

Marko V. Ivetić

Računska hidraulika
Tečenje u cevima

Beograd, 1996.

Dr Marko V. Ivetić, dipl.inž.
vanredni profesor

Računska hidraulika Tečenje u cevima

Recenzenti: prof. Dr Božidar Batinić, dipl.inž.,
prof. Dr Čedo Maksimović, dipl.inž.

Prvo izdanje odobreno za štampu na osnovu odluke Veća katedara za hidrotehniku na sednici održanoj 25. juna 1995. godine.

Izdavač: Gradjevinski fakultet Univerziteta u Beogradu,
Bulevar Kralja Aleksandra 73/I
Glavni i odgovorni urednik: prof. Dr Branislav Ćori,
dipl.inž.

Prelom teksta: Marko Ivetić
Slike: Vladimir Janković i Marko Ivetić
Korice: Application Apple Center
CIP — Katalogizacija u publikaciji
Napodna biblioteka Srbije, Beograd
621.643/.646(075.8)
Ivetić, Marko V.
Računska hidraulika – Tečenje u cevima/
Marko V. Ivetić; [slike Vladimir Janović i
Marko V. Ivetić].- Beograd: Gradjevinski fakul-
tet Univerziteta u Beogradu, 1996 (Beograd:
Čugura Trade). – XIV, 306 str.: graf. prikazi;
24 cm
Tiraž 500. – Bibliografija uz sva poglavlja.
– Registar.
ISBN 86-80049-38-7 532.542(075.8)
621.65/.69(075.8)
a) Cevovodi - proračun b) Hidraulika c) Pumpe
ID = 45154060

Sadržaj

1	Uvod	13
1.1	Metode rešavanja hidrauličkih problema	13
1.2	Matematički modeli	16
1.3	Opšti principi numeričkog modeliranja	17
1.4	Približno rešavanje običnih diferencijalnih jednačina	19
1.4.1	Numeričko diferenciranje	20
1.5	Osobine numeričkih modela	26
1.5.1	Konvergencija i stabilnost numeričkog postupka	27
1.5.2	Konsistentnost	30
1.5.3	Tačnost	31
2	Ustaljeno tečenje u cevima	33
2.1	Osnovne pretpostavke	34
2.2	Osnovne jednačine	35
2.2.1	Jednačina održanja mase (jednačina kontinuiteta)	35
2.2.2	Jednačina održanja količine kretanja	36
2.2.3	Koeficijent trenja λ	39
2.2.4	Lokalni otpori u cevima	43
2.2.5	Moguće greške kod procene gubitka energije	44
2.3	Formiranje sistema jednačina za cevnu mrežu	46
2.3.1	Proticaji u cevima kao nepoznate veličine	47
2.3.2	Π - kote u čvorovima kao nepoznate veličine	50
2.4	Posebni elementi mreže	58
2.4.1	Hidranti i prskači	58
2.4.2	Pumpe	61

3	Opšte o neustaljenom tečenju u cevima	67
3.1	Matematički modeli	67
3.2	Matematički model kvazi-ustaljenog tečenja	68
3.3	Matematički model krutog udara	72
3.4	Matematički model elastičnog udara (hidraulički udar)	73
3.4.1	Promena pritiska i pijezometarske kote	75
3.4.2	Brzina prostiranja poremećaja	76
3.5	Matematički modeli oscilatornog kretanja i vibracija	79
3.6	Granice važenja pojedinih modela	80
4	Oscilacije tečnosti u cevima	83
4.1	Uspostavljanje ustaljenog tečenja	83
4.2	Oscilacije tečnosti u cevi konstantnog poprečnog preseka	85
4.2.1	Oscilacije bez trenja	86
4.2.2	Oscilacije tečnosti sa trenjem	88
4.3	Oscilacije tečnosti u spojenim rezervoarima	91
4.3.1	Opšte o numeričkim modelima krutog udara	98
5	Vodostani	101
5.1	Osnovne jednačine	103
5.1.1	Numerički model	107
5.2	Stabilnost rada vodostana	112
5.2.1	Vodostan sa prigušivačem	120
5.2.2	Diferencijalni vodostan	124
5.2.3	Napomene za projektovanje	125
6	Hidraulički udar	129
6.1	Opis pojave	129
6.2	Osnovne jednačine	132
6.2.1	Dinamička jednačina	133
6.2.2	Jednačina kontinuiteta	136
6.2.3	Osobine jednačina matematičkog modela	141
6.3	Pojednostavljene jednačine	142
7	Metoda karakteristika	145
7.1	Osnovne jednačine u formi karakteristika	146

7.2	Numerički model	149
7.3	Tačnost	152
7.3.1	Uticaoaj trenja	154
7.4	Osnovni granični uslovi	159
7.4.1	Rezervoar, odnosno, zadat nivo na kraju cevi	159
7.4.2	Zadat proticaj	160
7.4.3	Zatvarač na (nizvodnom) kraju cevi	161
7.4.4	Čvorovi - spojevi dve ili više cevi	164
7.4.5	Zatvarač u čvoru	167
7.5	Varijante metode karakteristika	172
7.5.1	Metoda karakteristika sa interpolacijama po prostoru	172
7.5.2	Metoda karakteristika sa interpolacijama po vremenu	177
7.6	Druge metode za analizu hidrauličkog udara	180
7.6.1	Kompaktna implicitna metoda visoke tačnosti	180
8	Pumpe i prelazni režimi	187
8.1	Opšte o pumpama	187
8.1.1	Vrste pumpi	187
8.2	Teorijske osnove turbomašina	188
8.2.1	Jednačina održanja momenta količine kretanja	188
8.2.2	Koeficijenti pumpe	193
8.3	Izbor pumpi	199
8.3.1	Spregnuti rad više pumpi - crpne stanice	201
8.3.2	Ograničenja sa usisne strane - kavitacija	202
8.4	Pumpe kao granični uslovi	205
8.5	Karakteristike pumpe u četiri kvadranta	208
8.6	Ispad pumpe iz pogona	214
8.6.1	Jednačine	215
8.6.2	Klapne	219
8.6.3	Moment inercije pumpe i motora	224
8.7	Start pumpe	225
8.8	Dodatne jednačine i uslovi	226
9	Zaštita od hidrauličkog udara	231
9.1	Uvod	231
9.2	Uzroci hidrauličkog udara	233

9.2.1	Primeri iz prakse	234
9.3	Osnovni principi zaštite	235
9.3.1	Definisanje zakona zatvaranja zatvarača	236
9.4	Smanjivanje brzine prostiranja talasa	236
9.4.1	Uticao slobodnog i rastvorenog vazduha na promenu brzine prostiranja talasa u tečnosti	237
9.5	Uticao suspendovanih čestica na brzinu propagacije talasa	241
9.6	Kavitacija u prelaznim režimima	244
9.6.1	Pojednostavljena analiza ponašanja kaviteta u cevi	245
9.6.2	Kavitet kao granični uslov	246
9.7	Vodostan kao granični uslov	248
9.7.1	Jednosmerni vodostan	253
9.8	Vazдушna komora	253
9.9	Vazdušni ventili	257
9.9.1	Dimenzionisanje vazдушnih ventila	259
9.10	Rasteretni ventili	260
9.11	Obilazni vodovi	263
9.12	Završne napomene	264
10	Oscilatorno kretanje i vibracije	267
10.1	Osnovne jednačine	269
10.2	Prinudne oscilacije i analiza frekventnog odziva	274
10.2.1	Osnovni granični uslovi	275
10.2.2	Primeri	281
10.3	Druge metode za analizu oscilatornog kretanja	287
11	Regulacione karakteristike zatvarača	293
11.1	Uvod	293
11.2	Regulacija proticaja	294
11.3	Osnove	294
11.3.1	Konstruktivne karakteristike regulacionih zatvarača	296
11.3.2	Veza između promene proticaja i manevra zatvarača	298
11.3.3	Vreme odgovora sistema na akciju zatvarača	303
11.4	Kontrola pritiska	303
11.5	Primeri primene regulacionih zatvarača	305
11.5.1	Zatvarači u crpnim stanicama	305

11.5.2 Auto regulacija	307
11.6 Prelazni režimi izazvani manevrima zatvarača	308
11.7 Napomene o automatskoj regulaciji	309
A Stabilnost numeričkog modela oscilacija vodostana	315
B Vremenski i frekventni domen	319
B.1 Prikazivanje periodičnih veličina funkcijama kompleksne promenljive	319
B.2 Furijeova transformacija	323
B.2.1 Konvolucija i korelacija	324
B.2.2 Funkcija spektralne gustine	326
B.3 Diskretna Furijeova transformacija	326

Predgovor

Predgovor

Ova knjiga je prvenstveno namenjenima studentima redovne i poslediplomske nastave Odseka za hidrotehniku Gradjevinskog fakulteta u Beogradu, a očekujem da bi mogla biti od koristi i studentima drugih fakulteta i inženjerima (prvenstveno projektantima) hidrotehničke, mašinske i drugih struka koji se bave problemima transporta i distribucije fluida kroz magistralne cevovode i mreže pod pritiskom. Sadržaj knjige odgovara programu Hidraulike 2 na trećoj godini hidrotehničkog odseka Gradjevinskog fakulteta u Beogradu, i programu Računske hidraulike na Poslediplomskim studijama, a proširen je materijalom koji može biti koristan projektantima.

Velike uzore za ovu knjigu predstavljaju knjige objavljene u svetu (Parmakian, 1963, Wylie & Streeter, 1978, Chaudhry, 1982, i druge), koje se mogu naći u spiskovima literature na krajevima svakog poglavlja, a ipak, ova knjiga knjiga ne liči ni na jednu od njih. Obaveza da u svojoj, evo već, dvadesetogodišnjoj praksi odgovorim na sva pitanja kolega projektanata velikih i malih sistema pod pritiskom, koji su u proteklom periodu radjeni kod nas i u svetu, naterala me je da pročitam mnogo toga, naučim ponešto, i da stvorim sopstveni okvir za sistematizaciju znanja i stečenog iskustva o problemima tečenja u cevima, u prvom redu, o zaštiti od hidrauličkog udara. Obaveza da sve to približim studentima hidrotehničke na redovnim i poslediplomskim studijama, konačno je uobličila ovu knjigu.

Knjiga je podeljena u jedanaest poglavlja i dva priloga. U prvom poglavlju date se uvodne napomene o Računskoj hidraulici, matematičkim i numeričkim modelima. U drugom poglavlju obradjeno je ustaljeno tečenje i dat je pregled matematičkih i numeričkih modela za ustaljeno tečenje u cevima mrežama. Treće, četvrto i peto poglavlje obradjuju modele kvazi-ustaljenog tečenja i krutog udara, sa posebnim osvrtom na proučavanja oscilacija u vodostan-

ima. Matematički i numerički model hidrauličkog udara obradjeni su u šestom i sedmom poglavlju. U osmom poglavlju date su osnovne postavke za proučavanje rada pumpi u ustaljenom u neustaljenom tečenju. U devetom poglavlju objašnjena je metodologija zaštite od hidrauličkog udara. Deseto poglavlje obradjuje model oscilatornog kretanja i vibracija, a jedanaesto, regulacione karakteristike zatvarača.

Na kraju, pored zahvalnosti svima onima koji su se sa svojim problemima obratili baš meni za stručni savet i tehničko rešenje, pomenuo bih još nekog ko je doprineo da se ova knjiga pojavi u ovakvom obliku. Zahvalan sam studentima koji su mi pokazali da je ovo moguće savladati za manje vremena i sa manje teškoća nego što je to meni trebalo i time pokazali da moj pedagoški trud nije bio uzaludan. Zahvalan sam porodici, kolegama i prijateljima koji su imali razumevanja za ovo što radim. Zahvalan sam i svojim profesorima Georgiju Hajdinu, Mladenu Boreliju, Zvonimiru Janežiću, Jošiaki Ivasi, pokojnom kolegi Miodragu Radojkoviću i starijim kolegama, Dušanu Obradoviću i Kazuji Inoeu, od kojih sam mnogo naučio o Računskoj hidraulici i matematičkom modeliranju, Čedi Maksimoviću i Božidaru Batiniću, recenzentima, na pažljivom čitanju i korisnim sugestijama, kao i na korisnim sugestijama mlađjih kolega, Dubravke Pokrajac i Miloša Nedeljkovića.

Štampanje ove knjige pomogli su JKP Beogradski vodovod i kanalizacija, Institut "Jaroslav Černi", Rudarski institut Beograd, RBN Bor, Hidroprojekat-Hidrotehnika Beograd, i drugi, na čemu sam im zahvalan.

Marko V. Ivetić
Beograd, decembar 1995.

Spisak oznaka

Prikazane su samo oznake koje se koriste u više poglavlja uglavnom sa istim značenjem. Ostale oznake koje se manje koriste objašnjene su na mestima gde se prvi put javljaju.

