Грађевински факултет Универзитета у Београду 7.2.2024.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име: Број индекса:

1. Дефинисати инверзну матрицу. Одредити инверзну матрицу матрице $A = [a_{ij}]$ реда 3, дате са: $a_{ij} = 4,\ i \geq j$ и $a_{ij} = 0,\ i < j$. (2)

Дефиниција 2.20 на страни 64.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

2. Дефинисати појам базе и димензије векторског простора. Дати пример реалног векторског простора димензије 2024 различитог од $\mathbb{R}^{2024}$. Да ли су ови простори изоморфни? (2)

Дефиниције 2.35 на страни 77 и 2.36 на страни 79.
Векторски простор реалних матрица димензије 4×506, или неки други простор по избору.
Простори су изоморфни будући да имају исту (коначну) димензију (Последица 2.3 на страни 81).

3. Дефинисати појам еуклидског векторског простора и дати један пример. (1)

Дефиниција 2.48 на страни 96.
На пример векторски простор $\mathbb{R}^3$ са стандардним скаларним производом

$$\langle u, v\rangle = u^T \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

4. Формулисати теорему Коши-Шварц-Буњаковског и потврдити њено важење избором два вектора $u, v \in \mathbb{R}^5$ (са стандардним скаларним производом у $\mathbb{R}^5$). (2)

Теорема 2.30 на страни 97. Одаберимо два вектора у $\mathbb{R}^5$, нпр.

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. За овај избор имамо, $|\langle u, v\rangle| = |-2| = 2 < ||u|| \cdot ||v|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} = 9.$

5. Дефинисати лимес низа, а затим написати по дефиницији $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$. (2)

Дефиниције 4.3 на страни 159 и 4.5 на страни 160.

6. Дати пример парне функције дефинисане на $\mathbb{R}$ која има прекид прве врсте у тачки $x_1 = 1$, прекид друге врсте у тачки $x_2 = 2$ и нема извод у тачки локалног минимума $x_3 = 3$. Скицирати график одабране функције. (2)

Слични примери рађени су на предавањима. Бирамо што простију функцију, при чему пазимо на парност, која задовољава тражене услове. На пример,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & |x| \le 1, \\ \dfrac{1}{2 - |x|}, & 1 < |x| < 2, \\ |3 - |x||, & |x| \ge 2. \end{cases}$$

7. Дефинисати извод функције. Затим одредити по дефиницији извод функције $f(x) = 1/x$. (2)

Дефиниција 6.1 на страни 214. Према дефиницији

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

8. Формулисати Ролову теорему. (1)

Теорема 6.7 на страни 225.

9. Формулисати теорему о ортогоналним операторима (без доказа), а затим показати да сваки ортогоналан оператор $L : V \to V$ чува интензитет вектора, тј. $\|L(x)\| = \|x\|$, за све $x \in V$. (3)

Теорема 2.34 на страни 103.
Према исказу теореме, за све $x \in V$ важи

$$\langle x, x\rangle = \langle L(x), L(x)\rangle, \text{ одакле је } \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\langle L(x), L(x)\rangle} = \|L(x)\|.$$

10. Формулисати и доказати Кошијеву теорему о средњој вредности. (3)

Теорема 6.11 на страни 229.