cm. S obzirom na refleksiona svojstva, altimetrijska merenja vrše se pre svega iznad površi mora i okeana. Ako je putanja satelita poznata, na osnovu orbitalnih elemenata može se sračunati njegova visina h iznad odabranog elipsoida, tako da osnovna jednačina altimetrijskih merenja glasi (slika 9.13):

$$h = N + H_{sr} + a, \quad (9.15)$$

gde H_{sr} označava odstupanje srednjeg nivoa mora od geoida, a N visinu geoida nad elipsoidom (undulaciju geoida).

Altimetrijska merenja uglavnom teku tako što se emituju mikrotalasni impulsi frekvencijom od 10 Hz, a kao rezultat koriste se vrednosti osrednjene za svaku sekundu. Impulsni mlaz po izlasku iz satelitske antene ima veoma mali ugao divergencije (oko 0.0001 rad), ali zbog velike visine leta satelita ne pogađa morsku



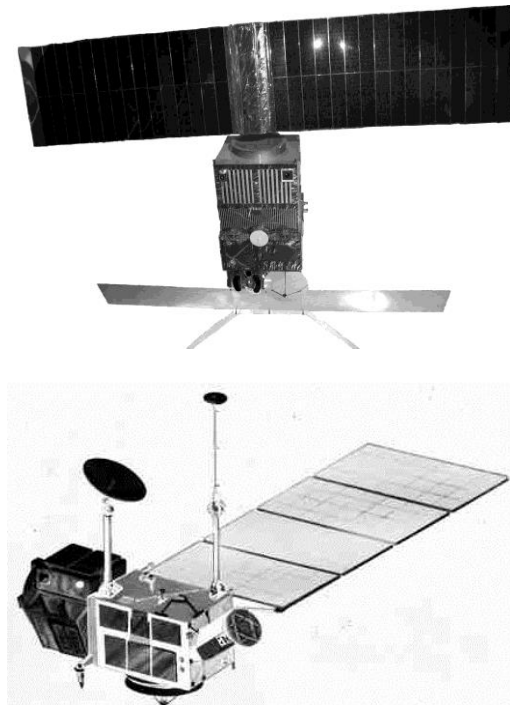
Slika 9.13. Princip altimetrijskih merenja.

površinu u jednoj tački, već zahvata površinu prečnika nekoliko kilometara koja se naziva stopom. Prečnik stope R može se odrediti po formuli:

$$R = \sqrt{2c_0 \left(\tau + \frac{2h_w}{c_0} \right) h}, \quad (9.16)$$

gde τ označava dužinu impulsa, h je visina leta satelita, a h_w visina morskih talasa. Primera radi, kod satelita ERS-1, koji ima visinu leta $h = 800$ km i dužinu impulsa od $\tau = 3$ ns, radijus stope R varira između 1.2 km za mirno more i oko 6 km kada su talasi visine $h_w = 10$ m.

Prvi altimetrijski sateliti lansirani su u okviru Skylab misije 1973.-1974. godine, i imali su tačnost merenja od 1 – 2 m. Usledili su zatim usavršeni sateliti GEOS-3 1975. godine i SEASAT-A 1978. godine sa tačnošću merenja od 60 cm, odnosno 10 cm. U naredne dve decenije lansiran je niz altimetrijskih satelita sa sve kompleksnijom senzorskom tehnologijom. Neki od njih predstavljaju primere naročito uspešnih misija. Tako je, recimo, prvi evropski satelit za daljinsku detekciju (ERS-1) lansiran 1991. godine u heliosinhronu, skoro kružnu orbitu sa visinom leta od 780 km i inklinacijom od 98.5° , i omogućavao je snimanje kopna, obalskih zona i polarnih kapa, merenje visine okeanskih talasa, brzine i pravca vetra, raznih parametara leda, temperature morske površi, oblačnosti, sadržaja vodene pare u atmosferi, kao i altimetrijska merenja iznad okeana i ledenih područja, sa tačnošću od 4 cm.



Slika 9.14. Altimetrijski sateliti ERS-1 (gore) i TOPEX/POSEIDON (dole).

Drugi značajni primer predstavlja misija TOPEX/POSEIDON američke agencije NASA i francuske kosmičke agencije CNES. Satelit je lansiran 1992. godine u kružnu putanju sa visinom leta od 1340 km i inklinacijom od 66° . Na satelitskoj platformi bila su instalirana dva altimetra koji su simultano radili na frekvencijama 13.6 GHz i 5.3 GHz. Misija TOPEX/POSEIDON projektovana je prvenstveno za istraživanje kruženja okeanske vode i njegove interakcije sa atmosferom. Altimetrijska merenja imala su tačnost od 2 cm i izvodila su se na svaku sekundu, sa stopom radarskog snopa koja je iznosila 3 – 5 km. Iako je projektovan vek misije bio oko 5 godina, satelit je i posle 10 godina još uvek vršio merenja, čak i nekoliko meseci u tandemu sa svojim naslednikom JASON-1. Izgled satelita ERS-1 i TOPEX/POSEIDON prikazan je na slici 9.14.

Satelitska altimetrija inače predstavlja tipičan primer mernog sistema čiji rezultati imaju interdisciplinarni karakter. Dok je za geodeziju odstupanje srednjeg nivoa mora od geoida poremećaj koji se mora korigovati, za okeanografiju je to korisni merni signal uz pomoć kojeg se može istraživati dinamika okeana i druge pojave.

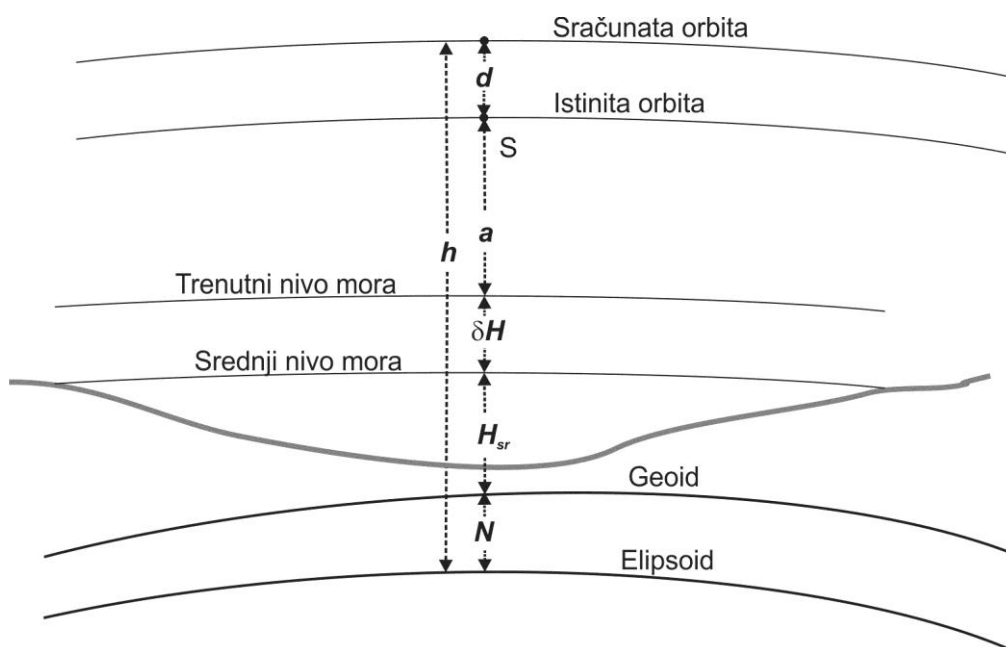
Osnovna jednačina altimetrijskih merenja je pojednostavljeni model realnosti koji se mora proširiti dodatnim parametrima:

$$h = N + H_{sr} + \delta H + a + d, \quad (9.17)$$

gde δH označava plimatsko odstupanje trenutnog od srednjeg nivoa mora, a d odstupanje stvarne od sračunate satelitske orbite (slika 9.15). Izvršena merenja se moraju još korigovati za atmosferske efekte, i redukovati na geometrijski centar satelita. Pod tim pretpostavkama, određivanje srednjeg nivoa mora svodi se na određivanje veličine $N + H_{sr}$. Podrazumeva se da su plimatski uticaji eliminisani iz merenja, i da su greške satelitske orbite modelirane na odgovarajući način.

Plimatski uticaj, odnosno veličina δH , na otvorenim okeanima dostiže 1 m, dok je u priobalnim područjima i zatvorenim morima čak i do 2 m. Sve do misije TOPEX/POSEIDON, za obračunavanje ovog efekta koristio se globalni plimatski model Šviderskog kojim se postizala tačnost od 0.1 m. Danas je to moguće izvršiti sa tačnošću 2 – 3 cm, iako su za pojedine oblasti neophodni regionalni ili čak i lokalni modeli.

Kada su u pitanju greške satelitske orbite, kod altimetrijskih merenja najveći značaj ima radijalna komponenta. Uobičajeni način tretmana ove greške je primena takozvane metode presečnih tačaka. Ideja metode se sastoji u činjenici da satelit kružeći oko rotirajuće Zemlje leti iznad identičnih morskih i okeanskih područja. Za razlike izvršenih merenja u identičnim, odnosno presečnim tačkama, može se pretpostaviti da su posledica razlika radijalnih grešaka orbita satelita prilikom dva prolaza. Praktični postupak podrazumeva prvo da se lokalizuju presečne tačke.



Slika 9.15. Geometrijske veze u satelitskoj altimetriji.

Obično se uzima da su to tačke u jednom pravilnom geografskom rasteru, ali kako u njima najčešće nema aktuelnih merenja potrebna je interpolacija ili neki filtracioni postupak da se do tih vrednosti dođe. Razlike interpolovanih vrednosti d_{ij} su onda oblika:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= g_i - g_j \\ &= d_i - d_j + \varepsilon_i - \varepsilon_j, \end{aligned} \quad (9.18)$$

gde su g_i i g_j interpolovana altimetrijska merenja u presečnoj tački za satelitske prolaze i i j , d_i i d_j su radijalne greške satelitske orbite za dva prolaza, a ε_i i ε_j odgovarajuće slučajne greške. Ove vrednosti se najčešće dalje modeliraju u vidu polinoma po vremenu ili koordinatama, tako da se za svaku presečnu tačku može formirati jednačina opažanja:

$$v_{ij} = \sum_{e=0}^k \alpha_{ie} (t_i - t_0)^e - \sum_{e=0}^l \alpha_{je} (t_j - t_0)^e - d_{ij} + \varepsilon_i - \varepsilon_j, \quad (9.19)$$

pri čemu t_0 označava proizvoljno referentno vreme. Ocenjivanjem nepoznatih koeficijenata α po metodi najmanjih kvadrata, sva izvršena altimetrijska merenja mogu se korigovati zbog orbitalnih grešaka, a onda se na osnovu njih određuje srednji nivo mora. Ovakva metoda je pogodna zbog svoje jednostavnosti jer ne sadrži modeliranje sila koje određuju oblik satelitske putanje. Međutim, pošto metoda nije dinamička, pouzdani i dovoljno tačni rezultati dobijaju se samo za kraće orbitalne lukove, a samim tim i za manje morske i okeanske površine.

Faktori koji utiču na tačnost altimetrijskih merenja mogu se svrstati u sledeće tri osnovne kategorije:

- uticaji grešaka satelitskih orbita,
- altimetrijske merne greške,
- odstupanje trenutne morske površi od geoida.

(a) Greška satelitske putanje, a naročito njena radijalna komponenta, direktno utiče na tačnost rezultata altimetrijskih određivanja. Najvažniji faktori od kojih zavisi kvalitet satelitske putanje su:

- tačnost geopotencijalnog modela korišćenog u računanju orbite,
- tačnost koordinata stanica za praćenje pomoću kojih se putanje određuju,
- tačnost samih postupaka merenja na stanicama za praćenje,
- greške modeliranja pri računanju orbite.

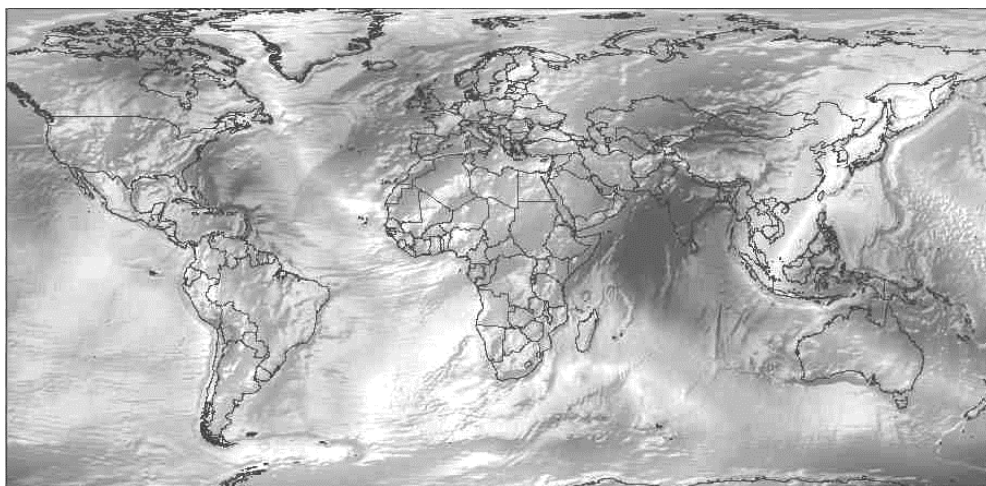
Po pravilu, deo budžeta grešaka koji potiče od sistema za praćenje nema veliki uticaj na tačnost putanje, jer lako prevazilazi tačnost samih altimetrijskih merenja.

Ograničavajući faktor predstavljao je ranije geopotencijalni model, zbog toga što je svaki satelit različito osetljiv na različite grupe harmonijskih koeficijenata. Pod najpovoljnijim uslovima, tačnost orbite iznosila je 1 – 2 m. Sa brojnim savremenim geopotencijalnim modelima visokog kvaliteta, tačnost orbite dostiže 10 cm.