A	površina poprečnog preseka cevi
A_V	površina horizontalnog preseka vodostana
a	brzina prostiranja elastičnog talasa u cevi
A, B	konstante u jednačini pumpe $H_P = H_0 + AQ^2 + BQ$
B	karakteristika cevi u modelu hidrauličkog udara $\left(= \frac{a}{Ag} \right)$
C_τ	koeficijent tangencijalnog napona između fluida i zida cevi
C^+, C^-	oznake za pozitivnu i negativnu karakteristiku
CM, CP	oznake za veličine sa prethodnog vremenskog trenutka u metodi karakteristika
C_Q	koeficijent proticaja
Cr	Kurantov (<i>Courant</i>) broj
D	prečnik cevi (ukoliko se posebno ne naglasi, misli se na unutrašnji prečnik)
E	Ukupna energija (potencijalna + kinetička) u preseku fluidne struje u metrima (energija po jedinici težine fluida)
ΔE	gubitak energije (po jedinici težine) u Bernulijevoj jednačini
E	Jangov modul elastičnosti
f	frekvencija
G	sila težine pijezometarske kote

g	gravitaciona konstanta
G_x	komponenta sile težine u pravcu strujanja
$G_{\Pi}(f)$	funkcija spektralne gustine oscilatorne promene
H_P	visina dizanja (napor) pumpe
H_T	pad turbine
H_0	koeficijent u jednačini pumpe $H_P = H_0 + AQ^2 + BQ$
H_0	promena piježometarske kote izazvano trenutnim zatvaranjem zatvarača prema teoriji Žukovskog $\left(= \frac{aV_0}{g} \right)$
I	polarni moment inercije rotirajućih delova pumpe i motora
i, j	kao indeksi, označavaju brojeve čvorova ili preseka na cevi
K	zapreminski modul stišljivosti
$(k), (k + 1)$	kao eksponenti, označavaju brojeve iteracija
k/D	relativna hrapavost zida cevi
L	dužina cevi
m	masa
m	politropski koeficijent u jednačini stanja gasa
N	brzina obrtanja pumpe [ob/min]
$n, n + 1$	kao eksponenti, označavaju vremenske nivoe u numeričkom modelu
$NPSH$	usisna visina pumpe (<i>net positive suction head</i>)
N_S	specifična brzina pumpe, koeficijent brzohodosti
O	okvašeni obim cevi
p	pritisak
P	sila pritiska
$p/(\rho g)$	visina pritiska
Q_V, Q_K	zapreminski proticaj koji ulazi u vodostan ili komoru
$Q_{i,j}$	zapreminski proticaj kroz cev koja spaja čvorove i i j
$Q_{i,j}$	čvorna potrošnja u čvoru i
Q_m	proticaj mase vazduha
Q_{∞}	proticaj u ustaljenom tečenju
q	bezdimezionalni proticaj
r_{ij}	parametar cevi u modelu ustaljenog i kvazi ustaljenog tečenja $\left(= \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2gA^2} \right)$

Re	Rejnoldsov (<i>Reynolds</i>) broj $\left(= \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu} \right)$
$Re[Z]$	realni deo kompleksnog broja Z
S_P	snaga pumpe
$\sin \alpha$	nagib cevi, α je ugao koji osa cevi zaklapa sa horizontalom
T	sopstvena perioda oscilovanja stuba tečnosti
T	hidraulički moment pumpe
T	sila trenja ($= \tau OL$)
t	vreme
Δt	vremenski priraštaj konačne dužine
T_0	karakteristično vreme ubrzavanja stuba tečnosti
V	srednja brzina fluida u poprečnom preseku cevi ($= Q/A$)
V	zapremina
V_a	zapremina vazduha u vazdušnoj komori
x	rastojanje duž osovine cevi
Δx	dužina konačno velike deonice cevi kod diskretizacije po prostoru
δx	dužina elementarne deonice cevi
Z	kota nivoa vode, visinska kota tačke
Z_V	kota nivoa vode u vodostanu
Z^*	amplituda oscilacija nivoa tečnosti u cevi konstantnog preseka ili u vodostanu uz zanemarenje trenja
$\varepsilon_Q, \varepsilon_\Pi$	veoma mala veličina, odstupanje od tačne vrednosti
η	stepen korisnosti pumpe
θ	stepen interpolacije po prostoru; odgovara Kurantovom broju kod kompaktne implicitne metode $\left(= \frac{a \Delta t}{\Delta x} \right)$
λ	Darsi-Vajsbahov koeficijent trenja ($= 4 C_\tau$)
λ_e	efektivni koeficijent trenja kojim su obuhvaćeni i lokalni gubici
μ	dinamički koeficijent viskoznosti
μ	Poasonov koeficijent poprečne dilatacije
ν	kinematički koeficijent viskoznosti
ξ_Z	koeficijent lokalnog gubitka energije na zatvaraču
ξ_{PR}	koeficijent lokalnog gubitka energije na prigušivaču vodostana ili vazdušne komore
Π	pijezometarska kota

$\Delta\Pi$	promena pijezometarske kote izazvana promenom brzine fluida ΔV prema teoriji Žukovskog ($= \frac{a\Delta V}{g}$)
ρ	gustina fluida
τ_Z	Stepen otvorenosti zatvarača ($A/A_{Z,0}$), odnosno, bezdimenzionalno prikazan hod zatvarača
τ_{ij}	tangencijalni napon između fluida i zida cevi
ω	faktor nadrelaksacije
ω	ugaona brzina obrtanja pumpe
$\frac{\partial V}{\partial t}$	parcijalni izvod neke veličine po nezavisno promenljivoj t (ovde, lokalna komponenta materijalnog izvoda brzine)
$\frac{dV}{dt}$	običan izvod brzine
$\frac{DV}{Dt}$	materijalni izvod brzine ($= \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}$)

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Metode rešavanja hidrauličkih problema

Uspešno projektovanje, korišćenje i održavanje hidrotehničkih objekata zasniva se na poznavanju Hidraulike, naučno-tehničke discipline, koja treba da omogući dobijanje relevantnih pokazatelja strujnog polja fluida, koncentracija suspendovanih i rastvorenih materija, kao i uticaja na objekte i okolinu. Hidraulički problemi koji se postavljaju pred inženjera, kao što su: određivanje kapaciteta cevovoda, ili sila u osloncima cevovoda, procena energije potrebne za crpljenje vode, procena izdašnosti bunara, proračun prostiranja zagađenja u vodotoku itd., zahtevaju rešenja koja imaju određeni nivo pouzdanosti i koja se ne mogu davati proizvoljno.

Put do takvog rešenja hidrauličkog problema podrazumeva nekoliko etapa koje ne moraju biti striktno razgraničene. Prva etapa obuhvata **logičan opis problema i identifikaciju relevantnih veličina i njihovih veza**. Sledeća etapa je **idealizacija opisa problema** koja obično podrazumeva **stvaranje matematičkog modela**.

Do matematičkih modela u Hidraulici dolazi se tako što se osnovni zakoni Mehanike fluida (zakoni održanja mase, količine kretanja i energije) prilagođavaju specifičnim uslovima kretanja vode u pojedinim oblastima strujanja (otvoreni tokovi, tokovi pod pritiskom, porozne sredine) i pišu u obliku algebarskih, diferencijalnih ili integralnih jednačina. Dobijene jednačine opisuju idealizovano strujno polje u svakoj tački i u svakom trenutku. Promene tako definisanog strujnog polja zavise od početnog stanja (početni uslovi), stanja na granicama oblasti strujanja (granični uslovi), kao i od vrednosti



parametara strujnog polja. Ako je model korektno formulisan (*well-posed*), jedinstveno rešenje problema uvek postoji, iako je to formalnom primenom matematike često teško dokazati.

Medjutim, u opštem slučaju i kada rešenje postoji, ono se ne može direktno naći. Tada se koriste različite metode koje daju približna rešenja (modele tačnog rešenja).

Do izbora odgovarajuće metode za nalaženje rešenja problema, dolazi se uz poštovanje različitih ograničenja koja mogu biti finansijska, tehnička, ili jednostavno, ograničenja vremena i raspoloživih sredstava. Tako, na primer, iako se radi o istom hidrauličkom problemu, tečenju u cevima, projekat razvodne vodovodne mreže po jednoj zgradi ne vredi isto kao i projekat regionalnog vodovoda. Shodno tome, i metode analize će biti drugačije.

Metodološki, načini dobijanja približnih rešenja mogu se grubo svrstati u neku od sledeće tri grupe:

1. **Empirijske metode.** Ove metode zasnovane su na prethodnom iskustvu.

Dele se na:

- Čisto empirijske, zasnovane na iskustvu projektanta, odnosno, inženjera pojedinca. Ne može se dati generalno povoljna ocena o njihovoj valjanosti, jer mnogo zavise od pojedinca.
- Empirijsko-naučne metode, koje se oslanjaju na sistematizovano znanje dobijeno merenjima i osmatranjima u prirodi, na izvedenim objektima i u laboratoriji, simulacijama i slično. Na primer, tu spada procena koeficijenta trenja na osnovu Nikuradzeovih eksperimenata ili Mudijevog dijagrama (slika 2.4) i slično. Ove metode predstavljaju osnovu inženjerskog obrazovanja.

2. **Teorijsko analitičke metode.** Pojednostavljenjem jednačina i parametara matematičkih modela, granica oblasti strujanja i graničnih uslova dolazi se do nivoa koji omogućava odredjivanje rešenja egzaktnim matematičkim metodama. Koriste se za:

- rešavanje jednostavnih zadataka,
- ocenu reda veličine rešenja kod složenijih zadataka,
- lokalna rešenja u blizini singularnih tačaka, u kombinaciji sa numeričkim modelima i

- testiranje numeričkih modela.

3. **Simulacione metode.** Tečenje na objektu (prototipu) reprodukuje se (simulira) na odgovarajućem modelu.

- **Analogni modeli.** Zasnivaju se na formalnoj sličnosti matematičkih modela različitih fizičkih procesa. Rešenje se dobija merenjem analognih veličina na modelu problema koji se istražuje. Sa razvojem računara i numeričkih metoda, ovi modeli su definitivno prevaziđeni. Međutim, zbog lakšeg merenja analognih veličina od hidrauličkih, imaju svoje mesto u inženjerskom obrazovanju.
- **Fizički modeli.** Strujno polje na prototipu, odnosno, u prirodi, modelira se strujanjem fluida na modelu. Geometrijska sličnost modela i prototipa se podrazumeva, što u najjednostavnijem slučaju obezbeđuje sličnost strujnog polja, odnosno, sličnost za inercijalne uticaje. U upotrebi su i posebni modeli kod kojih se sličnost postiže obezbeđenjem dominantnog uticaja gravitacionih sila na tečenje, Frudovi (*Froude*) modeli, odnosno, viskoznih sila, Reynoldsovi (*Reynolds*) modeli. Njihov značaj je u poslednje vreme smanjen, ali su još uvek nezamenljivi kod rešavanja pojedinih problema (na primer, lokalni problemi sa složenom geometrijom).
- **Numerički simulacioni modeli.** Oni predstavljaju približna rešenja jednačina matematičkih modela do kojih se dolazi primenom metoda numeričke analize. Njima je posvećena ova knjiga. Oblast Hidraulike koja se njima bavi zove se Računska Hidraulika (*Computational Hydraulics*).

Ne treba zaboraviti da je rešenje matematičkog modela, bilo ono približno ili tačno, ipak samo rešenje matematičkog modela. U postupku traženja rešenja hidrotehničkih problema, matematički modeli u Hidraulici imaju važno mesto. Oni su garancija zasnovanosti na fizičkim principima, ali nisu sami sebi svrha. Rešenje mora da bude primenljivo na praktične hidrauličke probleme, što se može znati tek posle verifikacije rešenja merenjima i osmatranjima u prirodi i na izvedenim objektima (Maksimović, 1993).

1.2 Matematički modeli

Pre primene osnovnih zakona Mehanike fluida potrebno je utvrditi karakteristike fluida, strujnog polja i oblasti strujanja, koje utiču na složenost opisa problema a samim tim i na složenost matematičkih modela. Daju se samo osnovne karakteristike – fizička svojstva fluida i kinematička svojstva strujanja, koje se u daljem tekstu koriste za razvrstavanje matematičkih modela po složenosti.

Fizička svojstva fluida koja utiču na strujanje su viskoznost, gustina, stišljivost i površinski napon. Zavisnost gustine fluida od temperature, pritiska, rastvorenih i suspendovanih materija, koje daju jednačine stanja, najviše utiču na složenost matematičkih modela tečenja u cevima. Tako, na primer, kod modela hidrauličkog udara, koji je najstroženiji matematički model obradjen u ovoj knjizi, uzimaju se u obzir stišljivost fluida i deformacije u cevi da bi se mogle objasniti promene pritiska i brzine u neustaljenom tečenju.

Kinematička svojstva strujanja. U pogledu promenljivosti po vremenu strujanja se dele na ustaljena i neustaljena.

Po **prostoru** strujanje može biti u ograničenoj i neograničenoj oblasti strujanja. U okviru kursa Hidraulike 2 proučavaju se samo strujanja u ograničenim oblastima strujanja, odnosno, unutrašnji tokovi.

Unutrašnji tokovi se dele na linijske (jednodimenzionalne, ili, 1D), ravanske (dvodimenzionalne, 2D), i prostorne (trodimenzionalne, 3D). Nazivi u zagradama se mnogo više koriste, ali nisu u duhu našeg jezika. Podela nije stroga, a mogu se uvesti i nove kategorije, kao na primer, $2\frac{1}{2}D$, za prostorni višeslojni tok, koji se nalazi između ravanskog i prostornog, koncentrisani (*lumped*), koji je po složenosti ispod linijskog itd.

Kod linijskih tokova postoji jasno izražen jedan pravac pružanja oblasti strujanja, u kom su i brzine znatno veće od poprečnih. Kod ravanskih tokova radi se o dva pravca. I kod linijskog i kod ravanskog ne radi se obavezno o pravcima Dekartovog koordinatnog sistema, nego to mogu biti i krive linije, odnosno, zakrivljene površi.

U okviru kursa Mehanike fluida izvedeni su osnovni zakoni održanja za elementarne i konačne mase fluida (Hajdin, 1993), jednačina kontinuiteta, Navije-Stoksove jednačine i jednačina održanja energije u opštim oblicima koje treba prilagoditi za rešavanje praktičnih zadataka. Prvi korak koji se preduzima je njihovo osrednjavanje po vremenu čime se uklanja jedan deo

neustaljenosti problema vezan za mikro razmere turbulencije. Rezultat su Reynoldsove jednačine koje su još uvek dosta daleko od direktne primene za većinu hidrotehničkih problema.

Osrednjavanjem po prostoru prelazi se od prostornog modela na linijski ili na ravanski, i to osrednjavanjem po poprečnom preseku, odnosno, po pravcu upravnom na ravan proučavanja. Lokalno osrednjavanje po prostoru implicitno je prisutno u postupku numeričkog rešavanja gde se kontinualne veličine definisane u strujnom polju izračunavaju u konačnom broju izabраниh tačaka.

Linijski matematički modeli mogu se dobiti osrednjavanjem osnovnih jednačina po poprečnom preseku, ili pak, uvodjenjem veličina reprezentativnih za poprečni presek i primenom osnovnih zakona održanja u kojima se one pojavljuju. Iako prvi pristup ima određene prednosti zbog veće opštosti, autor se opredelio za drugi pristup.

