Универзитет у Београду – Грађевински факултет
www.grf.bg.ac.rs

Студијски програм: **ГРАЂЕВИНАРСТВО**

Модул: **ЗАЈЕДНИЧКЕ ОСНОВНЕ СТУДИЈЕ**

Година/Семестар: **I година / 2. семестар**

Назив предмета (шифра): **ТЕХНИЧКА МЕХАНИКА 2 (Б3о1т2)**

Наставник : **Станко Ћорић, Анина Глумац, Зоран Перовић**

Наслов предавања: **Предавање 06**

Датум : 18./19.03.2023.

Београд, 2024.

Динамика тачке

Материјална тачка - тело занемарљивих димензија које има одређену масу

Користи се као модел реалног објеката у оним проблемима динамике у којима димензије тела нису од значаја.

ДИНАМИКА материјалне тачке обухвата изучавање кретања таквих тела под утицајем сила које на њих делују.

Динамика тачке

2. NEWTON-ОВ ЗАКОН КРЕТАЊА

Промена количине кретања тела пропорционална је сили која делује на тело и врши се у правцу и смеру деловања силе.

КОЛИЧИНА КРЕТАЊА

материјалне тачке:

$$\vec{K} = m\,\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$$

$$\boxed{m\,\vec{a} = \vec{F}}$$

диференцијална једначина кретања слободне материјалне тачке

Динамика тачке

$$\boxed{m\,\vec{a} = \vec{F}}$$

$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ - убрзање тачке у односу на непокретни координатни систем

$\vec{F}$ - резултанта активних сила које делују на тачку

слободна мат. тачка

* Кретање материјалне тачке <u>у присуству веза</u>:

$$\boxed{m\,\vec{a} = \vec{F}_R}$$

$$\vec{F}_R = \vec{F} + \vec{R}$$

$\vec{R}$ - резултанта реакција уклоњених веза

Динамика тачке

Два проблема динамике материјалне тачке:

* Познато је кретање, треба одредити силе које то кретање изазивају.

* Познате су силе које делују на материјалну тачку, треба одредити кретање.

- **Интегранција диференцијалних једначина кретања** $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_R$

  \- почетни услови:

$$t = 0: \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0$$

$$\vec{v}(0) = \dot{\vec{r}}_0 = \vec{v}_0$$

$\Rightarrow$ **Коначна једначина кретања** $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Динамика тачке