(b) U altimetrijske merne greške ubrajaju se instrumentalne greške i greške prostiranja signala. Prva grupa sadrži uticaje promenljivog rastojanja između faznog centra antene i centra mase satelita, kašnjenje signala pri kretanju kroz elektronske komponente sistema i grešku merenja vremena. Ovi uticaji mogu se smanjiti ili oceniti posebnim metodama rada i kalibracijom. U greške prostiranja signala ubrajaju se jonosferska i troposferska refrakcija, koje se u dobroj meri otklanjaju merenjima na dve frekvencije, odnosno odgovarajućim popravkama, kao i uticaj stanja morske površi na energetski oblik odbijenog impulsa.

(c) Trenutna površ mora i okeana može se posmatrati kao superpozicija jednog stacionarnog dela (srednji nivo mora) i dela koji se menja u funkciji vremena. Stacionarni deo naziva se još i topografijom morske površi. Najveći procenat promenljivog dela odstupanja površi mora od geoida nastupa zahvaljujući plimama mora i plimatskom disanju Zemljine kore. Promenljivi atmosferski pritisak takođe može imati efekta na nivo mora u iznosu 10 – 20 cm u regionalnim razmerama. Zbog nesigurnosti određivanja atmosferskog pritiska iznad velikih okeanskih površina, modeliranje ovog uticaj može se izvesti sa tačnošću od 2 – 4 cm, tako da predstavlja jedan od ograničavajućih faktora u analizi altimetrijskih merenja.

Altimetrijski određena srednja površ mora i okeana ima danas centimetarski kvalitet zahvaljujući dugogodišnjim opažanjima i kombinaciji različitih skupova podataka. Primer reljefnog prikaza oblika ove površi dobijenog analizom rezultata altimetrijske misije TOPEX/POSEIDON dat je na slici 9.16. Srednja površ mora



Slika 9.16. Srednji nivo mora iz altimetrijske misije TOPEX/POSEIDON.

može se u prvom približenju smatrati geoidom čija je globalna tačnost oko 2 m. Primenom inverzne Stokesove formule ili postupkom kolokacije moguće je odrediti anomalije sile teže sa odgovarajućom tačnošću od 6 mGal, kao i otklone vertikalna koji se inače ne mogu meriti na otvorenom moru astronomskim metodama. Altimetrijska merenja isto tako čine važan deo materijala na osnovu kojeg se računaju globalni geopotencijalni modeli višeg stepena i reda.

Altimetrijska merenja imaju naročito veliki značaj u geofizici i okeanografiji. Geofizičkom interpretacijom altimetrijskih rezultata određuju se položaji i orijentacije podvodnih struktura kao što su grebeni, rasedi, vulkani, planinski venci, granice kontinenta i slično. Okeanografska ispitivanja stanja i kretanja vodenih masa, njihove cirkulacije i smerova podvodnih struja danas su nezamisliva bez globalne analize altimetrijskih podataka. Položaj površi mora u odnosu na ekvipotencijalnu površ kao što je geoid, podjednako je važan za okeanografiju i geodeziju. Geodetski interes ovih istraživanja predstavljaju pre svega mogućnosti povezivanja različitih vertikalnih datuma realizovanih mareografskim opažanjima.

Treba ipak napomenuti da se geodetski i okeanografski aspekti topografije morske površi međusobno isključuju. Ako se altimetrijska merenja koriste za određivanje marinskog geoida, što ima geodetski značaj, topografija morske površi igra ulogu popravke koja se računa na osnovu odgovarajućeg okeanografskog modela. S druge strane, za određivanje topografije morske površi, koja je od značaja za okeanografiju, neophodno je poznavanje geoida. Teškoća u razdvajanju undulacije geoida od topografije morske površi predstavlja osnovni problem primene altimetrije u geodeziji i okeanografiji. Postoji nekoliko konceptualnih predloga zasnovanih na korišćenju dodatnih informacija o kretanju vodenih masa ili satelitskim orbitama, ali izgleda da je najbolje rešenje nezavisno određivanje kratkotalasnih karakteristika geoida koje se očekuje od novih satelitskih misija.

9.4 Praćenje satelita (SST) i satelitska gradiometrija

Arhitektura i principi funkcionisanja do sada pomenutih satelitskih sistema i metoda, sa izuzetkom satelitske altimetrije, uglavnom su bili prikazani sa aspekta pozicioniranja ili navigacije. Svaki satelit može se isto tako posmatrati i kao senzor Zemljinog gravitacionog polja, jer je privlačenje Zemlje dominantna sila koja upravlja satelitskim kretanjem.

Osnovna ideja korišćenja satelita za određivanje gravitacionog polja Zemlje sastoji se u detekciji nepravilnosti u njihovom kretanju. One su direktna posledica nehomogenosti i anomalija u gustinama Zemljinog tela, koje sa svoje strane određuju geometriju realnog Zemljinog gravitacionog polja. Nažalost, realizacija ovako jednostavnog koncepta povezana je sa principijelnom teškoćom koja proizilazi iz Njutnovog zakona univerzalnog privlačenja, po kojem bi anomalije gustina u telu Zemlje morale biti veoma velike da bi se njihov efekat osetio na visinama leta satelita. To potvrđuju modeli gravitacionog polja Zemlje dobijeni

analizom orbita velikog broja satelita sa visinama leta između 800 km i 20 000 km, koji imaju prostornu rezoluciju (polovinu talasne dužine) od svega 500 km, što odgovara stepenu harmonijskog razvoja $N = 36$, tačnosti od oko 1 m za geoid i oko 5 mGal za anomalije sile teže.

Savremeni zahtevi geodezije, geofizike i okeanografije za finom strukturom globalnog modela gravitacionog polja viši su za dva reda veličine:

- prostorna rezolucija bolja od 200 km,
- stepen razvoja veći od 200,
- tačnost anomalija sile teže bolja od 1 mGal,
- tačnost undulacija geoida od 1 – 2 cm.

Jedina mogućnost da se zadovolje ovi zahtevi su specijalizovane satelitske misije za određivanje Zemljinog gravitacionog polja. One moraju zadovoljavati sledeća tri osnovna kriterijuma da bi se prevazišla ograničenja postojećih metoda praćenja satelitskih orbita sa Zemlje:

- što niža visina leta satelita (po mogućstvu 200 – 500 km),
- neprekidno 3D praćenje satelita duž što većeg orbitalnog luka,
- razdvajanje gravitacionih i ngravitacionih uticaja na kretanje satelita.

Dva koncepta su u tom smislu testirana i praktično realizovana:

- satelitsko praćenje (SST), kod kojeg se vrši merenje rastojanja i promena rastojanja između satelita,
- satelitska gradiometrija, koja se sastoji u merenju razlika sila privlačenja u samom satelitu.

Satelitsko praćenje (SST). Kod ove metode mere se promene dužina između satelita sa visokom rezolucijom. Satelitska konfiguracija može biti dvojaka:

- HL konfiguracija (High-Low) sastoji se od satelita sa velikom visinom leta (geostacionarni sateliti, GPS, GLONASS ili GALILEO), i niskoletećeg satelita (LEO) između kojih se mere promene rastojanja.
- LL konfiguraciju (Low-Low) čine dva niskoleteća LEO satelita smeštena u istu orbitu, na međusobnom rastojanju od nekoliko stotina kilometara.