U okviru ovog kursa, tečenje u cevima se proučava isključivo linijskim modelima, jer nema praktične potrebe za uvodjenjem ravanskih modela.

U okviru Hidraulike 2 na Gradjevinskom fakultetu, tečenje u otvorenim tokovima proučava se linijskim modelima. Ravanski i prostorni modeli se ne obradjuju zbog svoje složenosti. U hidrotehnici ravanski modeli imaju veliki značaj kod proučavanja tečenja u velikim rekama, plitkim jezerima i akumulacijama i priobalnim delovima mora. Postoji potreba i za prostornim modelima tečenja u dubokim jezerima i akumulacijama, gde se mora uzeti u obzir stratifikacija, promenljivost strujnog polja po vertikali itd.

Podzemne vode proučavaju se u okviru Hidraulike 2 linijskim i ravanskim modelima. Postoji potreba i za korišćenjem prostornih (višeslojnih) modela. Kod strujanja podzemnih voda najviše je izražen problem poznavanja karakteristika oblasti strujanja, graničnih i početnih uslova, što utiče na primenljivost matematičkih modela uopšte. U poredjenju sa teorijsko analitičkim metodama, koje su vrlo popularne u ovoj oblasti, a zasnivaju se na nerealnim pretpostavkama o homogenosti, izotropiji, beskonačnoj oblasti strujanja i slično, numeričke metode su u značajnoj prednosti jer se dobar deo tih problema može prevazići.

1.3 Opšti principi numeričkog modeliranja

U osnovi numeričkog modeliranja je približno rešenje jednačina matematičkog modela. Jednačine se transformišu do oblika na koji se neposredno može primeniti neka od osnovnih numeričkih metoda (Radojković, Klem, 1989; Press

et al., 1990; Petrović, Stupar, 1992).

Izbor numeričke metode zavisi od načina na koji je formulisan matematički model.

Prema načinu diskretizacije oblasti strujanja postoje dva osnovna pristupa: **integralni i diferencijalni**.

Kod integralnog pristupa zakoni održanja primenjuju se na konačnu zapreminu koja je konačno veliki deo oblasti strujanja. Dobijene jednačine matematičkog modela važe za te konačne zapremine, koje u opštem slučaju nisu pravilne. Na ovom pristupu zasnivaju se **metode konačnih elemenata**, ali i mnogo jednostavnije metode, kao što su metode objašnjene u poglavljima 2, 3 i 4 ove knjige.

Kod diferencijalnog pristupa dobijene jednačine važe za proizvoljnu tačku oblasti strujanja. Osnovni zakoni se i ovde formalno primenjuju na elementarne zapremine pravilnog oblika pa se onda operatorom *limes*-a konačne veličine prevode na beskonačno male, a elementarna zapremina na tačku (fluidni delić). Kod formiranja numeričkih modela, diferencijali se aproksimiraju konačnim razlikama (metoda konačnih razlika), a diferencijalne jednačine, koje važe za svaku tačku oblasti strujanja, zamenjuju se konačnim brojem algebarskih jednačina (diferencnih jednačina, odnosno, jednačina konačnih razlika).

Pored ovih osnovnih postoje i kombinovane metode, kao što je metoda konačnih zapremina, kombinovanje analitičkih rešenja u zoni singularnih tačaka, odnosno, u beskonačnosti, sa numeričkim modelom, itd.

Pored promenljivosti po prostoru, stanje u oblasti strujanja može se menjati i po vremenu. U matematičke modele to uvodi još jednu nezavisnu promenljivu a diferencijalne jednačine su skoro obavezno i parcijalne.

Numerički modeli i numeričko modeliranje daleko su od toga da predstavljaju samo približna rešenja nečega egzaktnijeg, kao što je matematički model. Ova oblast je značajno unapredila Hidrauliku omogućivši rešavanje složenih problema na novi način i uticala na promenu nekih shvatanja i principa, kao i afirmaciju drugih, koji su bili zapostavljeni zbog nepostojanja računara (kontinualna simulacija rada velikih distribucionih mreža, modeli transporta zasnovani na praćenju obeleženih čestica, različiti modeli turbulencije itd.). Postoje slučajevi gde je numeričko rešenje matematičkog modela, iako strogo matematički gledano, netačno, bliže onome što se dešava u prirodi itd. Više o ovome može se naći u knjigama iz ove oblasti (Abbott & Basco, 1989; Abbott, 1991).

1.4 Približno rešavanje običnih diferencijalnih jednačina

Jedan deo matematičkih modela (u prvih nekoliko poglavlja ove knjige) predstavljaju obične diferencijalne jednačine koje samo u malom broju slučajeva imaju analitičko rešenje.

Obična diferencijalna jednačina (n)-tog reda:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.1)$$

može se skoro uvek napisati kao sistem običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, pa će se u nastavku razmatrati samo obične diferencijalne jednačine prvog reda. Uz određene izuzetke razmatranje koje sledi može se primeniti i na sisteme diferencijalnih jednačina prvog reda.

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2)$$

gde je $y_1 = y'$, $y_2 = y''$, \dots . U jednačinama (1.1) i (1.2), x , je jedina nezavisna promenljiva. Obična diferencijalna jednačina prvog reda:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.3)$$

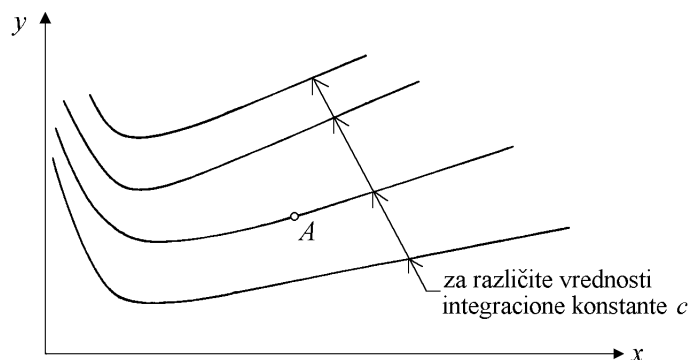
ima **opšte** rešenje:

$$y = F(x, C), \quad (1.4)$$

do koga se dolazi integracijom jednačine (1.3). C je proizvoljna konstanta integracije. U ravni (x, y) , rešenja (1.4) predstavljena su familijom krivih linija (slika 1.1).

Ako je vrednost konstante C zadata (recimo, $C = C_0$), dobija se **posebno** rešenje, $y = F(x, C_0)$. Obično se zahteva da integralna kriva prolazi kroz neku utvrdjenu tačku (recimo, tačka A , čije su koordinate, (x_A, y_A)), odnosno, da zadovoljava početni (inicijalni) uslov, $y(x_A) = y_A$. Vrednost integracione konstante dobija se iz jednačine, $y_A = F(x_A, C_A)$. Ukoliko kroz posmatranu tačku prolazi samo jedna integralna kriva, imamo jedinstvenost (jedinost) rešenja u posmatranoj tački, što je neophodan uslov za nalaženje odgovarajućeg posebnog rešenja.

U nastavku će se objasniti neke od najjednostavnijih približnih metoda određivanja rešenja diferencijalnih jednačina, ili rekonstrukcije integralnih krivih na osnovu početnih uslova.



Slika 1.1: Integralne krive - rešenja diferencijalne jednačine

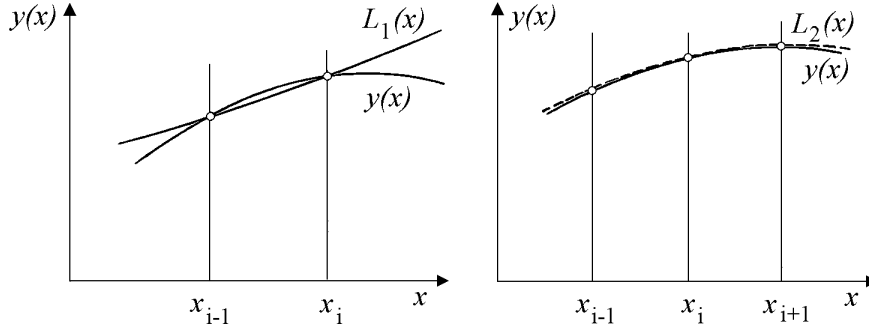
1.4.1 Numeričko diferenciranje

Pre rešavanja diferencijalnih jednačina treba videti kako se može numerički oceniti izvod funkcije u tački, jer on definiše pravac tangente na integralnoj krivoj. Diferenciranje je definisano samo za glatke i neprekidne funkcije, a kod bilo kog izračunavanja možemo imati samo konačan broj vrednosti funkcije, koje, manje ili više, ravnomerno pokrivaju celu oblast u kojoj se traži rešenje. Postupak zamene kontinualne funkcije i njenih izvoda vrednostima funkcije u konačnom broju tačaka naziva se **diskretizacija**.

Pretpostavićemo da su vrednosti funkcije koje znamo, tačne vrednosti, a funkcija glatka (i, za sada, da su nam izvodi potrebni baš u tim tačkama).

Postoji nekoliko načina numeričkog diferenciranja, od kojih će se razmotriti sledeći:

- Interpolacija funkcije nekim polinomom kroz tačke i diferenciranje tog polinoma,
- Razvijanje funkcije u Tejlrov red
- Numerička integracija.



Slika 1.2: Aproksimacija funkcija Lagranžovim interpolacionim polinomom prvog (a) i drugog reda (b)

Interpolacija

Ako se na intervalu $(i - 1, i)$ izvrši interpolacija funkcije $y(x)$ Lagranžovim polinomom prvog reda, dobija se (slika 1.2. a):

$$y(x) \approx \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}y(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}y(x_i) = L_1(x), \quad (1.5)$$

Diferenciranjem polinoma $L_1(x)$ dobija se prvi izvod, koji je konstantan na celom intervalu. U tačkama na granicama intervala dobija se:

$$y'(x_{i-1}) \approx D_+y = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x_i}, \quad (1.6)$$

$$y'(x_i) \approx D_-y = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x_i}, \quad (1.7)$$

gde je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Prethodne jednačine predstavljaju **aproksimacije prvog izvoda konačnim razlikama prvog reda**, i to D_+ je razlika unapred, a D_- je razlika unazad. Izrazi su isti, ali nije svejedno kada se koji koristi.

Poboljšanje aproksimacije prvog izvoda postiže se korišćenjem Lagranžovog polinoma drugog reda na intervalu $(i - 1, i + 1)$ (slika 1.2.b):

$$y(x) \approx \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})}y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})}y_i + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}y_{i+1} = L_2(x). \quad (1.8)$$

Uz pretpostavku da je, $\Delta x_i = \Delta x_{i-1} = \Delta x$, diferenciranjem prethodne jednačine dobija se za tačku na polovini intervala, (i):

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{1}{2}(D_+ + D_-)y, \quad (1.9)$$

što predstavlja srednju vrednost razlike unapred i razlike unazad i zove se **aproksimacija prvog izvoda centralnom razlikom**. Za tačke x_{i-1} i x_{i+1} aproksimacije prvog izvoda se razlikuju:

$$y'(x_{i-1}) \approx \frac{-3y_{i-1} + 4y_i - y_{i+1}}{2\Delta x}, \quad (1.10)$$

$$y'(x_{i+1}) \approx \frac{y_{i-1} - 4y_i + 3y_{i+1}}{2\Delta x}, \quad (1.11)$$

i to su razlike drugog reda, unapred i unazad.

Jednačina (1.8) može se diferencirati još jednom da bi se dobila aproksimacija drugog izvoda. Za jednake intervale Δx dobija se:

$$y'' \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x^2} = D_+(D_-y) = D_-(D_+y). \quad (1.12)$$

Ovaj izraz se može koristiti kao aproksimacija drugog izvoda u bilo kojoj od tri tačke x_{i-1} , x_i , x_{i+1} . U zavisnosti od toga u kojoj tački se aproksimira izvod, zove se **aproksimacija razlikama unapred, centralnim razlikama, odnosno, razlikama unazad**.

Tejlorov red

Ovo je takodje jednostavan način aproksimacije izvoda. Uz nešto više računanja, ovaj način omogućava i ocenu greške aproksimacije izvoda.

Funkcija se razvija u Tejlorov red oko tačke x_i :

$$y(x_i + \Delta x) = y(x_{i+1}) = y(x_i) + \Delta x y'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} y''(x_i) + \dots \quad (1.13)$$

$$y(x_i - \Delta x) = y(x_{i-1}) = y(x_i) - \Delta x y'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} y''(x_i) - \dots, \quad (1.14)$$

i linearnim kombinacijama sa vrednostima funkcija u tačkama x_i , $x_i \pm \Delta x$, $x_i \pm 2\Delta x$ i tako dalje, može se dobiti mnoštvo aproksimacija raznih izvoda različite tačnosti. Koeficijenti uz vrednosti funkcija u pojedinim tačkama dobile bi se rešavanjem sistema linearnih jednačina.

Ovaj postupak će se iskoristiti za ocenu tačnosti aproksimacija dobijenih interpolacijama (1.6), (1.7) i (1.9), koje spadaju u red standardnih.

Aproksimacija prvog izvoda razlikom unazad za tačku x_i , izraz (1.6), dobija se direktno iz jednačine (1.14):

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x_i} = y'_i - \frac{\Delta x_i}{2} y''_i + \dots \quad (1.15)$$

Aproksimacija prvog izvoda razlikom unapred za tačku x_{i-1} , izraz (1.7), može se dobiti na isti način iz izraza (1.13) za vrednost funkcije u tački $x_{i-1} + \Delta x = x_i$:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x_i} = y'_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{2} y''_{i-1} + \dots \quad (1.16)$$

Prethodni izrazi pokazuju da konačne razlike unapred i unazad, (1.6) i (1.7), aproksimiraju prvi izvod, ali i da postoji odstupanje (greška) reda veličine $\frac{\Delta x}{2} y''$. Ovo su **aproksimacije prvog reda tačnosti** jer se u prvom zanemarenom članu Tejlorovog reda javlja Δx na prvi stepen. Takodje se vidi da sama aproksimacija nije ista u obe tačke jer zavisi i od člana $y''(x)$, koji se može razlikovati.