Диференцијална једначина кретања материјалне тачке – скаларни облици

$$m\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_R$$

Декартове координате $Oxyz$

$$m\,\ddot{x} = F_x$$

$$m\,\ddot{y} = F_y$$

$$m\,\ddot{z} = F_z$$

Природне координате τ, n, b

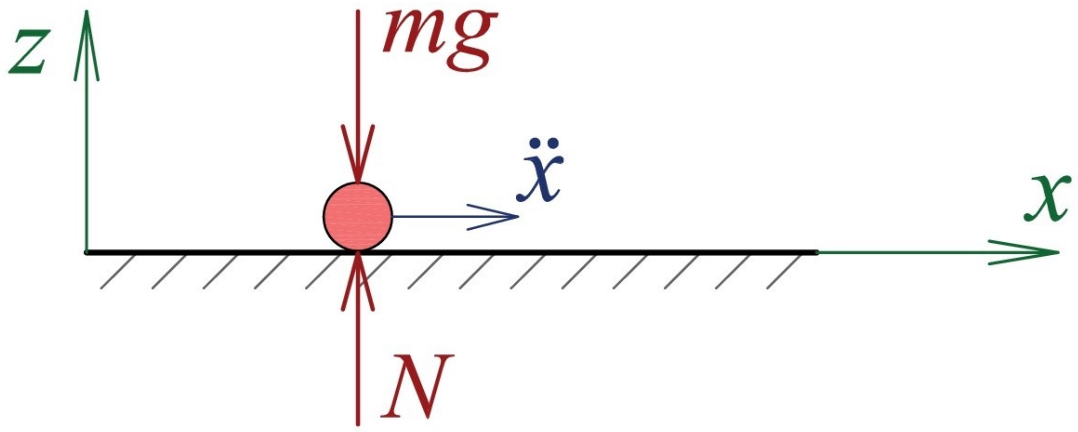
$$m\,\ddot{s} = F_\tau$$

$$m\,\frac{v^2}{\rho} = F_n$$

$$0 = F_b$$

Динамика тачке

Кретање мат.тачке по хоризонталној равни



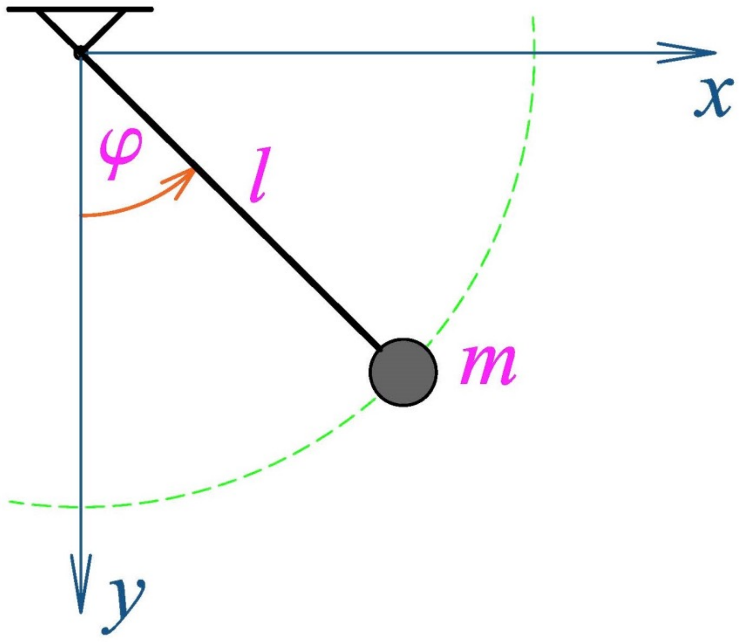
$$m\,\vec{a} = \vec{F}_R$$

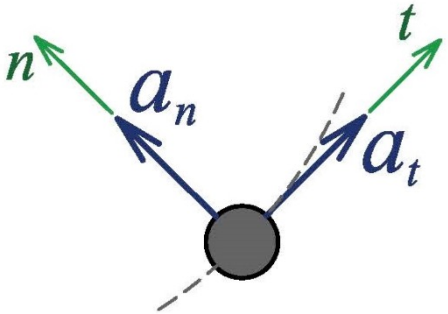
$$x: \quad m\,\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = C_1 \quad \Rightarrow \quad x = C_1 t + C_2$$

$$z: \quad 0 = N - mg \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

Динамика тачке

Математичко клатно у вертикланој равни



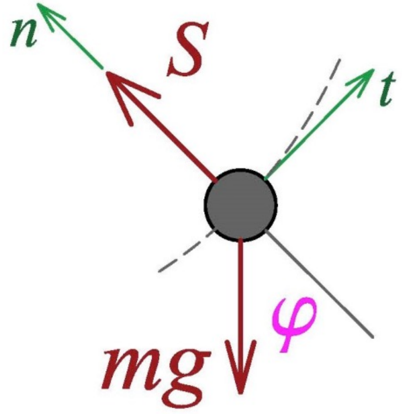


тангенцијално убрзање

$$a_t = \dot{v} = \ddot{\varphi} l$$

нормално убрзање

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{(\dot{\varphi} l)^2}{l} = \dot{\varphi}^2 l$$



mg - сопствена тежина

S - сила у ужету

Математичко клатно у вертикланој равни

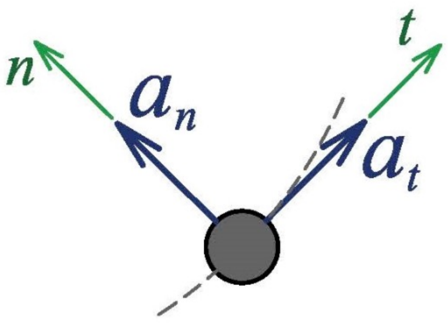
$$m\,\vec{a} = \vec{F}_R$$

$$t:\quad m\,\ddot{\varphi} l = -mg\sin\varphi$$

$$n:\quad m\,\dot{\varphi}^2 l = S - mg\cos\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