Za obe ove konfiguracije zajedničko je to da niskoleteći satelit predstavlja senzor Zemljinog gravitacionog polja. Pošto promene dužina opisuju radijalnu relativnu brzinu dva satelita, varijacije ove veličine noseće sa sobom informaciju o promenama gravitacionog polja. Što je orbita LEO satelita niža, to će nepravilnosti gravitacionog polja više doći do izražaja.

Princip SST metode ilustrovan je na slici 9.17. Neka su \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 vektori položaja satelita S_1 i S_2 koji čine SST konfiguraciju, a $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ vektor njihovog relativnog položaja.

Osnovnu mernu veličinu kod SST metode predstavlja relativna radijalna brzina, odnosno promena dužine r vektora \mathbf{r} , koja je jednaka:

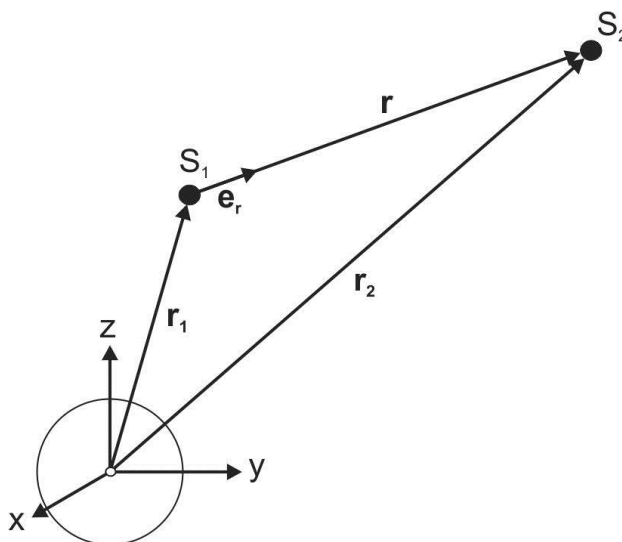
$$\dot{r} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_r = \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (9.20)$$

gde je sa \mathbf{e}_r označen jedinični vektor u pravcu od S_1 do S_2 . Varijacije relativne radijalne brzine, koje su kod SST metode izvedene veličine, dobijaju se kada se gornja jednakost diferencira po vremenu:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_r + \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{e}}_r \\ &= \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_r + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}} - \dot{r}\mathbf{e}_r}{r} \\ &= \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_r + \frac{\dot{\mathbf{r}}^2 - \dot{r}^2}{r} \end{aligned} \quad (9.21)$$

Iz ove formule vidi se da će u slučaju spore promene orijentacije $\dot{\mathbf{e}}_r \approx \mathbf{0}$, a to je upravo situacija kod recimo HL-SST konfiguracije, merna veličina \ddot{r} biti direktno povezana sa vektorom ubrzanja satelita $\ddot{\mathbf{r}}$.

Značaj SST mernih veličina relativne radijalne brzine i ubrzanja leži u činjenici da se one mogu funkcionalno povezati sa parametrima gravitacionog polja Zemlje.



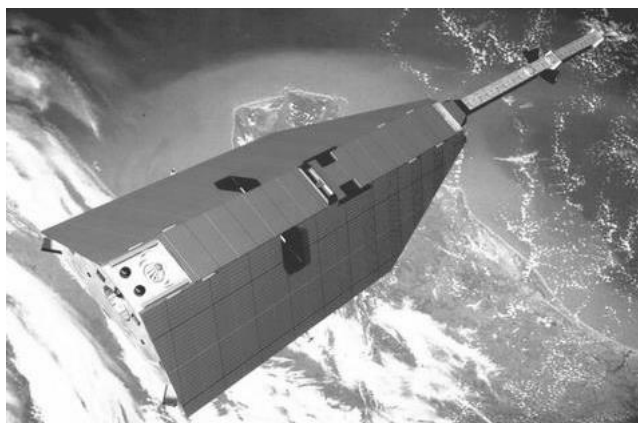
Slika 9.17. Princip metode satelitskog praćenja (SST).

Obično se za te svrhe biraju koeficijenti sfernoharmonijskog razvoja potencijala sile Zemljinog privlačenja, C_{mm} i S_{mm} .

Koncept satelitskog praćenja predložen je i testiran još šezdesetih godina prošlog veka. Satelitsko praćenje u HL konfiguraciji primenjeno je u okviru NASA lunarnog APOLLO programa za kontrolu lunarnog orbitera. Naknadna analiza podataka otkrila je jake anomalije u Mesečevom gravitacionom polju. Kada je u pitanju Zemljino gravitaciono polje, SST u HL konfiguraciji testirano je 1975. godine merenjima između geostacionarnog satelita ATS-6 i LEO satelita GEOS-3, NIMBUS-6 i APOLLO-SOYUZ. Testovi su dokazali efikasnost metode, ali je trebalo da prođe još 25 godina da se realizuje koncept merenja dužina i promena dužina visoke rezolucije u okviru specijalizovane satelitske misije CHAMP.

CHAMP satelit (The Challenging Mini-Satellite Payload for Geophysical Research and Application) lansiran je 2000. godine pod naučnom odgovornošću GFZ (GeoForschungZentrum) u Potsdamu, Nemačka. Satelitska orbita bila je gotovo kružna, polarna, sa visinom leta od 450 km i inklinacijom od 87.3° . Tokom misije visina leta smanjila se na manje od 300 km zbog otpora atmosfere, ali je takav scenario namerno osmišljen kako bi satelit bio osetljiv na širi raspon koeficijenata. Masa satelita iznosila je svega 500 kg, a projektovani životni vek 5 godina (slika 9.18).

Glavni naučni ciljevi misije CHAMP odnosili su se na snimanje globalnog gravitacionog i magnetnog polja, i profilisanje jonosfere i troposfere, zbog čega je satelit bio opremljen dvofrekventnim GPS prijemnikom povezanim sa nekoliko antena, troosnim akcelerometrom, retroreflektorima za lasersko merenje dužina, magnetometrom i odgovarajućim uređajem za istraživanje jonosfere. Perturbacije orbite kontinualno su praćene u odnosu na visokoleteće GPS satelite, uz pomoć



Slika 9.18. Izgled satelita SST misije CHAMP.

preciznih efemerida, čime je ostvarena tačnost položaja CHAMP satelita od nekoliko centimetara. Pošto su za modeliranje gravitacionog polja potrebne samo perturbacije gravitacionog porekla, svi negravitacioni uticaji, kao što su otpor atmosfere, pritisak Sunčevog zračenja, albedo i slično, morali su biti nezavisno mereni. Očekuje se da CHAMP podaci poboljšaju tačnost postojećih modela 5 – 10 puta, posebno na nivou dugotalasnih i srednjetalasnih karakteristika gravitacionog polja.

Prvi eksperiment sa satelitskim praćenjem u LL konfiguraciji takođe je izveden relativno rano, 1975. godine, za vreme APOLLO-SOYUZ manevra spajanja. Međutim, rezultati nisu bili značajni zbog niske rezolucije merenja. Bez obzira na to, koncept je više godina razrađivan da bi konačno rezultirao izuzetno uspešnom satelitskom misijom GRACE.

GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) je zajednički projekat američke i nemačke kosmičke agencije NASA i DLR. Primarni cilj misije sastojao se u snimanju gravitacionog polja Zemlje, dok se sekundarni odnosio na određivanje troposferskih i jonosferskih parametara. Dva identična GRACE satelita (slika 9.19) lansirana su 2002. godine u skoro polarnu orbitu visine leta od 500 km i inklinacije od 89° . Sateliti su na međusobnom rastojanju od 220 km, i da bi se ono održavalo bili su neophodni orbitalni manevri jednom mesečno. Svaki satelit je dužine 3 m, mase 480 kg, životnog veka 5 godina, i opremljen je visokostabilnim oscilatorom, GPS prijemnikom, alcelerometrom, opremom za merenje dužina u K opsegu frekvencija, zvezdanim kamerama i retroreflektorima za lasersko merenje dužina sa Zemlje.

U suštini, GRACE sateliti se mogu posmatrati kao jedan instrument sa sledećim karakteristikama:

- varijacije u gravitacionom polju direktno uzrokuju varijacije u dužini između dva satelita,



Slika 9.19. Izgled satelita SST misije GRACE.

- varijacije u dužini između dva satelita mere se sa visokom tačnošću uređajem u K frekvencijskom opsegu, pri čemu se veza sa globalnim referentnim okvirom ostvaruje GPS pozicioniranjem,
- iz izmerenih varijacija u dužini između dva satelita eliminišu se efekti negravitacionog porekla pomoću mmerenja preciznim akcelometrom.

GRACE opažanja omogućuju generisanje mesečnih globalnih mapa gravitacionog polja sa prostornom rezolucijom od oko 300 km, i preciznošću koja je 100 puta veća od postojećih modela. Međutim, ono što predstavlja još veću vrednost ove misije je sposobnost da prati vremenske promene u gravitacionom polju.

Satelitska gradiometrija. Ova satelitska metoda zasniva se na upotrebi posebnog uređaja, gradiometra, koji meri promenu ubrzanja sile privlačenja u prostoru. Pošto je to ubrzanje inače dato prvim izvodima potencijala $V(x, y, z)$ sile Zemljinog privlačenja po koordinatnim osama, to znači da se gradiometrom određuju drugi izvodi potencijala:

$$V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial i \partial j}. \quad (9.22)$$

Svi drugi izvodi čine komponente takozvanog Etvešovog tenzora:

$$V'' = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix}, \quad (9.23)$$

ali je samo 5 komponenti međusobno nezavisno zbog simetričnosti tenzora i Laplasovog uslova:

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0. \quad (9.24)$$

S obzirom na to da elementi Etvešovog tenzora opisuju strukturu gravitacionog polja krivinom tog polja, sledi da je merenje elemenata tenzora gradiometrom konceptualno superiornije u odnosu na druge senzore.

Ispostavlja se, međutim, da je ovako jednostavnu ideju izuzetno teško praktično realizovati. Najveći problemi sa implementacijom su sledeći:

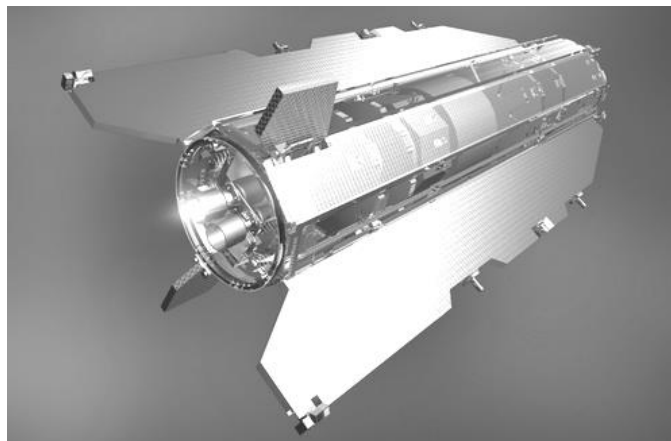
- satelit zajedno sa instrumentom unutar njega rotira,
- satelitska orbita mora biti precizno poznata,
- neophodno je poznavanje orijentacije satelita i instrumenta u odnosu na eksterni referentni okvir,

- podaci su opterećeni uticajima spoljašnjih sila (otpor atmosfere, pritisak Sunčevog zračenja) i instrumentalnim greškama sistematske i slučajne prirode,
- zahtevi tačnosti su ekstremno visoki.

Nakon više predloga, i istraživačkog rada koji je u proteklih 20 godina pokazao kako se navedeni problemi mogu prevazići, evropska kosmička agencija ESA je konačno definisala GOCE satelitsku misiju 2009. godine.

GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) je misija zasnovana na tehnici fuzije senzora (slika 9.20), odnosno kombinaciji preciznog određivanja orbite uz pomoć GPS satelitskog praćenja u HL konfiguraciji, i satelitske gradiometrije. Satelit mase 1000 kg lansiran je u polarnu, heliosinhronu orbitu sa inklinacijom od 96.7° i visinom leta od 270 km. Projektovani životni vek satelita od 2 godine trajao je dvostruko duže. Osnovni ciljevi misije sastojali su se u određivanju geoida sa tačnošću od 1 cm, gravitacionih anomalija sa tačnošću od 1 mGal, i postizanju prostorne rezolucije od 70 km. Ostvareni ciljevi bi onda omogućili:

- bolje razumevanje fizike unutrašnjosti Zemlje, čime bi bio ostvaren novi uvid u geodinamičke procese povezane sa litosferom, kao i sa reologijom i sastavom omotača,
- bolje razumevanje ponašanja okeanskih struja i transporta toplote,
- globalni vertikalni referentni sistem koji bi služio kao referentna površ za istraživanje topografskih procesa i promena nivoa mora i okeana,
- bolje procene debljine polarnog leda i njegovog kretanja.



Slika 9.20. Izgled satelita gradiometrijske misije GOCE.

Pored GPS prijemnika, GOCE satelit bio je opremljen i elektrostatičkim gradiometrom, koji se sastojao od tri para visokoosetljivih akceleratora, kao i retroreflektorima za lasersko merenje rastojanja sa Zemlje. GPS prijemnik imao je dvostruku ulogu. Korišćen je za precizno određivanje orbite odnosno lociranje gradiometra, i za analizu dugotalasnih i srednjetalasnih karakteristika gravitacionog polja. Akceleratori su merili razlike ubrzanja na bazama dužine oko 50 cm.

Prvi rezultati GOCE merenja u pogledu globalnog modela gravitacionog polja Zemlje i fine strukture okeanskih struja prikazani su već 2010. godine, dokazujući da je misija u potpunosti ispunila postavljene ciljeve. Tokom 2012. godine su relativno povoljni uslovi u jonosferi omogućili da se visina leta satelita smanji na 235 km čime je povećana osetljivost gradiometra i omogućena još viša rezolucija u snimanju gravitacionog polja. Niska orbita zahtevala je i povećanu potrošnju goriva zbog otpora atmosfere, tako da je usled nedostatka goriva misija okončana 2013. godine, daleko nadmašivši svoje projektovano trajanje.