Na sličan način mogu se dobiti i drugi izrazi. Oduzimanjem (1.14) od (1.13) i deljenjem sa $2\Delta x$ dobija se:

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2\Delta x_i} = y'(x_i) + \frac{\Delta x_i^2}{6} y'''(x_i) + \dots, \quad (1.17)$$

što predstavlja aproksimaciju prvog izvoda centralnom razlikom. Ovo je **aproksimacija drugog reda tačnosti**.

Primer 1

Aproksimirati prvi izvod funkcije $y = \sin x$ u okolini tačke $x = \pi/4$ konačnim razlikama unapred, unazad i centralnim, za različite vrednosti Δx .

Kao što je poznato, tačna vrednost izvoda u traženoj tački, može se sračunati

$$y' = \cos x = 0.7071$$

Za poredjenje sa približnim vrednostima izvoda, koje se daju u tabeli, zadržavaju se samo četiri značajne cifre.

Δx	D_-y	D_+y	$0.5(D_- + D_+)y$	Odstupanje
$\pi/4$	0.9003	0.3729	0.6366	0.0705
$\pi/8$	0.8261	0.5520	0.6891	0.0180
$\pi/12$	0.7911	0.6070	0.6991	0.0080
$\pi/16$	0.7718	0.6334	0.7026	0.0045
$\pi/24$	0.7513	0.6589	0.7051	0.0020
$\pi/32$	0.7407	0.6713	0.7060	0.0011
$\pi/64$	0.7242	0.6895	0.7068	0.0003
$\pi/124$	0.7160	0.6981	0.7070	0.0001

U poslednjoj koloni dato je odstupanje od tačne vrednosti procene izvoda centralnim razlikama. Može se videti da greška opada proporcionalno Δx^2 , što se i moglo očekivati jer se radi o aproksimaciji drugog reda tačnosti. Takodje, tačnost koja se postiže tom aproksimacijom pri relativno velikim priraštajima (recimo, $\pi/8$, ili $\pi/12$, može se postići metodom niže tačnosti ali sa manjim priraštajima Δx . Treba reći da je ovo logično ponašanje aproksimacija izvoda, ali nije univerzalno.

Numerička integracija

Rešavamo običnu diferencijalnu jednačinu (1.3). Pretpostavimo da znamo vrednosti funkcije $y(x)$ u svim tačkama do tačke x_i . Postupak za određivanje vrednosti $y(x)$ u narednoj tački, $y(x_{i+1}) = y(x + \Delta x)$, koristi približnu integraciju jednačine (1.3) na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$. Na isti način se određuju i naredne vrednosti, $y(x_{i+2}), y(x_{i+3})$, itd.

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_i + \Delta x} f(x, y) dx . \quad (1.18)$$

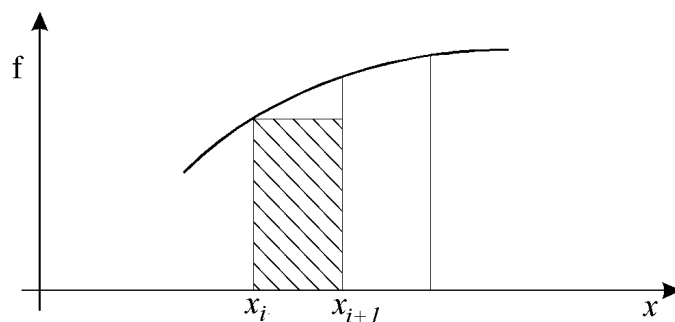
Integral na desnoj strani jednačine (1.18) je površina ispod odsečka na krivoj između tačaka x_i i x_{i+1} , i apscise.

Najjednostavniji način približne integracije, kada se ne zna vrednost primitivne funkcije (integranda) na kraju intervala, je pravilo pravougaonika (slika 1.3):

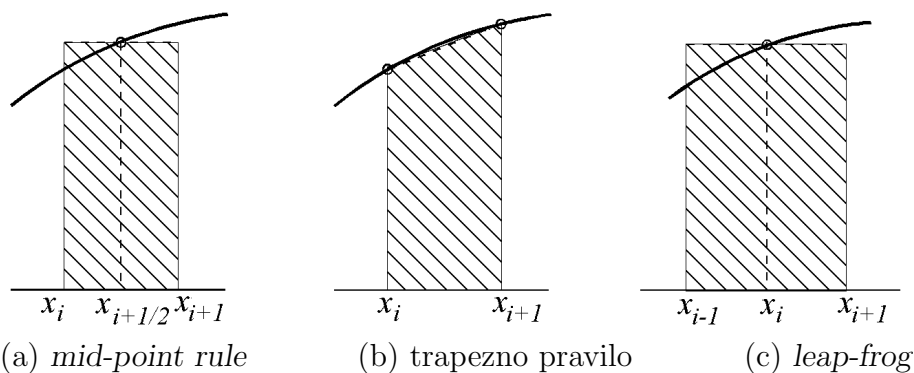
$$y_{i+1} - y_i \approx f(x_i, y_i) \cdot \Delta x . \quad (1.19)$$

Vrednost integranda uzima se u tački (x_i) . Aproksimacija izvoda dy/dx , odgovara razlici unapred, D_+

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} . \quad (1.20)$$



Slika 1.3: Aproksimacija integrala metodom pravougaonika



Slika 1.4: Aproksimacija integrala korišćenjem vrednosti funkcije na polovini intervala

Postupak (1.19) se zove Ojlerova (*Euler*) metoda.

Bolja aproksimacija integrala (1.18) dobija se korišćenjem vrednosti funkcije na sredini intervala integracije (x_i, x_{i+1}) (*mid-point rule*):

$$y_{i+1} - y_i = \Delta x \cdot f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) . \quad (1.21)$$

Ovo zahteva određivanje vrednosti funkcije $f(x, y)$ na polovini intervala (slika 1.4).

Ako se uvede aproksimacija i pretpostavi da je vrednost funkcije na sredini intervala, $(f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}))$, jednaka srednjoj vrednosti funkcije na krajevima intervala, dobija se **trapezno pravilo**:

$$y_{i+1} - y_i = \frac{\Delta x}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] . \quad (1.22)$$

Prethodni izraz zahteva poznavanje vrednosti integranda na kraju intervala. Ukoliko se ne zna vrednost integranda na kraju intervala, može se

prethodno izračunati približna vrednost, \tilde{y}_{i+1} , nekom jednostavnijom metodom, pa tada jednačina (1.22) glasi

$$y_{i+1} - y_i = \frac{\Delta x}{2} [f(x_i, y_i) + f_*(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] . \quad (1.23)$$

Ovo je najprostiji oblik prediktor-korektor metode, tzv. poboljšana Ojlerova metoda.

Pravilo (1.21) može se primeniti na interval (x_{i-1}, x_{i+1}) :

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2\Delta x \cdot f(x_i, y_i) , \quad (1.24)$$

što daje tzv. *leap-frog* - metodu.

Sve četiri metode, (1.21 - 1.24), su drugog reda tačnosti. Iz izraza (1.21) sledi da $\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$ bolje aproksimira izvod na polovini intervala $[x_i, x_{i+1}]$, nego na krajevima, pa se može napisati

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{i+1/2} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + O(\Delta x^2) . \quad (1.25)$$

U numeričkoj matematici a i u Računskoj hidraulici, koriste se i druge metode (Press et al., 1989), koje po svojim dobrim osobinama nadmašuju metode opisane ovde. Najpoznatije su, Runge-Kuta (*Runge-Kutta*) metode trećeg i četvrtog reda, Adams-Bašfort-Multon (*Adams-Bashforth-Moulton*) metode i, posebno, Bulirš-Šterova (*Bulirsch-Stoer*) metoda zasnovana na Ričardsonovoj (*Richardson*) ekstrapolaciji.

Ojlerova metoda se, zbog svoje jednostavnosti, najčešće koristi za ilustraciju principa numeričkog rešavanja diferencijalnih jednačina (napredovanje u malim koracima na osnovu vrednosti izvoda funkcije u tački), ali se ona **ne** preporučuje za praktičnu primenu.

1.5 Osobine numeričkih modela

Da bi se prikazali principi formiranja numeričkih modela diskretizacijom matematičkih modela, koristiće se primer uspostavljanja ustaljenog tečenja u cevi, obradjen u Poglavlju 4.

Polazi se od obične diferencijalne jednačine (4.4),

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{T_0} \frac{Q_\infty^2 - Q^2}{Q_\infty} . \quad (1.26)$$

Koristeći referentne veličine, T_0 , koja ima dimenziju vremena, i Q_∞ , proticaja, prelazi se na bezdimenzionalni oblik

$$\frac{dq}{d\tau} = 1 - q^2, \quad (1.27)$$

gde je, $\tau = t/T_0$, a $q = Q/Q_\infty$. Ovo je obična diferencijalna jednačina prvog reda. Jednačina je nelinearna i ima analitičko rešenje. Do rešenja se može doći i numeričkom integracijom jednačine (1.27) uz poznavanje početne vrednosti proticaja.

Najjednostavniji način da se jednačina napiše u obliku konačnih razlika je korišćenje razlike unapred (Ojlerova metoda):

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\tau^{n+1} - \tau^n} = 1 - q^n q^n. \quad (1.28)$$

Nešto komplikovaniji način aproksimacije jednačine (1.26), gde se nelinearni član na desnoj strani linearizuje, izgleda ovako

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\tau^{n+1} - \tau^n} = 1 - q^n q^{n+1}. \quad (1.29)$$

Na desnoj strani jednačine (1.28) nalazi se poznata vrednost proticaja, q^n , a vrednost proticaja q^{n+1} može se **eksplicitno** izračunati. Na desnoj strani jednačine (1.29) nalazi se nepoznata vrednost proticaja, q^{n+1} , pa se radi o **implicitnoj formulaciji**¹ koja je, inače, drugog reda tačnosti.

U nastavku će se uporediti karakteristike ove dve metode, (1.28) i (1.29).

1.5.1 Konvergencija i stabilnost numeričkog postupka

Osnovno pitanje koje se postavlja kod približnog rešenja jeste da li ono i pod kakvim uslovima konvergira tačnom rešenju.

Za uspešan završetak približnog proračuna potrebno je da se greška računanja ne povećava kako proračun napreduje. Pretpostavlja se da proticaj u trenutku (τ^n) iznosi q^n , a da se u računu polazi od vrednosti $\tilde{q}^n = q^n + \epsilon^n$, gde je ϵ^n greška (usled zaokruživanja, iteracija itd). Kao rezultat toga, ni u narednom trenutku, τ^{n+1} , neće se dobiti tačna vrednost.

¹ Za ovu formulaciju koristi se i naziv polu-implicitna, jer se do vrednosti na narednom vremenskom koraku može doći modifikovanjem samog izraza (1.29)

Za prvu metodu, Ojlerovu, može se napisati:

$$\frac{q^{n+1} + \epsilon^{n+1} - q^n - \epsilon^n}{\Delta\tau} = 1 - (q^n + \epsilon^n)(q^n + \epsilon^n). \quad (1.30)$$

Uz pretpostavku da je osnovna jednačina (1.28) zadovoljena za tačne vrednosti proticaja, i uz zanemarenje jako malih veličina, dolazi se do izraza u kome figurišu samo greške:

$$\frac{\epsilon^{n+1} - \epsilon^n}{\Delta\tau} = -2q^n\epsilon^n, \quad (1.31)$$

$$\epsilon^{n+1} = (1 - 2q^n\Delta\tau)\epsilon^n. \quad (1.32)$$

Da bi greška u trenutku τ^{n+1} bila manja od one u τ^n , član koji množi grešku mora po apsolutnoj vrednosti biti manji od 1, odnosno

$$0 < q^n\Delta\tau < 1, \quad (1.33)$$

što praktično znači da priraštaj po vremenu, $\Delta\tau$, mora biti manje od 1, jer je u ovom primeru, $0 \leq q^n \leq 1$. U protivnom greška raste i to se zove numerička nestabilnost. Zbog potrebe da se zadovolji uslov (1.33), za metodu se kaže da je **uslovno stabilna**.

Na slici (1.5) prikazani su rezultati približnog rešavanja jednačine (1.26) za različite vrednosti priraštaja $\Delta\tau = 0.05; 0.1; 0.5; 0.95; 1.20$.