$$S = m\,\dot{\varphi}^2 l + mg\cos\varphi$$

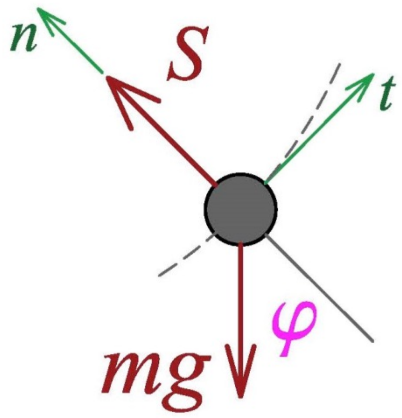


тангенцијално убрзање

$$a_t = \dot{v} = \ddot{\varphi} l$$

нормално убрзање

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{(\dot{\varphi} l)^2}{l} = \dot{\varphi}^2 l$$

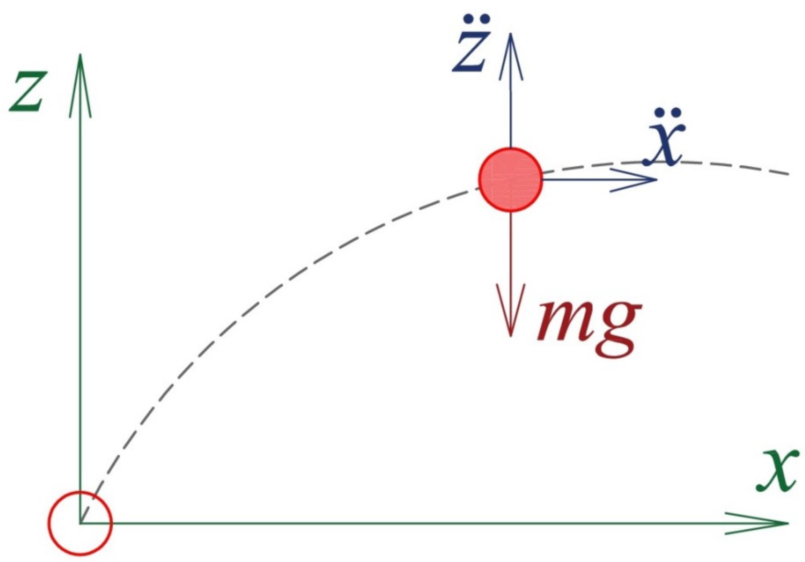


mg - сопствена тежина

S - сила у ужету

Динамика тачке

Коси хитац у безваздушном простору



$$m\,\vec{a} = \vec{F}_R$$

$$x: \quad m\,\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0$$

$$\dot{x} = C_1$$

$$x = C_1 t + C_2$$

$$z: \quad m\,\ddot{z} = -mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = -g$$

$$\dot{z} = -gt + C_3$$

$$z = -\frac{1}{2}\,gt^2 + C_3 t + C_4$$

Коси хитац у безваздушном простору

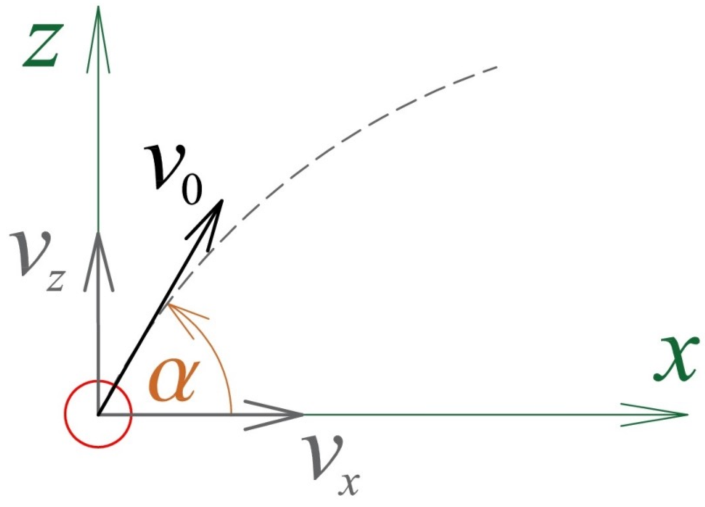
- почетни услови:

$$x(0) = 0$$

$$z(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$$

$$\dot{z}(0) = v_0 \sin\alpha$$



$$\dot{x} = C_1$$

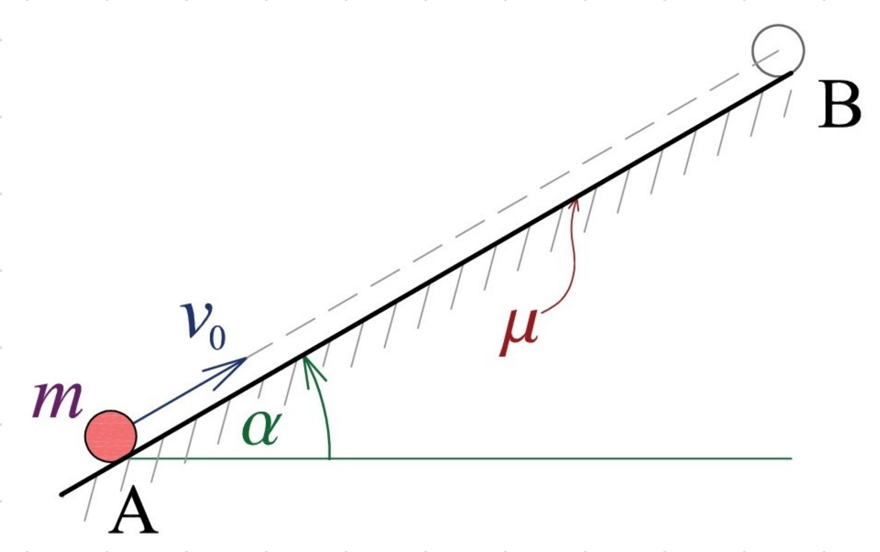
$$x = C_1 t + C_2$$

$$\dot{z} = -gt + C_3$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_4$$

Пример: Кретање тачке уз стрму раван

Приказана материјална тачка масе m креће се у вертикалној равни по храпавој стрмој равни, коефицијента трења μ нагиба према α хоризонтали. У почетном тренутку је тачки задата брзина v_0. Одредити место и време где ће се тачка зауставити.



Пример: Кретање тачке уз стрму раван

ОПШТИ ЗАКОНИ ДИНАМИКЕ ТАЧКЕ

- њихова примена омогућава решавање одређених проблема динамике тачке без допунске интеграције диференцијалних једначина (зато што је то урађено при њиховом извођењу).

*** Закон о промени количине кретања**

*** Закон о промени момента количине кретања**

*** Закон о промени кинетичке енергије**

Закон о промени количине кретања

КОЛИЧИНА КРЕТАЊА

материјалне тачке:

$$\vec{K} = m\,\vec{v}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}}$$

основни облик

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F} \;\Big|\cdot dt$$

$$d\vec{K} = \vec{F}\,dt$$

$$d\vec{I} = \vec{F}\,dt$$

елемантарни импулс

$$\boxed{d\vec{K} = d\vec{I}}$$

диференцијални облик

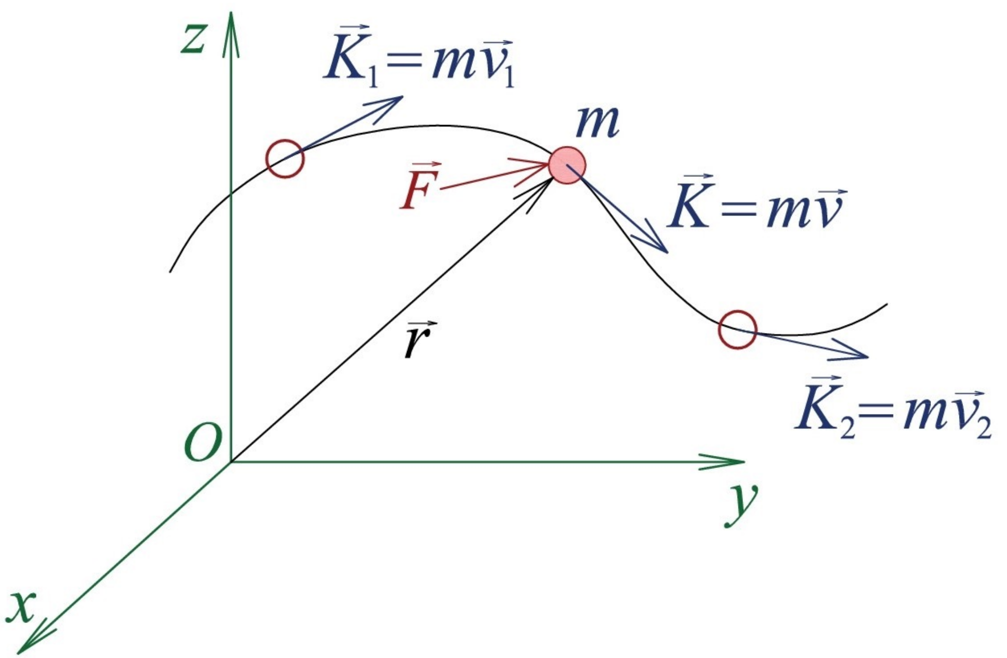
Динамика тачке

Закон о промени количине кретања

$$d\vec{K} = \vec{F}dt \;\Big|\cdot \int_{t_1}^{t_2}$$

$$\boxed{\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{I}}$$

интегрални облик



импулс силе
у временском
интервалу $[t_1, t_2]$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

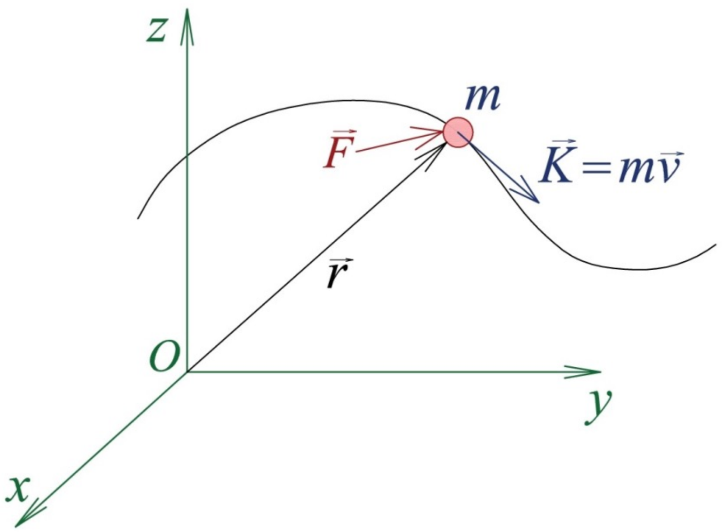
Динамика тачке

Закон о промени момента количине кретања

МОМЕНАТ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА

материјалне тачке:

$$\vec{D}^{(O)} = \vec{r}\times\vec{K} \quad = \vec{r}\times m\,\vec{v}$$



$$\frac{d\vec{D}^{(O)}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times m\,\vec{v} + \vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{D}^{(O)}}{dt} = \underbrace{\vec{v}\times m\,\vec{v}}_{=0} + \vec{r}\times m\,\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{D}^{(O)}}{dt} = \vec{r}\times m\,\vec{a}$$

$\vec{M}^{(O)}$ - моменат силе у односу на тачку O

$$\boxed{\frac{d\vec{D}^{(O)}}{dt} = \vec{M}^{(O)}}$$

основни облик

Динамика тачке

Закон о промени момента количине кретања

$$\frac{d\vec{D}^{(O)}}{dt} = \vec{M}^{(O)} \quad \Big| \cdot dt$$

$$d\vec{D}^{(O)} = \vec{M}^{(O)}\,dt$$

$$d\vec{H}^{(O)} = \vec{M}^{(O)}dt = \vec{r}\times\vec{F}dt = \vec{r}\times d\vec{I}$$

елемантарни импулсни моменат

$$\boxed{d\vec{D}^{(O)} = d\vec{H}^{(O)}}$$

диференцијални облик

$$d\vec{D}^{(O)} = d\vec{H}^{(O)} \quad \Big| \cdot \int_{t_1}^{t_2}$$

$$\boxed{\vec{D}_2^{(O)} - \vec{D}_1^{(O)} = \vec{H}^{(O)}}$$

интегрални облик

моментни импулс силе у интервалу $[t_1, t_2]$

$$\vec{H}^{(O)} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}\times\vec{F}dt$$

Овај закон је значајан код динамике крутог тела

Динамика тачке

Закон о промени кинетичке енергије

КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА

материјалне тачке:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\vec{v}\right)^2$$