Referentna literatura

- [1] **Allan D.:** *Time and Frequency (Time-Domain) Characterization, Estimation and Prediction of Precision Clocks and Oscillators*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. UFFC-34, No. 6, (1987).
- [2] **Allan D.; Ashby N.; Hodge C. C.:** *The Science of Timekeeping*. Hewlett Packard Application Note 1289: GPS and Precision Timing Applications, (1997).
- [3] **Aparicio M.; Brodie P.; Doyle L.; Rajan J.; Torrione P.:** *GPS Satellite and Payload*. In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
- [4] **Arnold K.:** *Methoden der Satellitengeodaesie*. Akademie-Verlag, Berlin, (1970).
- [5] **Ashby N.; Spilker J. J.:** *Introduction to Relativistic Effects on the Global Positioning System*. In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
- [6] **Axelrad P.:** *GPS Navigation Algorithms*. In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
- [7] **Baarda W.:** *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks*. Netherland Geodetic Commission, Vol. 2, No. 5, Delft, (1968).
- [8] **Bierman G.:** *Measurement Updating Using the U-D Factorization*. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, (1975).
- [9] **Black H. D.:** *An Easily Implemented Algorithm for the Tropospheric Range Correction*. Journal of Geophysical Research, Vol. 83, No. B4, (1978).
- [10] **Blewitt G.:** *GPS Data Processing Methodology*. In: Teunisson G. J. P. and Kleusberg A. (eds.): *GPS for Geodesy*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1996).
- [11] **Bock Y.; Zhu S.:** *On the Establishment and Maintenance of a Modern Conventional Terrestrial Reference System*. Proceedings of Symposium No. 5: Geodetic Applications of Radio Interferometry, IAG General Meeting, Tokyo, NOAA Technical Report NOS95-NGS24, (1982).
- [12] **Brockmann E.:** *Combination of Solutions for Geodetic and Geodynamic Applications of the Global Positioning System (GPS)*.

Inauguraldissertation der Philosophisch naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bern, (1996).

- [13] **Capderou, M.:** *Satellites: Orbits and Missions*. Springer Verlag France, (2005).
- [14] **Chao C. C.:** *A Model for Tropospheric Calibration from Daily Surface and Radiosonde Balloon Measurements*. Technical Memorandum 391-350, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, USA, (1972).
- [15] **Chen D.:** *Development of a Fast Ambiguity Search Filtering (FASF) Method for GPS Carrier Phase Ambiguity Resolution*. PhD Thesis, UCGE Reports Number 20071, University of Calgary, (1994).
- [16] **Collins J. P.; Langley B. R.:** *Possible Weighting Schemes for GPS Carrier Phase Observations in the Presence of Multipath*. Contract report for the United States Army Corps of Engineers Topographic Engineering Center, No. DAAH04-96-C-0086/TCN 98151, (1999).
- [17] **Counselman C. C.; Gourevitch S. A.:** *Miniature Interferometer Terminals for Earth Surveying: Ambiguity and Multipath with Global Positioning System*. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. GE-19, No. 4, (1981).
- [18] **de Jong C. D.:** *Principles and Applications of Permanent GPS Arrays*. PhD thesis, Department of Geodesy, Technical University of Budapest, (1996).
- [19] **El Rabbany A. E. S.:** *The Effect of Physical Correlations on the Ambiguity Resolution and Accuracy Estimation in GPS Differential Positioning*. Technical Report No. 170, Department of Geodesy and Geomatic Engineering, University of New Brunswick, Canada, (1994).
- [20] **Emardson T. R.:** *Studies of Atmospheric Water Vapor Using the Global Positioning System*. Technical Report Number 339, Chalmers University of Technology, Sweden (1998).
- [21] **Euler H. J.; Keenan C. R.; Zebhauser B. E.; Wuebbena G.:** *Study of a Simplified Approach in Utilizing Information from Permanent Reference Station Arrays*. ION GPS 2001, Salt Lake City, (2001).
- [22] **Fotopoulos G.; Cannon M. E.:** *An Overview of Multi Reference Station Methods for Cm Level Positioning*. GPS Solutions, Vol. 4, No. 3, Wiley&Sons, (2001).
- [23] **Francisco S. G.:** *GPS Operational Control Segment*. In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
- [24] **Frei E.; Beutler G.:** *Rapid Static Positioning Based on the Fast Ambiguity Resolution Approach FARA: Theory and First Results*. Manuscripta Geodaetica, Vol. 15, No. 4, (1990).

- [25] **Gelb A.:** *Applied Optimal Estimation*. The M.I.T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, USA, (1974).
- [26] **Georgiadou Y.; Kleusberg A.:** *On the Effect of Ionospheric Delay on Geodetic Relative GPS Positioning*. Manuscripta Geodaetica, No. 13, Springer Verlag, (1988).
- [27] **Gianniou M.:** *Genauigkeitssteigerung bei kurzzeit statischen und kinematischen Satellitenmessungen bis hin zur Echtzeitanwendung*. Deutsche Geodaetische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 458, Muenchen, (1996).
- [28] **Goad C. C.:** *Single Site GPS Models*. In Teunisson G. J. P. and Kleusberg A. (eds.): *GPS for Geodesy*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1996).
- [29] **Grafarend W. E.:** *Lecture Notes on Adjustment and Statistics III, Part 1, WS 2000/2001, Rev. 1.5*. Geodaetisches Institut, Universitaet Stuttgart, (2000).
- [30] **Han S.; Rizos C.:** *Standardization of the Variance Covariance Matrix for GPS Rapid Static Positioning*. Geomatics Research Australasia, No. 62, (1995).
- [31] **Han S.:** *Quality Control Issues Relating to Instantaneous Ambiguity Resolution for Real Time GPS Kinematic Positioning*. Journal of Geodesy, No. 71, Springer Verlag, (1997).
- [32] **Han S.:** *Carrier Phase Based Long Range GPS Kinematic Positioning*. UNISURV S-49, School of Geomatic Engineering, The University of New South Wales, (1997).
- [33] **Hartinger H.; Brunner K. F.:** *Variance of GPS Phase Observations: The Sigma Epsilon Model*. GPS Solutions, Vol. 2, No. 4, Wiley&Sons, (1999).
- [34] **Hase H.:** *Theorie und Praxis globaler Bezugssysteme*. Mitteilungen des Bundesamtes fuer Kartographie und Geodaesie, Band 13, Frankfurt am Main, (1999).
- [35] **Hatch R.:** *Instantaneous Ambiguity Resolution*. Proceedings of KIS90, Banff, Canada, (1990).
- [36] **Heiskanen A. W.; Moritz H.:** *Physical Geodesy*. W. H. Freeman and Company, San Francisco London, (1967).
- [37] **Heroux P.; Couba J.:** *GPS Precise Point Positioning with a Difference*. Paper presented at Geomatics 95, Ottawa, Ontario, Canada, (1994).
- [38] **Herring T. A.:** *Modeling Atmospheric Delays in the Analysis of Space Geodetic Data*. In J. C. de Munck and T. A. Spoelstra (Eds): Proceedings of the Symposium on Refraction of Transatmospheric Signals in Geodesy, Netherlands Geodetic Commission, Publications in Geodesy, New Series No. 36, The Hague, Netherlands, (1992).
- [39] **Hofmann Wellenhof B.; Lichtenegger H.; Collins J.:** *Global Positioning System: Theory and Practice*. Third revised edition, Springer