Kod polu-implicitne metode (1.29) primeniće se isti postupak ispitivanja stabilnosti:

$$\frac{q^{n+1} + \epsilon^{n+1} - q^n - \epsilon^n}{\Delta\tau} = 1 - (q^n + \epsilon^n)(q^{n+1} + \epsilon^{n+1}), \quad (1.34)$$

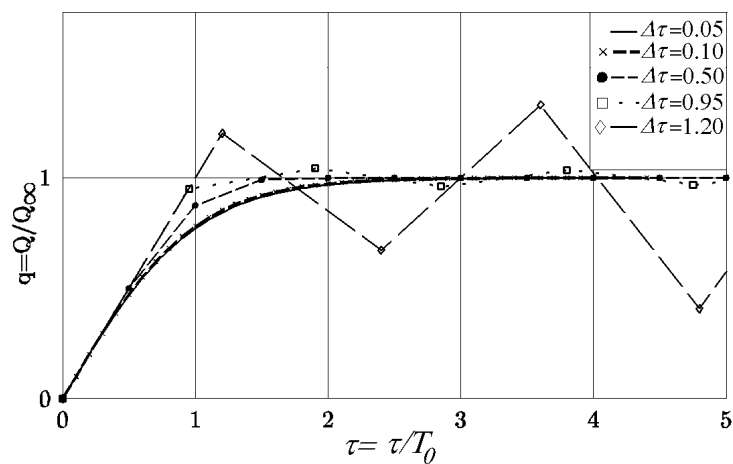
$$\frac{\epsilon^{n+1} - \epsilon^n}{\Delta\tau} = -q^n\epsilon^{n+1} - q^{n+1}\epsilon^n, \quad (1.35)$$

$$\epsilon^{n+1} = \epsilon^n \frac{1 - q^{n+1}\Delta\tau}{1 + q^n\Delta\tau}. \quad (1.36)$$

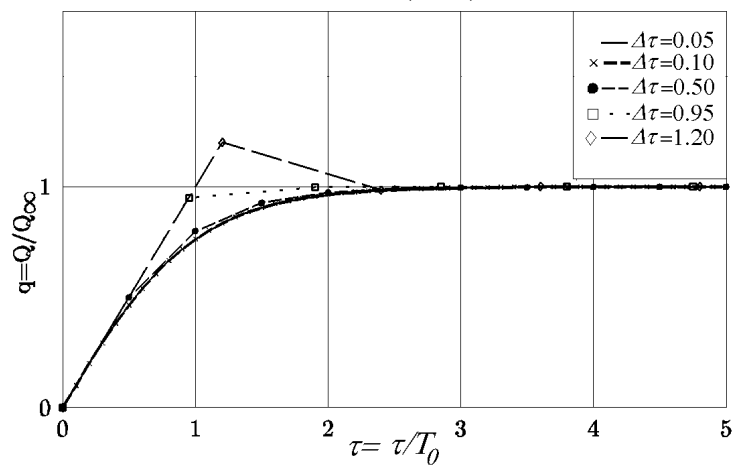
Pošto su i q i $\Delta\tau$ pozitivni, metoda je bezuslovno stabilna, jer je:

$$\left| \frac{1 - q^{n+1}\Delta\tau}{1 + q^n\Delta\tau} \right| \leq 1. \quad (1.37)$$

Ovo je vrlo privlačna osobina implicitnih i polu-implicitnih metoda. Međutim, tu treba biti obazriv jer se sa povećanjem priraštaja $\Delta\tau$ povećava i



Slika 1.5: Približna rešenja jednačine (1.24) - eksplicitna metoda



Slika 1.6: Približna rešenja jednačine (1.24) - polu-implicitna metoda

odstupanje od tačnog rešenja. Nestabilnost se ponekad može izbeći veštački, prigušivanjem i osrednjavanjem oscilacija ali se taj način ne preporučuje, jer je **nestabilnost** način na koji nam brojevi ukazuju da je nešto kontradiktorno u numeričkom modelu ili u načinu na koji ga koristimo (Abbott & Basco, 1989).

Na slici (1.6) dati su rezultati proračuna implicitnom metodom sa istim vremenskim priraštajima kao i kod eksplicitne metode. Pored poboljšane stabilnosti može se uočiti i veća tačnost ove metode.

1.5.2 Konsistentnost

Za procenu tačnosti numeričkog postupka potrebno je utvrditi šta predstavlja približna (diferencna) jednačina, koju rešavamo umesto diferencijalne. Vrednost nepoznate funkcije q^n razvijamo u Tejlorov red oko tačke (τ_n) i zamenjujemo u jednačinu (1.27):

$$\frac{\left(q^n + \frac{dq}{d\tau}\Delta\tau + \frac{d^2q}{d\tau^2}\frac{\Delta\tau^2}{2} + \dots\right) - q^n}{\Delta\tau} = 1 - q^n q^n, \quad (1.38)$$

odnosno,

$$\frac{dq}{d\tau} + \frac{d^2q}{d\tau^2}\frac{\Delta\tau}{2} + \dots = 1 - q^2. \quad (1.39)$$

Ova jednačina odgovara Ojlerovoj metodi, i zove se **modifikovana jednačina**. Drugi član na levoj strani predstavlja najznačajniji deo greške aproksimacije diferencijalne jednačine približnom. Za proizvoljno mali priraštaj, za $\Delta\tau \rightarrow 0$, modifikovana jednačina teži polaznoj jednačini, a za numeričku metodu, čije je to svojstvo, kaže se da je **konsistentna**. Dakle, pojam konsistentnosti odnosi se na jednačine matematičkog i numeričkog modela.

Ako je metoda stabilna i konsistentna ona je i konvergentna, odnosno, rešenje približne jednačine konvergira tačnom rešenju diferencijalne jednačine. Ovo je uslov koji se navodi bez dokaza. Detaljnija razmatranja i dokaz mogu se naći u literaturi (Richtmyer & Morton, 1967).

Primer konvergenije približnog rešenja tačnom dat je na slikama (1.5) i (1.6), a može se videti i u Poglavlju 5 na slici (5.8) gde su prikazana približna rešenja oscilacija vode u vodostanu za različite vremenske priraštaje.

1.5.3 Tačnost

Greška aproksimacije, $\frac{1}{2}\Delta\tau\frac{d^2q}{d\tau^2}$, zavisi od zakrivljenosti integralne linije, $\frac{d^2q}{d\tau^2}$, ali i od priraštaja, $\Delta\tau$. Zbog činjenice da se u vodećem članu reda kojim se prikazuje greška aproksimacije u modifikovanoj jednačini (1.39) nalazi $\Delta\tau$ na prvi stepen, radi se o **tačnosti prvog reda**.

Kod trapezne metode sve veličine se razvijaju u Taylor-ov red oko tačke $\tau_n + \frac{1}{2}\Delta\tau$:

$$q^n = q^{n+1/2} - \frac{\Delta\tau}{2} \frac{dq}{d\tau} + \frac{\Delta\tau^2}{8} \frac{d^2q}{d\tau^2} - \frac{(\Delta\tau/2)^3}{6} \frac{d^3q}{d\tau^3} + \dots \quad (1.40)$$

$$q^{n+1} = q^{n+1/2} + \frac{\Delta\tau}{2} \frac{dq}{d\tau} + \frac{\Delta\tau^2}{8} \frac{d^2q}{d\tau^2} + \frac{(\Delta\tau/2)^3}{6} \frac{d^3q}{d\tau^3} + \dots \quad (1.41)$$

$$f^n = f^{n+1/2} - \frac{\Delta\tau}{2} \frac{df}{d\tau} + \frac{\Delta\tau^2}{8} \frac{d^2f}{d\tau^2} - \dots \quad (1.42)$$

$$f^{n+1} = f^{n+1/2} + \frac{\Delta\tau}{2} \frac{df}{d\tau} + \frac{\Delta\tau^2}{8} \frac{d^2f}{d\tau^2} + \dots \quad (1.43)$$

Modifikovana jednačina za ovu metodu glasi:

$$\frac{dq}{d\tau} + \frac{\Delta\tau^2}{24} \frac{d^3q}{d\tau^3} = 1 - q^2 + \frac{\Delta\tau^2}{8} \frac{d^2f}{d\tau^2}. \quad (1.44)$$

I ova metoda je konsistentna. Ona je **drugog reda tačnosti** jer se u vodećem članu greške aproksimacije javlja $\Delta\tau^2$. Logično je očekivati da ova metoda daje tačnije rešenje jer članovi, $\frac{\Delta\tau^2}{24} \frac{d^3q}{d\tau^3}$, odnosno, $\frac{\Delta\tau^2}{8} \frac{d^2f}{d\tau^2}$, brže teži nuli kada $\Delta\tau \rightarrow 0$. Može se pokazati i da je metoda data izrazom (1.29) i konsistentna i drugog reda tačnosti.

Na kraju, može se napisati opšti izraz za grešku aproksimacije:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{rešenje} \\ \text{diferencne} \\ \text{jednačine} \end{array}} - \boxed{\begin{array}{l} \text{rešenje} \\ \text{diferencijalne} \\ \text{jednačine} \end{array}} = M\Delta(\tau)^m + \boxed{\begin{array}{l} \text{članovi} \\ \text{višeg reda} \end{array}}$$

u kome eksponent (m) određuje red tačnosti aproksimacije. Više od toga se ne može uraditi, jer parametar M , koji je vrlo značajan, nije jednostavno odrediti.

Bibliografija

- [1] Abbott M.B., 1991, *Hydroinformatics - Information technology and the aquatic environment*, Avebary Technical, Aldershot, England.
- [2] Abbott M.B., Basco D.R., 1989, *Computational fluid dynamics – An introduction for engineers*, Longman Scientific & Technical.
- [3] Ferziger J.H., 1981, *Numerical methods for engineering applications*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons.
- [4] Hajdin G., 1993, *Mehanika fluida - Osnove*, Gradjevinski fakultet Beograd.
- [5] Maksimović, Č., 1993, *Merenja u hidrotehnici*, Gradjevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- [6] Petrović Z., Stupar S., 1992, *Projektovanje računarom - metod konačnih razlika*, Mašinski fakultet, Beograd.
- [7] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., 1989, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press.
- [8] Radojković M., Klem N., 1989, *Primena računara u Hidraulici*, Gradjevinska knjiga, Beograd.
- [9] Richtmyer R.D., Morton K.W., 1967, *Difference methods for initial-value problems* 2nd ed. Wiley, N. Y.

Poglavlje 2

Ustaljeno tečenje u cevima

U više oblasti hidrotehnike javlja se potreba za dovodjenjem i distribucijom vode korisnicima, koji nisu koncentrisani na jednom mestu. Jedan provodnik (cev ili kanal sa slobodnom površinom) ne može da ispuni taj zadatak, pa se provodnici medjusobno povezuju i formira se sistem provodnika, koji se naziva distribuciona mreža. U ovom poglavlju razmatraju se mreže sastavljene od provodnika pod pritiskom.

Bez obzira na tehničke razlike medju distribucionim mrežama, koje zadovoljavaju potrebe različitih korisnika, postoje i sličnosti, koje omogućavaju jedinstven prilaz u njihovoj hidrauličkoj analizi.

Najvažniji zahtevi koje jedna distribuciona mreža treba da ispuni jesu:

- da dovede odgovarajuće količine vode svakom korisniku kada mu je to potrebno,
- da obezbedi dovoljne pritiske na svakom mestu korišćenja.

Definisanje mreže koja će se analizirati, raspored potrošnje po mreži, kao i izbor stanja koje će se analizirati, uči se u drugim predmetima. Postoje određena pravila za formiranje matematičkog (i numeričkog) modela cevne mreže da bi se ubrzao proračun, smanjio broj nepoznatih, povećala preglednost rezultata, što u krajnjoj liniji utiče i na kvalitet simulacije. Takodje, podrazumeva se da analiza počinje sa ustaljenim tečenjem, čemu je posvećeno ovo poglavlje.

2.1 Osnovne pretpostavke

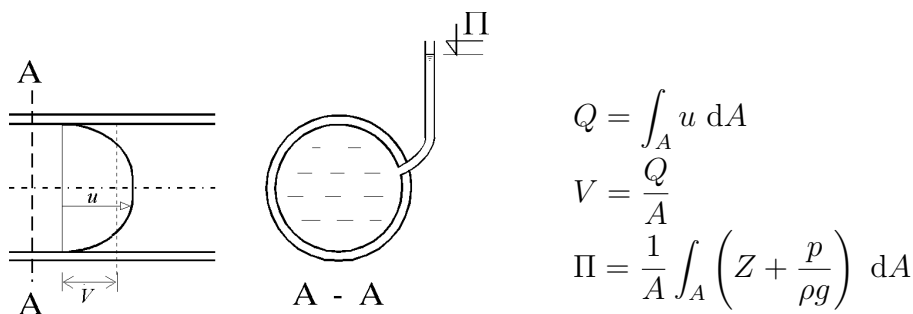
Cevi i čvorovi (mesta gde se susiće dve ili više cevi) su osnovni elementi distribucione mreže. Pretpostavka je da su, duž jedne cevi, poprečni preseki konstantni ($D = \text{const}$). Mesto gde se menja poprečni presek cevi, priključuje druga cev, ili nalazi rezervoar, naziva se čvor. Ostali elementi mreže, kao što su zatvarači, pumpe, reducirani pritiska, zahtevaju poseban tretman i o njima će biti reči na kraju ovog poglavlja.

Postoje dve osnovne veličine koje određuju stanje u mreži: pritisci u određenim tačkama i proticaji kroz cevi. Umesto pritisaka koriste se i pije-zometarske kote, a prikazuju se, najčešće, u čvorovima mreže.

Do matematičkog modela strujanja vode u cevima dolazi se primenom osnovnih zakona Mehanike fluida na elemente mreže i formiranjem sistema jednačina za celu mrežu. Mogu se napisati samo dve vrste međusobno nezavisnih jednačina: jednačine kontinuiteta i dinamičke (odnosno energetske) jednačine.

Osnovne pretpostavke pod kojima se primenjuju ovi zakoni su:

- tečenje je ustaljeno,
- fluid je nestišljiv,
- sve veličine su integrisane po poprečnom preseku cevi i zamenjene reprezentativnim, kao što su proticaj, srednja brzina, pije-zometarska kota itd (slika 2.1).



Slika 2.1: Osnovni pojmovi

Takodje, kod primene osnovnih jednačina na stvarne mreže, vrše se i sledeća pojednostavljenja:

- mali pojedinačni priključci duž cevi ne uzimaju se u razmatranje posebno nego se ukupni proticaj na svim priključcima duž cevi deli i dodeljuje susednim čvorovima kao "čvorna potrošnja";
- slobodne cevi (cevi koje ne formiraju prstenove) manjeg prečnika sa poznatom potrošnjom isključuju se, a njihovi proticaji dodaju se na čvornu potrošnju čvora gde je slobodna cev spojena sa glavnom;
- brzinske visine se najčešće zanemaruju (o ovome će biti reči kasnije, na strani 44).
- standardni lokalni gubici (promena prečnika, spojevi, krivine itd.) najčešće se zanemaruju, ili uzimaju integralno (povećana efektivna dužina cevi ili povećan koef. trenja);
- lokalni gubici na regulacionim zatvaračima, reducirima pritiska i sličnim elementima, koji aktivno utiču na distribuciju vode moraju se uzeti u obzir;

Na ovaj način dolazi se do računskog modela mreže, koji, iako je znatno jednostavniji od stvarne distribucione mreže, treba da omogući pouzdanu inženjersku analizu.