ЕЛЕМЕНТАРНИ РАД

силе:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad | \cdot d\vec{r}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$m\, \vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$d\left(\frac{1}{2} m (\vec{v})^2\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{dT = dA}$$

диференцијални облик

Динамика тачке

Закон о промени кинетичке енергије

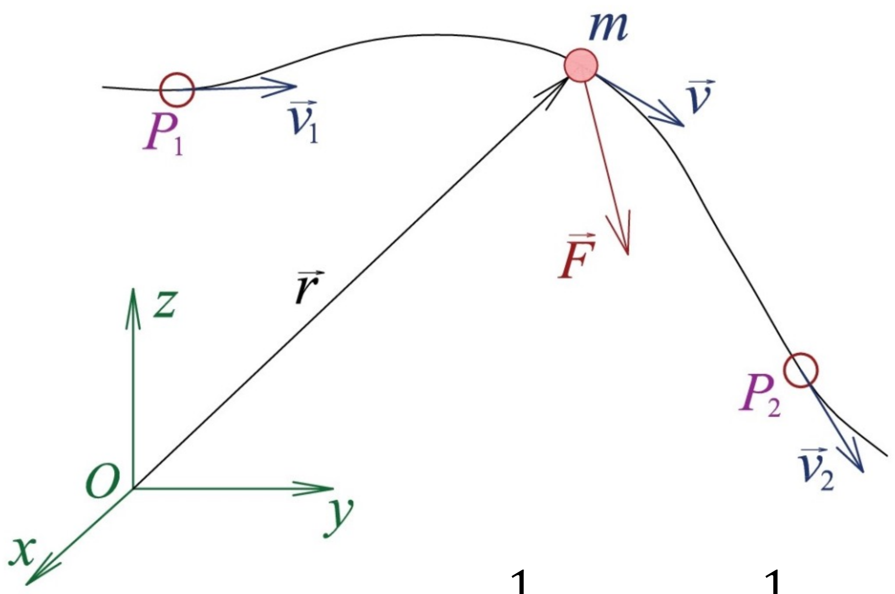
$$dT = dA \quad \Big| \cdot \int_{t_1}^{t_2}$$

$$\boxed{T_2 - T_1 = A_{1-2}}$$

интегрални облик

коначан рад силе на путу из положаја (1) у положај (2)

$$A_{1-2} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



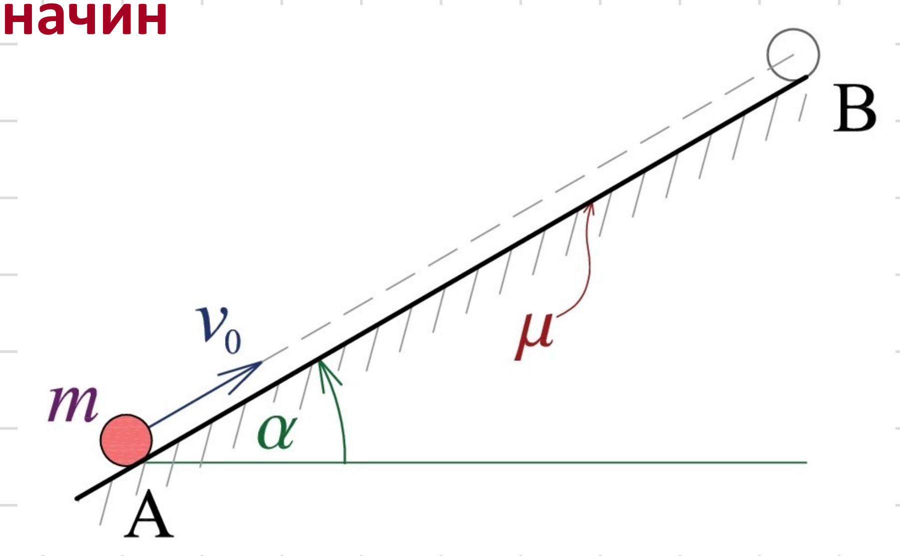
$$\frac{1}{2} m \, (\vec{v}_2)^2 - \frac{1}{2} m \, (\vec{v}_1)^2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Разлика кинетичких енергија мат.тачке између завршног (P_2) и почетног (P_1) положаја, једнака је раду силе која делује на тачку при њеном кретању дуж путање из положаја P_1 у положај P_2.