- Verlag, Wien New York, (1994).
- [40] **Hopfield H. S.:** *Two Quartic Tropospheric Refractivity Profile for Correcting Satellite Data.* Journal of Geophysical Research, Vol. 74, No. 18, (1969).
 - [41] **ICD-GPS-200:** *ICD-GPS-200 - Navstar GPS Space Segment / Navigation User Interfaces.* Revision C, Initial Release, ARINC Research Corporation, El Segundo, CA, USA, (1997).
 - [42] **Ifadis I.:** *The Atmospheric Delay of Radio Waves: Modeling the Elevation Dependence on a Global Scale.* Technical Report No. 38L, School of Electrical and Computer Engineering, Chalmers University of Technology, Goeteborg, Sweden, (1986).
 - [43] **Jaeggi A.; Beutler G.; Hugentobler U.:** *Using Double Difference Information from Network Solutions to Generate Observations for a Virtual GPS Reference Receiver.* IAG 2001 Scientific Assembly, Budapest, Hungary, (2001).
 - [44] **Jin X. X.:** *Theory of Carrier Adjusted DGPS Positioning Approach and Some Experimental Results.* PhD thesis, Delft University Press, Delft, Netherlands, (1996).
 - [45] **Jonge P.; Tiberius C.:** *The LAMBDA Method for Integer Ambiguity Estimation: Implementation Aspects.* LGR-Series, Publications of the Delft Geodetic Computing Centre, No. 12, Delft University of Technology, (1996).
 - [46] **Kalman R.:** *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems.* Journal of Basic Engineering (ASME), Vol. 82D, (1960).
 - [47] **Kaplan, E. D.; Hegarty C. J. (eds.):** *Understanding GPS: Principles and Applications.* Artech House, Boston, London (2006).
 - [48] **Kaula M. W.:** *Celestial Geodesy.* Advances in geophysics, vol. 9, Academic Press, New York and London, (1962).
 - [49] **Kim D.; Langley R. B.:** *Estimation of the Stochastic Model for Long-Baseline Kinematic GPS Applications.* Presented at the ION National Technical Meeting, Long Beach, CA, (2001).
 - [50] **Klobuchar A. J.:** *Ionospheric Effects on GPS.* In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
 - [51] **Koch K.:** *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1988).
 - [52] **Komjathy A.:** *Global Ionospheric Total Electron Content Mapping Using the Global Positioning System.* Ph.D. thesis, Technical Report No. 188, University of New Brunswick, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, New Brunswick, Canada, (1997).

- [53] **Kovalevsky J.; Mueller I.:** *Comments on Conventional Terrestrial and Quasi Inertial Reference Systems.* In: E. M. Gaposchkin and B. Kolaczek (eds.): *Reference Coordinate Systems for Earth Dynamics, Proceedings of IAU Colloquium 56, Sept. 8-12, 1980, Warsaw, Poland, (1980).*
- [54] **Landau H.:** *Zur Nutzung des Global Positioning Systems in Geodäsie und Geodynamik: Modellbildung, Software-Entwicklung und Analyse.* Schriftenreihe Heft 36, Studiengang Vermessungswesen, Universität der Bundeswehr, München, (1988).
- [55] **Langley R.:** *GPS Receivers and the Observables.* In Teunissen G. J. P. and Kleusberg A. (eds.): *GPS for Geodesy.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1996).
- [56] **Lanyi G.:** *Tropospheric Delay Effects in Radio Interferometry.* Telecommunications and Data Acquisition Progress Report, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, USA, (1984).
- [57] **Leick A.:** *GPS Satellite Surveying.* John Wiley & Sons, New York, (1995).
- [58] **Leinen S.:** *Hochpräzise Positionierung ueber grosse Entfernungen und in Echtzeit mit dem Global Positioning System.* Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 472, München, (1997).
- [59] **Mader G. L.:** *GPS Antenna Calibration at the National Geodetic Survey.* GPS Solutions, Vol. 3, No. 1, Wiley&Sons, (1999).
- [60] **Marini J. W.:** *Correction of Satellite Tracking Data for an Arbitrary Tropospheric Profile.* Radio Science, Vol. 7, No. 2, (1972).
- [60] **McCarthy D. D.:** *IERS Conventions (1996).* IERS Technical Note 21, Central Bureau of IERS, Observatory of Paris, France, (1996).
- [61] **Melchior P.:** *The Tides of the Planet Earth.* Pergamon Press, Oxford New York Toronto Sydney Paris Frankfurt, (1978).
- [62] **Mendes V. B.; Langley R.:** *Optimization of Tropospheric Delay Mapping Function Performance for High Precision Geodetic Application.* Proceedings of DORIS Days, Toulouse, France, (1998).
- [63] **Mertikas P. S.; Rizos C.:** *Online Detection of Abrupt Changes in the Carrier Phase Measurements of GPS.* Journal of Geodesy, No. 71, Springer Verlag, (1997).
- [64] **Mervart L.:** *Ambiguity Resolution Techniques in Geodetic and Geodynamic Applications of the Global Positioning System.* Inauguraldissertation, Philosophisch naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bern, (1995).
- [65] **Mikhail E. M.:** *Observations and Least Squares.* IEP-A Dun Donnelley Publisher, New York, (1976).
- [66] **Misra P.; Enge P.:** *Global Positioning System: Signals, Measurements and Performance.* Ganga-Jamuna Press, Lincoln, Massachusetts, USA, (2001).