2.2 Osnovne jednačine

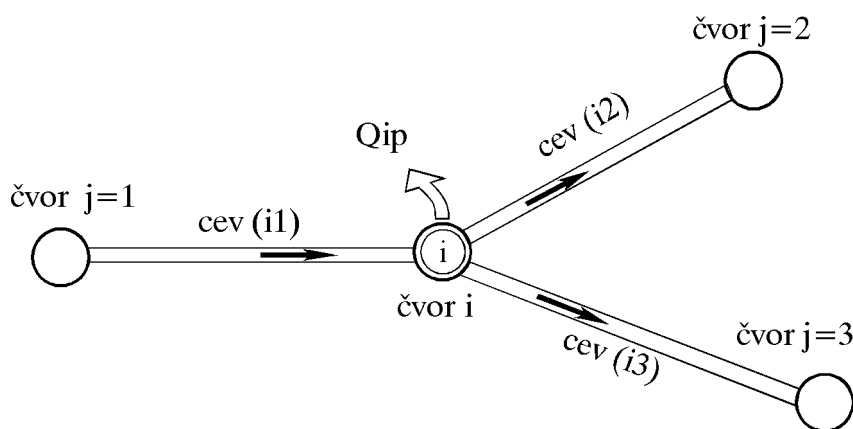
2.2.1 Jednačina održanja mase (jednačina kontinuiteta)

Za bilo koji čvor mreže, (i), mora biti zadovoljena sledeća jednakost:

$$\sum_j Q_{ij} + Q_{ip} = 0, \quad (2.1)$$

gde su, Q_{ij} , proticaji kroz cevi, koje spajaju čvor (i) i čvorove (j), a Q_{ip} čvorna potrošnja dodeljena čvoru (i). Pretpostavlja se da su proticaji pozitivni kada je brzina usmerena od čvora (i) prema čvoru (j), tj. kada voda izlazi iz čvora (i). Na slici 2.2 prikazan je čvor u kome se susstiču tri cevi. U jednačini kontinuiteta negativnu vrednost imaće proticaj kroz cev ($i1$), dok čvorna potrošnja i proticaji kroz cevi ($i2$) i ($i3$) imaju pozitivnu vrednost.

Jednačina kontinuiteta primenjena na cev daje da je duž cevi proticaj konstantan, što se inače podrazumeva pretpostavkom o nestišljivosti fluida.

Slika 2.2: Jednačina kontinuiteta za čvor (i)

2.2.2 Jednačina održanja količine kretanja

Jednačina se piše za cev (ij), dužine L_{ij} , poprečnog preseka A_{ij} , sa čvorovima (i) i (j) na uzvodnom i nizvodnom kraju (Slika 2.3). Tečenje je u pozitivnom smeru x ose, od čvora (i) ka čvoru (j).

Zapreminske i površinske sile, koje deluju na fluid u cevi (ij), treba da budu u ravnoteži.

- **Sila težine.** Od zapreminskih sila deluje samo sila težine. Interesantna je samo njena komponenta u pravcu tečenja G_{ij} .

$$G_{ij} = -\rho g L_{ij} A_{ij} \sin \alpha = -\rho g [(Z_T)_j - (Z_T)_i] A_{ij} , \quad (2.2)$$

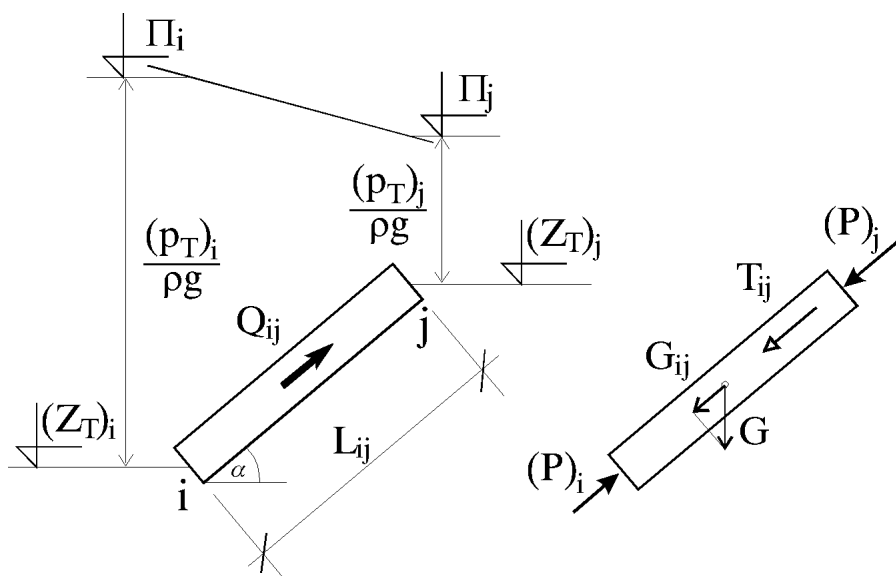
gde je

$$\sin \alpha = \frac{dZ}{dx} = \frac{(Z_T)_j - (Z_T)_i}{L_{ij}} .$$

Z_T je kota težišta poprečnog preseka na odgovarajućem kraju cevi.

- **Sila pritiska.** Deo sile pritiska po konturi cevi uravnotežuje komponentu sile težine koja deluje upravno na zid. Preostali deo sile pritiska, koji deluje u pravcu tečenja, P_{ij} , predstavlja razliku sila pritiska u presecima na krajevima cevi (i) i (j):

$$P_{ij} = (P)_i - (P)_j , \quad (2.3)$$

Slika 2.3: Cev (ij) i sile koje deluju na masu fluida u cevi (ij)

odnosno,

$$P_{ij} = [(p_T)_i - (p_T)_j]A_{ij} , \quad (2.4)$$

gde je p_T pritisak u težištu poprečnog preseka.

Komponente sile pritiska i sile težine u pravcu tečenja, mogu se napisati zajedno:

$$P_{ij} + G_{ij} = \rho g A_{ij} \left[\left(Z_T + \frac{p_T}{\rho g} \right)_i - \left(Z_T + \frac{p_T}{\rho g} \right)_j \right] ,$$

odnosno,

$$P_{ij} + G_{ij} = \rho g A_{ij} (\Pi_i - \Pi_j) , \quad (2.5)$$

gde Π_i i Π_j predstavljaju pijezometarske kote na uzvodnom i nizvodnom kraju cevi.

• **Sila trenja.** Pretpostavlja se da je tangencijalni napon τ_{ij} , između fluida i zida cevi, konstantan po obimu cevi. Ukupna sila trenja, koja deluje u smeru suprotnom od smera tečenja, iznosi:

$$T_{ij} = -\tau_{ij} O_{ij} L_{ij} , \quad (2.6)$$

gde je O_{ij} okvašeni obim cevi ij . Uvodi se koeficijent tangencijalnog napona $C_{\tau_{ij}}$:

$$\tau_{ij} = C_{\tau_{ij}} \frac{1}{2} \rho \frac{Q_{ij}^2}{A_{ij}^2},$$

odakle se dobija

$$T_{ij} = -C_{\tau_{ij}} \frac{1}{2} \rho \frac{Q_{ij}|Q_{ij}|}{A_{ij}^2} O_{ij} L_{ij}. \quad (2.7)$$

Da bi se obezbedilo da je sila trenja u smeru suprotnom od smera tečenja, umesto Q_{ij}^2 , piše se $Q_{ij}|Q_{ij}|$.

Cev je konstantnog poprečnog preseka i nema promene brzine duž cevi, pa je inercijalna sila, I_{ij} , koja predstavlja promenu količine kretanja fluida u cevi, jednaka nuli.

Sile težine i pritiska, (2.5), koje izazivaju kretanje, izjednačuju se sa silom trenja, (2.7), koja se suprotstavlja kretanju:

$$\rho g A_{ij} (\Pi_i - \Pi_j) = C_{\tau_{ij}} \frac{1}{2} O_{ij} \rho \frac{Q_{ij}|Q_{ij}|}{A_{ij}^2} L_{ij}. \quad (2.8)$$

Na kraju se dobija izraz:

$$\Pi_i - \Pi_j = r_{ij} Q_{ij} |Q_{ij}|, \quad (2.9)$$

gde je, r_{ij} , karakteristika cevi, jednaka:

$$r_{ij} = C_{\tau_{ij}} \frac{L_{ij} O_{ij}}{2g A_{ij}^3} = C_{\tau_{ij}} \frac{L_{ij}}{R_{ij}} \frac{1}{2g A_{ij}^2}.$$

R_{ij} je hidraulički radijus ($= A_{ij}/O_{ij}$). Iz jednačine (2.5) vidi se da zajednička sila pritiska i težine deluje u smeru tečenja fluida (uzvodna pijezometarska kota je veća od nizvodne) i da sam položaj (nagib) cevi nema nikakvog uticaja na to.

Umesto koeficijenta tangencijalnog napona C_{τ} koristi se i Darsi-Vajsbahov (*Darcy-Weissbach*) koeficijent trenja λ ($\lambda = 4C_{\tau}$), pa se, za kružnu cev, za koju je $A/O = D/4$, dobija izraz:

$$r_{ij} = \lambda_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} \frac{1}{2g A_{ij}^2} = \frac{8\lambda_{ij} L_{ij}}{\pi^2 g D_{ij}^5}. \quad (2.10)$$

Koeficijent tangencijalnog napona, odnosno, koeficijent trenja, λ , i izraz (2.9) koriste se za računanje "gubitka" energije fluidne struje na deonici

dužine L_{ij} , jer su, u cevi konstantnog poprečnog preseka, razlika pijezometarskih kota, $(\Pi_i - \Pi_j)$, i razlika energija, $(E_i - E_j)$, iste. Treba ukazati na to da se u stranim stručnim publikacijama (posebno američkim) podjednako koriste koeficijent trenja, (λ) , i koeficijent tangencijalnog napona, (C_τ) , a da se zovu istim imenom, koeficijent trenja (*friction coefficient* ili *friction factor*). Najčešće se obeležavaju oznakom (f) , a ponekad i (λ) , što može dovesti do zabune.

Do jednačine, koja bi bila slična jednačini (2.9), moglo bi se doći i korišćenjem energetske jednačine, tzv. Bernulijeve jednačine, za početak i za kraj cevi. Tada bi trebalo definisati vezu gubitka energije i karakteristika cevi, fluida i pokazatelja tečenja, što u principu nije problem o čemu govori i veliki broj empirijskih izraza za gubitke energije. Kod neustaljenog tečenja nije moguće doći do istog rezultata, pa se zbog toga ovde, od samog početka, koristi zakon održanja količine kretanja izražen dinamičkom jednačinom.

2.2.3 Koeficijent trenja λ

Postoji više načina da se sila trenja, odnosno, linijski gubitak energije, parametrizuju, što može uticati na oblik jednačine (2.9). Pored Darsi-Vajsbahovog koeficijenta trenja, λ , koji se javlja u prethodnim jednačinama, i koji će se uglavnom koristiti u ovoj knjizi, u upotrebi su još i Hazen-Vilijamsov (*Hazen-Williams*), Maningov (*Manning*), Šezijev (*Chesy*) i drugi.

Koeficijent trenja λ zavisi od karakteristika unutrašnje obloge cevi, prečnika i režima tečenja. Pokazatelj režima tečenja u cevi je bezdimenzionalna veličina, $Re = \rho V D / \mu$, Reynoldsov (*Reynolds*) broj. ρ je gustina fluida, V srednja brzina, D unutrašnji prečnik cevi, a μ dinamički koeficijent viskoznosti. Samo za laminarno tečenje može se dati egzaktni izraz,

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \quad (2.11)$$

Do ovoga izraza su došli Hagen i Poasej (*Hagen, Poiseuille*), nezavisno jedan od drugog, oko 1840 godine.

Prelaz iz laminarnog u turbulentno tečenje posledica je nestabilnosti unutar toka i ne dešava se uvek pri istim vrednostima Re broja. Iz praktičnih razloga uzima se da je granična, ili kritična, vrednost, $Re_{kr} = 2000$. Sa druge strane, tek za Re brojeve veće od 4000 (5000), može se sa sigurnošću govoriti o turbulentnom tečenju. Iako je zona između 2000 i 4000 (tzv. prelazna

zona) neodređena, u praksi se pretpostavlja da je u toj zoni turbulentno tečenje zbog većeg gubitka energije i manje propusne moći cevi.

Za turbulentno tečenje postoji dosta izraza, od kojih neki važe samo za tzv. turbulentno tečenje u glatkoj, a neki samo za tečenje u hrapavoj cevi. Od mnoštva eksperimenata urađenih u ovoj oblasti, najpoznatiji su Nikuradzeovi u glatkim cevima i u cevima sa veštački ohrapavljenom oblogom (Schlichting, 1968; Miller, 1986).

1911.godine Blazijus (*Blasius*) je sistematizovao dotadašnje eksperimentalne podatke i dao izraz koji važi za oblast hidraulički glatkih cevi (Schlichting, 1968)

$$\lambda = \frac{0.3164}{\text{Re}^{1/4}}, \quad (2.12)$$

Pokazalo se da taj izraz važi do $\text{Re} \leq 100000$, odnosno, do najveće vrednosti za koju su u to vreme postojali podaci. Nikuradze je značajno povećao fond eksperimentalnih podataka o glatkim cevima obavivši veliki broj merenja rasporeda brzina i gubitaka energije u hidraulički glatkim cevima u širokom rasponu Rejnoldsovih brojeva, $4000 \leq \text{Re} \leq 3.2 \times 10^6$. U tumačenju tih podataka dali su svoj doprinos mnogi, a najznačajniji je Prantlov (*Prandtl*), koji je zaključio da se svi rasporedi brzina mogu aproksimirati tzv. eksponencijalnim zakonom

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{2y}{D}\right)^{1/n}, \quad (2.13)$$

gde je U brzina u sredini cevi za odstojanje od zida y jednako poluprečniku cevi, $D/2$. Eksponent n se nalazi u granicama od $n = 6$ za $\text{Re} = 4000$, do $n = 10$ za $\text{Re} = 3.24 \times 10^6$. Za vrednosti Rejnoldsovog broja manje od 100000, za koje praktično važi $n = 7$, Prantl je pokazao da se može direktno dobiti Blazijusov izraz (2.12).