Пример: Кретање тачке уз стрму раван

Приказана материјална тачка масе m креће се у вертикалној равни по храпавој стрмој равни, коефицијента трења μ нагиба према α хоризонтали. У почетном тренутку је тачки задата брзина v_0. Одредити место и време где ће се тачка зауставити.

2.начин



Пример: Кретање тачке уз стрму раван

Конзервативне силе

коначан рад силе на путу из положаја (1) у положај (2)

$$\mathrm{A}_{1-2} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Елементарни рад силе:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

У општем случају, укупан извршен рад зависи од путање по којој се тачка креће.

Међутим, у посебном случају коначан рад силе <u>не зависи од путање </u>по којој се тачка креће. Силе са том особином се називају КОНЗЕРВАТИВНЕ СИЛЕ.

СИЛЕ СУ **КОНЗЕРВАТИВНЕ** УКОЛИКО ЊИХОВ КОНАЧАН РАД НЕ ЗАВИСИ ОД ПУТАЊЕ, ВЕЋ САМО ОД ПОЛОЖАЈА ПОЧЕТНЕ И КРАЈЊЕ ТАЧКЕ.

Динамика тачке

Конзервативне силе

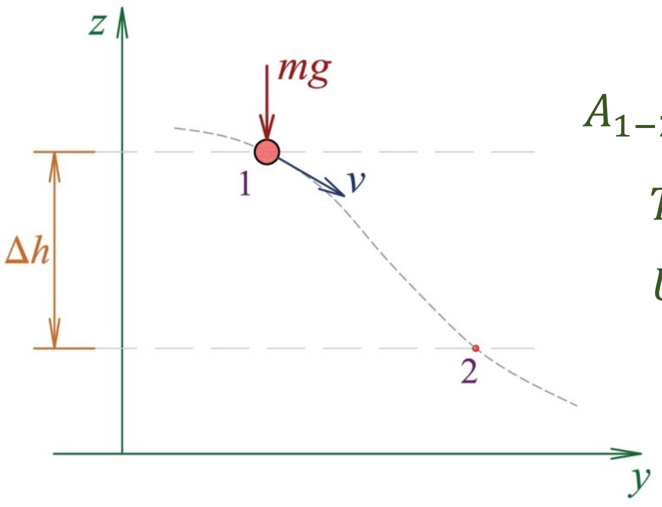
$$A_{1-2} = \int_{(1)}^{(2)} dA = -\int_{(1)}^{(2)} dU = U_1 - U_2$$

где функција $U = U(x, y, z)$ представља <u>понтенцијал силе</u>

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

Сила Земљине теже

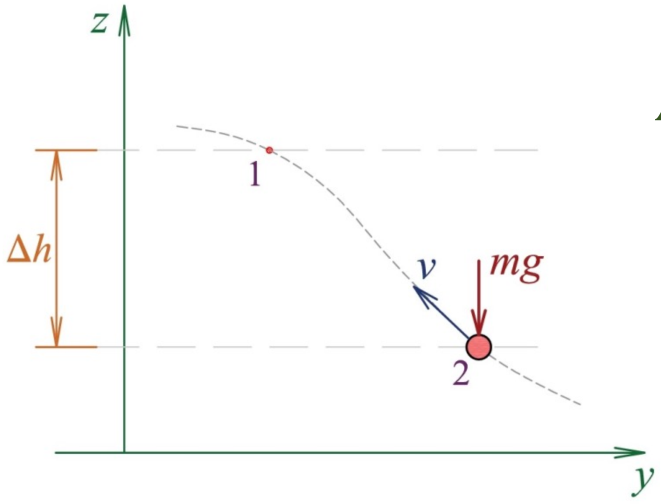
је конзервативна сила.