- [67] **Montenbruck, O.; Gill, E.:** *Satellite Orbits: Models, Methods and Applications*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, (2001).
- [68] **Moritz H.:** *Geodetic Reference System 1984*. Bulletin Geodesique, Volume 58, No. 3, The Geodesists Handbook 1984, (1984).
- [69] **Moritz H.; Hofmann Wellenhof B.:** *Geometry, Relativity, Geodesy*. Wichmann Verlag GmbH, Karlsruhe, (1993).
- [70] **Mueller I.:** *Introduction to Satellite Geodesy*. Frederick Ungar Publishing, New York, (1964).
- [71] **Mueller I.:** *Reference Coordinate Systems for Earth Dynamics: A Preview*. In: E. M. Gaposchkin and B. Kolaczek (eds.): *Reference Coordinate Systems for Earth Dynamics*, Proceedings of IAU Colloquium 56, Sept. 8-12, 1980, Warsaw, Poland, (1980).
- [72] **Niell A. E.:** *Global Mapping Functions for the Atmosphere Delay at Radio Wavelengths*. Journal of Geophysical Research, Vol. 101, No. B2, (1996).
- [73] **NIMA:** *Department of Defense World Geodetic System 1984, its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems*. Technical Report TR8350.2, Third Edition, National Imagery and Mapping Agency, (1997).
- [74] **Odijk D.; van der Marel H.; Song I.:** *Precise GPS Positioning by Applying Ionospheric Corrections from an Active Control Network*. GPS Solutions, Vol. 3, John Wiley & Sons Inc., (2000).
- [75] **Parkinson B. W.:** *Introduction and Heritage of NAVSTAR, the Global Positioning System*. In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
- [76] **Remondi B.:** *Using the Global Positioning System (GPS) Phase Observable for Relative Geodesy: Modeling, Processing and Results*. Ph.D. dissertation, The University of Texas at Austin, (1984).
- [77] **Rizos C.:** *Principles and Practice of GPS Surveying*. Monograph 17, School of Geomatic Engineering, University of New South Wales, (1997).
- [78] **Rothacher M.; Schaer S.:** *GPS Auswertetechniken*. In Heck B. und Illner M. (red.): *GPS Leistungsbilanz 94, Beitrage zum 34. DVW Seminar am Geodaetischen Institut der Universitaet Karlsruhe*, Schriftenreihe 18/1995, Deutscher Verein fuer Vermessungswesen, (1995).
- [79] **Rothacher M.; Schaer S.; Mervart L.; Beutler G.:** *Determination of Antenna Phase Center Variations Using GPS Data*. Proceedings of the IGS Workshop, Potsdam, Germany, (1995).
- [80] **RTCM SC-104:** *RTCM Recommended Standards for Differential NAVSTAR GPS Service*. Radio Technical Commission for Maritime Services, Washington, USA, (1994).

- [81] **Saastamoinen J.:** *Contributions to the Theory of Atmospheric Refraction, Part II.* Bulletin Geodesique, 107, (1973).
- [82] **Schaer S.:** *Mapping and Predicting the Earth's Ionosphere Using the Global Positioning System.* Inauguraldissertation der Philosophisch naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bern, (1999).
- [83] **Schlueter W.:** *Zeit und Frequenz im Messverfahren der Geodäsie.* Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 337, Frankfurt am Main, (1988).
- [84] **Schneider M.:** *Satellitengeodäsie - Grundlagen.* Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG Wissenschaftsverlag, Mannheim Wien Zuerich, (1988).
- [85] **Schueler T.:** *On Ground-Based GPS Tropospheric Delay Estimation.* Dissertation, Fakultät fuer Bauingenieur- und Vermessungswesen, Universität der Bundeswehr Muenchen, Deutschland, (2001).
- [86] **Seeber, G.:** *Satellite Geodesy: Foundations, Methods and Applications.* Walter de Gruyter, Berlin, (2003).
- [87] **Sillard P.; Boucher C.:** *A Review of Algebraic Constraints in Terrestrial Reference Frame Datum Definition.* Journal of Geodesy, No. 75, Springer Verlag, (2001).
- [88] **Soler T.:** *A Compendium of Transformation Formulas Useful in GPS Work.* Journal of Geodesy, No. 72, Springer Verlag, (1998).
- [89] **Spilker J. J.:** *Tropospheric Effects on GPS.* In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): Global Positioning System: Theory and Applications, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
- [90] **Tapley, B. D.; Schutz, B. E.; Born, G. H.:** *Statistical Orbit Determination.* Elsevier Academic Press, (2004).
- [91] **Teunissen G. J. P.:** *A New Method for Fast Carrier Phase Ambiguity Estimation.* Proceedings of IEEE PLANS94, Las Vegas, NV, (1994).
- [92] **Teunissen G. J. P.:** *Quality Control and GPS.* In Teunissen G. J. P. and Kleusberg A. (eds.): GPS for Geodesy. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1996).
- [93] **Thornton C.; Bierman G.:** *UDU^T Covariance Factorization for Kalman Filtering.* Advances in Control of Dynamic Systems, Vol. XVI, Academic Press Series, London Orlando San Diego New York Austin Boston Sidney Tokyo, (1980).
- [94] **Van Dierendonck A. J.:** *GPS Receivers.* In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): Global Positioning System: Theory and Applications, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).

- [95] **Vaniček P.; Krakiwsky E.:** *Geodesy: The Concepts*. Elsevier, Amsterdam Lausanne New York Oxford Shannon Tokyo, Second Edition, 5th Printing 1995, (1986).
- [96] **Varner C.:** *DGPS Carrier Phase Networks and Partial Derivative Algorithms*. PhD dissertation, UCGE Report No. 20129, The University of Calgary, (2000).
- [97] **Vig J. R.:** *Quartz Crystal Resonators and Oscillators for Frequency Control and Timing Applications – A Tutorial*. U.S. Army Communications-Electronics Command SLCET-TR-88-1, (2001).
- [98] **Walker J. G.:** *Circular Orbit Patterns Providing Continuous Whole Earth Coverage*. Royal Aircraft Establishment, Technical Report TR-77044, (1977).
- [99] **Wang J.; Stewart M.; Tsakiri M.:** *Stochastic Modelling for Static GPS Baseline Data Processing*. Journal of Surveying Engineering, November 1998, (1998).
- [100] **Wanninger L.:** *Praezise Positionierung in regionalen GPS Referenzstationsnetzen*. Deutsche Geodaetische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 508, Muenchen, (2000).
- [102] **Welch G.; Bishop G.:** *An Introduction to Kalman Filter*. Technical Report TR-95-041, Department of Computer Science, University North Carolina at Chapel Hill, (1997).
- [103] **Wells D.; Beck N.; Delikaraoglou D.; Kleusberg A.; Krakiwsky J. E.; Lachapelle G.; Langley B. R.; Nakiboglu M.; Schwarz KP.; Tranquilla M. J.; Vaniček P.:** *Guide to GPS Positioning*. Canadian GPS Associates, Fredericton, N. B., Canada, (1986).
- [104] **Witchayangkoon B.:** *Elements of GPS Precise Point Positioning*. Ph.D. dissertation, The Graduate School, The University of Maine, (2000).
- [105] **Wuebbena G.:** *Zur Modellierung von GNSS Beobachtungen fuer die hochgenaue Positions-bestimmung*. Wissenschaftliche Arbeiten Fachrichtung Vermessungswesen an der Universitaet Hannover, Festschrift Prof. G. Seeber zum 60. Geburtstag, No. 239, Hannover, (2001).
- [106] **Xu, G.:** *GPS: Theory, Algorithms and Applications*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, (2007).
- [107] **Zumberge J. F.; Heflin B. M.; Jefferson C. D.; Watkins M. M.; Webb H. F.:** *Precise Point Positioning for the Efficient and Robust Analysis of GPS Data from Large Networks*. Journal of Geophysical Research, 102, No. B3, (1997).

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

528:629.783(075.8)

БЛАГОЈЕВИЋ, Драган, 1959-

Uvod u Satelitsku geodeziju / Dragan
Blagojević. - Beograd : Građevinski fakultet
Univerziteta, 2014 (Beograd : Dosije studio).
- XII, 210 str. : ilustr. ; 24 cm

Tiraž 50. - Bibliografija: str. 203-210.

ISBN 978-86-7518-167-5

a) Сателитска геодезија
COBISS.SR-ID 206350860