Za celu oblast glatkih cevi (sve vrednosti eksponenta n) koristi se *Prantlov univerzalni zakon za glatke cevi*,

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_*}{\nu} + 5.5, \quad (2.14)$$

gde je $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, brzina trenja, τ_0 , tangencijalni napon između fluida i cevi, a κ Karmanova konstanta, koja je jednaka 0.4. Izraz (2.14) se zasniva na Prantlovoj pretpostavci o putanji mešanja (Streeter & Wylie, 1978; Schlichting, 1968) i na eksperimentalnim rezultatima Nikuradzea. Na osnovu

logaritamskog zakona rasporeda brzina (2.14) dobija se

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(\text{Re}\sqrt{\lambda}) - 0.8 . \quad (2.15)$$

Za hrapave cevi, u oblasti potpuno razvijene turbulencije, Nikuradzeovim merenjima sa veštački ohrapavljenim cevima najviše odgovara izraz koji je predložio Teodor fon Karman (*Theodor von Karman*)¹

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{k}{D} + 1.74 , \quad (2.16)$$

gde je k apsolutna hrapavost cevi.

Karakteristike komercijalnih cevi ne odgovaraju eksperimentima Nikuradzea u prelaznoj oblasti iz hidraulički glatkih cevi u hrapave cevi. Smatra se da je za tu oblast najbolji izraz Kolbruka i Vajta (*Colebrook, White*), koji se koristi integralno za celu oblast turbulentnog tečenja u cevima:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51}{\sqrt{\lambda \text{Re}}} \right) , \quad (2.17)$$

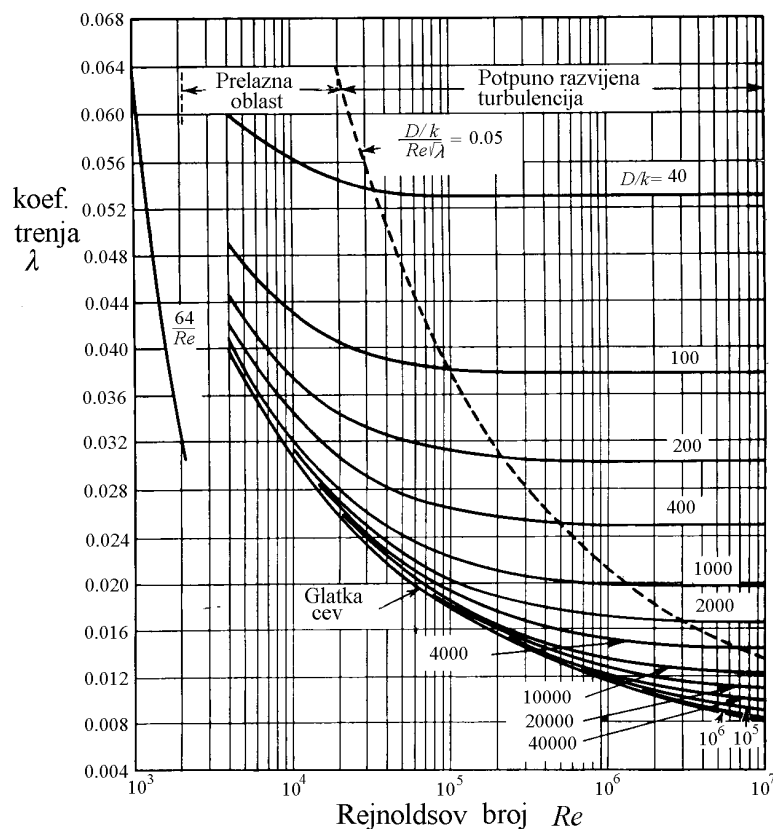
Ovo je empirijski izraz, koji objedinjuje dva izraza, jedan za glatku cev (funkcija Re broja) i drugi za hrapavu cev (funkcija relativne hrapavosti, k/D). Jednačina se ne može direktno rešiti po λ , pa se to obično radi iterativno. Često se koriste izrazi, koji dobro aproksimiraju Kolbrukovu formulu u celoj oblasti turbulentnog tečenja. Jedan od njih je i ovaj:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{5.13}{\text{Re}^{0.89}} \right) . \quad (2.18)$$

Na slici (2.4) dat je dijagram zavisnosti koeficijenta trenja (λ) od Reynoldsovog broja i relativne hrapavosti, poznat kao Mudijev (*Moody*) dijagram (Miller, 1986), koji je takodje dobra aproksimacija Kolbruk-Vajtovog izraza. Mudi je predložio i svoj izraz za računanje koeficijenta trenja

$$\lambda = 0.0055 \left[1 + \left(20000 \frac{k}{D} + \frac{10^6}{\text{Re}} \right)^{1/3} \right] , \quad (2.19)$$

¹ fon Karman je predložio vrednost slobodnog člana 1.68, ali Nikuradzeovim podacima bolje odgovara 1.74 (Schlichting, 1968)



Slika 2.4: Mudijev dijagram

koji bi trebalo da važi za Re brojeve od 4000 do 10^7 i za k/D do 0.01. Za hidraulički hrapave cevi koristi se sličan izraz

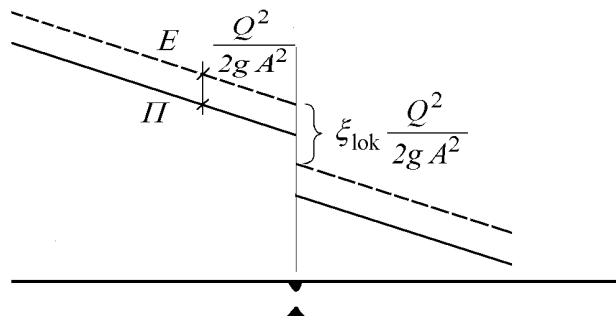
$$\lambda = 0.189 \left(\frac{k}{D} \right)^{1/3} . \quad (2.20)$$

Na ovim prostorima koristi se izraz, koji je afirmisao prof. Georgije Hajdin

$$\lambda = 0.115 \left(\frac{k}{D} + \frac{60}{Re} \right)^{1/4} , \quad (2.21)$$

koji ustvari predstavlja proširenje Blazijusovog izraza za glatku cev.

Ovim se ne iscrpljuje spisak izraza za računanje koeficijenta trenja. Dodatnu neodređenost predstavlja procena hrapavosti cevovoda, koja kod Nikuradzea predstavlja veličinu zrna peska nalepljenog na zid cevi, a kod cevovoda



Slika 2.5: Lokalni gubitak energije

neku ekvivalentnu dužinu koja obuhvata i izbočine na zidu, i odstupanje oblika cevi od kružnog, način ugradnje i mnogo toga još. Daju se vrlo šarolike preporuke za procenu hrapavosti zida za različite materijale, pa tu treba biti oprezan.

2.2.4 Lokalni otpori u cevima

Lokalni otpori, odnosno, lokalni gubici energije, se ne uzimaju eksplicitno u dinamičkoj jednačini. Razlog za to je činjenica da su gubici energije na trenje višestruko veći u većini distribucionih mreža. Značajniji lokalni gubici energije mogu da se uključe direktno u jednačinu preko gubitka energije, (ΔE):

$$\Delta E = \xi_{lok} \frac{v^2}{2g}, \quad (2.22)$$

gde je (ξ_{lok}), koeficijent lokalnog gubitka energije, a ($v^2/2g$), kinetička energija fluidne struje po jedinici težine (Slika 2.5). Najčešće se koeficijent lokalnog gubitka energije vezuje uz brzinsku visinu u preseku nizvodno od lokaliteta koji je prouzrokovao gubitak energije. Pošto je to stvar dogovora moguća su i odstupanja od njega, što treba posebno naglasiti.

Detaljan pregled lokalnih gubitaka energije može se naći u literaturi (Miller, 1986; Idelchik, 1979). Sasvim je razumljivo da, u slučajevima kada se zaneležuju brzinske visine, ima smisla zadržati samo značajnije lokalne gubitke (regulacioni zatvarači, reducirani pritiska itd.)

Lokalni gubici energije se mogu uzeti u razmatranje i indirektno, na jedan od sledeća dva načina:

- Povećanje koeficijenta trenja

$$\lambda_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} + \sum \xi_l = (\lambda_{ij} + \Delta\lambda) \frac{L_{ij}}{D_{ij}},$$

$$\Delta\lambda = \frac{D_{ij}}{L_{ij}} \sum \xi_l.$$

- Povećanje efektivne dužine cevi

$$\lambda_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} + \sum \xi_l = \lambda_{ij} \frac{L_{ij} + \Delta L}{D_{ij}},$$

$$\Delta L = \frac{D_{ij}}{\lambda_{ij}} \sum \xi_l.$$

Drugi način je uobičajen u priručnicima za instalacije vodovoda i kanalizacije po zgradama, gde se lokalni gubici daju kao ekvivalentne dužine cevi (na primer, krivina 90° odgovara 10 m cevi, i sl.). Izbor bilo kog od ova dva načina ne utiče na oblik jednačine (2.9), jer su, i koeficijent trenja, i dužina cevi, sadržani u parametru r_{ij} .

Nedostatak ovakvog pristupa je u tome što linijski i lokalni gubici ne zavise na isti način od Re broja.

2.2.5 Moguće greške kod procene gubitka energije

Jedna od tajni hidrotehničke struke je i određivanje koeficijenta trenja, odnosno, linijskog gubitka energije, koji direktno određuje propusnu moć cevovoda. Sve veličine od kojih zavisi koeficijent trenja imaju izvestan stepen neodređenosti. To posebno važi za hrapavost cevi, mada nije ograničeno samo na to.

Prema izrazu (2.10), odstupanje stvarne vrednosti prečnika cevi od onoga šta se u računu uzima, za samo 1 % odražava se kao greška od 5 % u proceni gubitka energije. Odstupanje od ± 1 % se toleriše kod čeličnih cevi, dok je za cevi od drugih materijala, to i više. U katalogima sa specifikacijama opreme obično stoje uporedo dimenzije u inčima i milimetrima i to na sledeći način (BERMAD, 1994):

- **Sizes:** 4", 6", 8"
(100, 150, 200 mm)

iako su odgovarajuće vrednosti 101.6, 152.4 i 203,2 mm. Ovo ne treba shvatiti kao cepidlačenje nego samo kao ilustraciju kvaliteta podataka sa kojima se računa. Ne treba zaboraviti da "nominalni prečnik", DN, predstavlja pogodan zaokružen broj koji označava cevi, prirubnice, zatvarače i ostale elemente koji odgovaraju jedni drugima. Kod naručivanja cevi i armatura uvek se specificira spoljni prečnik cevi. Veza sa stvarnim dimenzijama tih elemenata je samo približna (Kentish, 1982). Takodje, vrlo često, na ovim prostorima ugrađuju se cevi koje se trenutno mogu nabaviti, pod uslovom da se ne razlikuju "mnogo" od projektovanih.

Odredjivanje reprezentativne hrapavosti cevi nije lak zadatak. Za velike Re brojeve, greška u proceni hrapavosti od 100 %, daje grešku u koeficijentu trenja i gubitku energije između 10 i 20 %. Zbog mogućih velikih razlika u "procenama" hrapavosti cevi u eksploatacionim uslovima, moguće su velike razlike u procenama projektovanog kapaciteta (Yen, 1977).

Apsolutna hrapavost cevi, k , nije samo veličina mikro izbočina na zidu, nego je mera makro nepravilnosti duž cevi, načina spajanja, kvaliteta spojnica, polaganja u rov, istaložavanja, odstupanja prečnika od nominalne vrednosti itd.

Postoje tabele sa preporučenim vrednostima hrapavosti, koje se odnose na nove cevi, odredjeni kvalitet izrade i odredjenu tehnologiju. Ti podaci su dobijeni uglavnom na bazi laboratorijskih merenja, a vrlo malo ih je, na bazi merenja u eksploatacionim uslovima.

Iako su preporučene vrednosti hrapavosti za neke materijale jako niske, 0.001 mm za staklene i neke vrste plastičnih cevi, odnosno, 0.02 mm za nove čelične cevi, neophodno je imati odredjenu rezervu zbog napred pomenutih razloga. Kod provere kapaciteta distribucione mreže preporučuje se 0.5 mm kao minimalna vrednost, i to samo za čistu, hlorisanu i neagresivnu vodu. U ostalim slučajevima, minimalna vrednost bi trebalo da bude 1 mm.

Kinematički koeficijent viskoznosti fluida zavisi od temperature (T), što utiče na vrednost Re broja, i na varijaciju koeficijenta trenja, naročito u oblasti hidraulički glatkih cevi. Za $T = 10^\circ \text{C}$, kinematički koeficijent viskoznosti je, $\nu = 1.308 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$, a za $T = 20^\circ \text{C}$, je, $\nu = 1.007 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$. Ako se radi sa konstantnom vrednosti ν , to može da dovede do greške od oko 5 % kod procene koeficijenta trenja.

Na osnovu svega ovoga može se dati i nekoliko praktičnih napomena.

- Pod uslovom da se prečnik cevi poznaje sa 0.5 % neizvesnosti, moguća greška procene koeficijenta trenja za nove cevi, u oblasti hidraulički

glatkih cevi (kao i u prelaznoj oblasti kada je procenjena vrednost manja od 1.2 vrednosti za glatku cev), je oko 10 %.

- Ako je procenjena vrednost koeficijenta trenja između 1.2 i 1.5 puta vrednost za glatku cev, moguća greška procene prelazi 10 %, takodje za nove cevi. Zbog promena tokom eksploatacije može se desiti povećanje koeficijenta trenja za 25 do 50 %, mada i veće promene nisu tako retke.
- Ako je dužina cevi veća od 500 D (ili 1000 D), radi se o tzv., *dugačkoj cevi*, i tada se standardni lokalni gubici energije (ulaz u cev, krivina, izlaz i slično) mogu zanemariti. Na prvi pogled ovo deluje kao gruba aproksimacija, ali sve postaje jasnije kada se ima u vidu kolika je neizvesnost kod određivanja koeficijenta trenja cevi. Što se nalazimo bliže vrednostima za glatku cev moguće greške su manje, a one rastu kako raste uticaj relativne hrapavosti.