$$A_{1-2} = mg\Delta h > 0$$

$$T_2 > T_1$$

$$U_2 < U_1$$



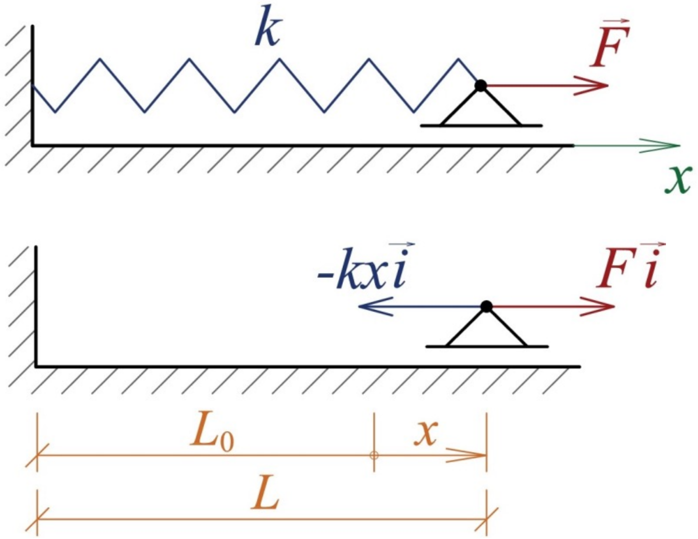
$$A_{2-1} = -mg\Delta h < 0$$

$$T_2 < T_1$$

$$U_2 > U_1$$

Динамика тачке

Сила у еластичној опрузи



Дефинисана је са:
- правцем опруге
- коефицијентом крутости **k**
- дужинином у ненапрегнутом стању

Сила у опрузи делује на чворове на њеним крајевима.

Смер силе у опрузи је такав да тежи да врати опругу у непарегнуто стање.
То је реституциона сила.

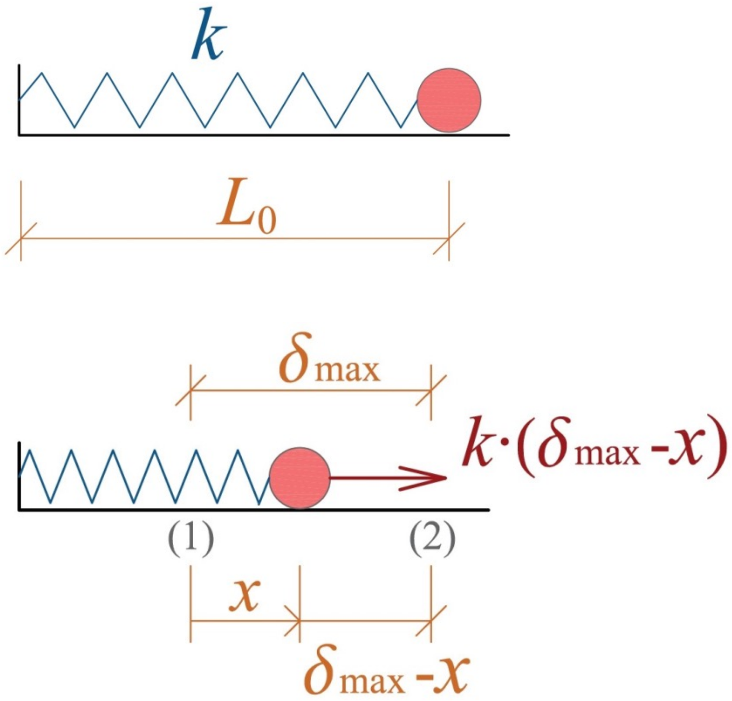
$$F_{op} = kx$$

Коефицијент крутости еластичне опруге је сила која је потребна
да се изврши јединично померање опруге у односу на ненапрегнуту дужину.

Интезитет силе је линеарно пропорционалан са померањем.

Динамика тачке

Рад силе у опрузи



$$A_{1-2} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad = \int_{(1)}^{(2)} k \cdot (\delta_{max} - x) \cdot dx =$$

$$= \int_{0}^{\delta_{max}} k \cdot \delta_{max} \cdot dx - \int_{0}^{\delta_{max}} k \cdot x \cdot dx =$$

$$= k \cdot \delta_{max} \cdot x \Big|_{0}^{\delta_{max}} - k \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{\delta_{max}} =$$

$$= k \cdot \delta_{max}^2 - \frac{1}{2} k \cdot \delta_{max}^2 \quad = \frac{1}{2} k \cdot \delta_{max}^2$$

$$\boxed{A_{1-2} = \frac{1}{2} k \cdot \delta_{max}^2}$$