Standardni koeficijenti lokalnih gubitaka su reda veličine 1, ($\sum \xi = O(1)$), a koeficijent trenja $\lambda \approx 0.02$, što daje

$$\lambda \frac{L}{D} \approx 0.02 \cdot 500 = 10$$

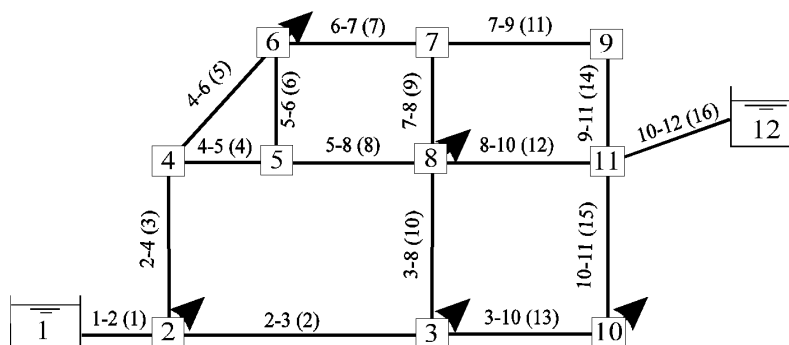
iz čega se vidi da , kod dugačkih cevi, lokalni gubici dostižu najviše oko 10 % linijskih gubitaka energije, što je manje od neizvesnosti procene samog koeficijenta trenja.

2.3 Formiranje sistema jednačina za cevnu mrežu

Na slici (2.6) prikazana je uopštena shema jedne cevne mreže. Označeni su čvorovi (od 1 do 12) i cevi (u zagradama, od 1 do 16). U čvorovima 1 i 12 nalaze se rezervoari, a u čvorovima 2, 3, 6, 8 i 10 postoji određena čvorna potrošnja.

Nivoi u rezervoarima moraju biti poznati, a nepoznate veličine su pijezometarske kote u preostalim čvorovima i proticaji u svim cevima. Broj jednačina, tipa (2.1) i (2.9), koje su na raspolaganju, odgovara broju nepoznatih i jednak je ($I - I_R + J = 26$), gde je $I = 12$, broj čvorova, $I_R = 2$ broj rezervoara, a $J = 16$, broj cevi.

Broj jednačina, koje treba simultano rešiti, može se smanjiti njihovim grupisanjem. Postoji više načina da se to uradi, sve u zavisnosti od toga šta



Slika 2.6: Shematski prikaz jedne cevne mreže

se izabere kao osnovna veličina. Kao osnovne nepoznate veličine mogu se uzeti, ili proticaji, ili pijezometarske kote, ili nešto treće.

2.3.1 Proticaji u cevima kao nepoznate veličine

Jednačine kontinuiteta mogu se napisati za sve čvorove mreže, kojih ima I , ali od toga je $(I - I_R)$ međusobno nezavisnih jednačina

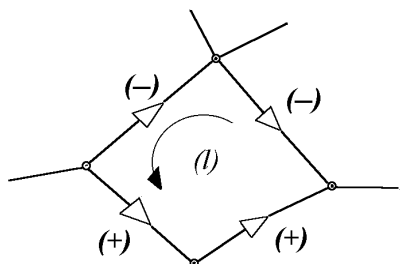
$$\sum_{j=1}^{J_i} Q_{ij} + Q_{ip} = 0 \quad i = 1, \dots, (I - I_R), \quad (2.23)$$

gde je J_i , ukupan broj cevi koje se susiču u čvoru i . Broj jednačina kontinuiteta je dovoljan za rešavanje svih nepoznatih proticaja, samo u najprostijem slučaju, tzv., granate mreže. U opštem slučaju, kod prstenaste mreže, kada nije unapred poznat put vode, potrebne su dodatne jednačine.

Koristi se uslov da je algebarski zbir svih gubitaka energije po zatvorenoj konturi, koju čine cevi, jednak nuli. Zbog zanemarenja brzinskih visina u cevima, kao i lokalnih gubitaka kod promena prečnika cevi i na spojevima, pijezometarske kote na krajevima svih cevi koje se susiču u jedan čvor su iste. Usvaja se pozitivan smer kretanja po konturi, i ako je pretpostavljeni proticaj u tom smeru, gubitak energije se uzima sa znakom "+", a ako je u suprotnom, uzima se sa znakom "-" (slika 2.7).

Tako se za prsten (l) može napisati energetska jednačina

$$l: \sum_{j(l)} \Delta E_{ij(l)} = 0, \quad (2.24)$$



Slika 2.7: Prsten

gde je $\Delta E_{ij(l)}$ gubitak energije u cevi ij , a dobija se iz jednačine (2.9) i uslova $\Delta E_{ij} = \Delta \Pi_{ij}$.

$$l : \sum_{j(l)} r_{ij(l)} Q_{ij(l)} |Q_{ij(l)}| = 0, \quad (2.25)$$

Broj nezavisnih jednačina jednak je K_l , broju prirodnih prstenova koji se medjusobno ne preklapaju. U slučajevima kada postoje bar dva rezervoara (odnosno, dva čvora sa poznatom pijezometarskom kotom), uvodi se pojam pseudo prstena, gde prsten završava jedna fiktivna cev (pseudo cev), koja spaja dva rezervoara. Pseudo-prsten se može shvatiti i kao korišćenje uslova da je, po bilo kojoj putanji koja spaja dva rezervoara, zbir gubitaka energije jednak denivelaciji izmedju ta dva rezervoara.

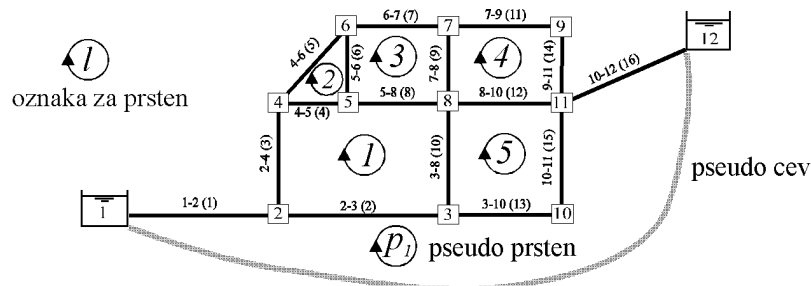
Broj jednačina za pseudo prstenove jednak je $(I_R - 1)$.

Ukupan broj jednačina $(I + K_l - 1)$ je jednak broju nepoznatih proticaja u cevima, što se može i dokazati. Od tih jednačina, $(I - I_R)$ su linearne, a ostale su nelinearne, koje je u postupku rešavanja moguće linearizovati.

Prethodna razmatranja mogu se ilustrovati primenom na mrežu sa slike (2.6). Broj nepoznatih proticaja u cevima je 16. Jednačine kontinuiteta se pišu za čvorove: $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$ i $\boxed{11}$, i ukupno ih je 10. Nezavisnih energetskih jednačina po zatvorenim konturama (prstenovima) ima 5 (slika 2.8), i to su: (2-4-5-8-3-2), (4-6-5-4), (5-6-7-8-5), (7-9-11-8-7) i (3-8-11-10-3)², gde brojevi označavaju brojeve čvorova. Redosled čvorova označava smer sumiranja gubitaka po konturi, a ponavljanje prvog čvora na kraju, znači da se radi o zatvorenoj konturi.

Poslednja jednačina je za prsten koji zatvara pseudo cev spajajući rezer-

² Ovo je samo jedna mogućnost izbora prstenova, i to ona koja uključuje najmanje nepoznatih veličina. Radi se o prstenovima, koji se medjusobno ne preklapaju, i koji se još zovu prirodni prstenovi.



Slika 2.8: Pseuda cev i prstenovi

voare u čvorovima, $\boxed{1}$ i $\boxed{12}$. Jednačina se svodi na to da je suma gubitaka energije duž linije (1-2-3-10-11-12), jednaka, $(\Pi_1 - \Pi_{12})$.

Hardi Krosova metoda prstenova

Hardi Kros (*Hardy Cross*, 1936) je, davno pre uvođenja računara u inženjersku praksu, predložio dva postupka rešavanja jednačina tečenja u cevima mrežama. Jedan od njih, koji se zasniva na energetskim jednačinama po prstenovima, upravo onim koje se koriste kao dopunske jednačine za proticaje u cevima, (2.24), ima veliku praktičnu vrednost i dugu istoriju uspešne primene.³

Jednačine kontinuiteta se ne pišu eksplicitno, ali se početni proticaji moraju pretpostaviti tako da je u svakom čvoru zadovoljena jednačina kontinuiteta.

Jednačina (2.25), sa pretpostavljenim početnim vrednostima proticaja, obično nije zadovoljena za sve prstenove, pa se može napisati:

$$l : \sum_{j(l)} r_{ij(l)} Q_{ij(l)}^{(0)} |Q_{ij(l)}^{(0)}| \neq 0 . \quad (2.26)$$

Svi proticaji u cevima, koje čine prsten (l), koriguju se za istu vrednost, ΔQ_l , tako da se zadovolji uslov (2.25).

$$l : \sum_{j(l)} r_{ij(l)} (Q_{ij(l)}^{(0)} + \Delta Q_l^{(1)}) |Q_{ij(l)}^{(0)} + \Delta Q_l^{(1)}| = 0 . \quad (2.27)$$

To je osnovna ideja Hardi Krosove metode prstenova, koja se još zove i ΔQ - metoda. Uz pretpostavku relativno male korekcije proticaja, (ΔQ),

³ Ova metoda se u ruskoj literaturi zove metoda Lobačeva, ali i metoda Lobačev-Kros (Abramov, 1974).

zanemaruje se član gde se (ΔQ_l) javlja na drugi stepen, a jednačina (2.27) se linearizuje. Dobija se korekcija, ΔQ_l , za svaki prsten mreže, posebno.

$$\Delta Q_l^{(1)} = - \frac{\sum r_{ij(l)} Q_{ij(l)}^{(0)} |Q_{ij(l)}^{(0)}|}{2 \sum r_{ij(l)} |Q_{ij(l)}^{(0)}|}. \quad (2.28)$$

Korigovanjem svih proticaja po prstenu, za istu vrednost, i vodeći računa o znacima proticaja, ne remete se uslovi kontinuiteta za čvorove.

Postupak se ponavlja za sledeći prsten, i tako redom, dok se odstupanje za sve prstenove ne dovede ispod prihvatljive granice. Nepoznate veličine nisu proticaji u cevima, nego korekcije proticaja, ΔQ_l , po prstenovima, kojih ima znatno manje nego cevi (u primeru sa slike 2.6, to je 6).

Odredjivanje korekcija ΔQ_l može se raditi sukcesivno, kako je to predložio Hardi Kros, ili simultano (Epp, Fowler, 1970), za šta je pogodniji računar.

Postupak identifikacije prirodnih prstenova je dosta teško isprogramirati, tako da se ova metoda preporučuje za manje mreže i kada se koristi ručni kalkulator, ili kada se kao pripremljeni ulazni podaci unose i podaci o prstenovima.

2.3.2 Π - kote u čvorovima kao nepoznate veličine

I ovaj postupak je razmatran od strane Hardi Krosa, ali je data prednost ΔQ metodi, zbog manjeg broja jednačina. Broj jednačina je jednak broju čvorova u kojima se ne znaju Π -kote, i, kao što se moglo videti, kod prstenaste mreže manji je od broja cevi. Sve jednačine su istog tipa (doduše, nelinearne), što je povoljno kod izbora algoritma proračuna. Takođe, kod velikog broja cevi, razlika u broju jednačina, u odnosu na ΔQ - metodu, nije tako značajna.

Jednačine (2.9) izražavaju se direktno preko proticaja:

$$Q_{ij} = \text{SGN}(\Pi_i - \Pi_j) \left(\frac{|\Pi_i - \Pi_j|}{r_{ij}} \right)^{1/2}, \quad (2.29)$$

gde, $\text{SGN}(\Pi_i - \Pi_j)$, znači znak $(\Pi_i - \Pi_j)$. Pritom su konvencije oko znaka proticaja za cev i za čvor ovim uskladjene. Π_i je pijeziometarska kota čvora za koji pišemo jednačinu kontinuiteta, a Π_j je pijeziometarska kota na suprotnom kraju cevi. Jednačine (2.29), za proticaje, zamenjuju se u jednačinu

kontinuiteta za čvor (i), i rezultat je:

$$\sum_j \text{SGN}(\Pi_i - \Pi_j) \left(\frac{|\Pi_i - \Pi_j|}{r_{ij}} \right)^{1/2} + Q_{ip} = 0 . \quad (2.30)$$

Broj jednačina tačno odgovara broju nepoznatih pijezometarskih kota u čvorovima. Nema potrebe za uvodjenjem, donekle neodređenih, pojmova kao prstenovi i kvazi-prstenovi, niti zahteva da se početne vrednosti proticaja zadaju tako da bude zadovoljen uslov kontinuiteta.

Zbog iterativnog postupka rešavanja prethodnog sistema jednačina, potrebno je imati neku početnu vrednost za proticaje. To može biti proizvoljna vrednost, koja je **različita od nule**. Obično se pretpostavljaju početne vrednosti koje odgovaraju nekoj konačnoj brzini V_0 (recimo, 1 m/s).

$$Q_{ij}^{(1)} = \frac{D^2 \pi}{4} V_0 ,$$

koja ne mora da bude bliska tačnom rešenju, jer to nema uticaja na brzinu konvergencije.

Metoda Njtn-Rafsona

Jednačine (2.30) su nelinearne i jedan od načina da se one reše je linearizacija i iterativno približavanje tačnom rešenju. Razvijanjem jednačine (2.9) u Tejlorov red oko (k)-te iteracije da bi se dobila ($k + 1$) iteracija, jednačine se linearizuju. To je, inače, matematička osnova Njtn-Rafsonove (*Newton-Raphson*) metode.

U opštem obliku, za funkciju $f(x)$, u okolini tačke $x^{(k)}$, važi

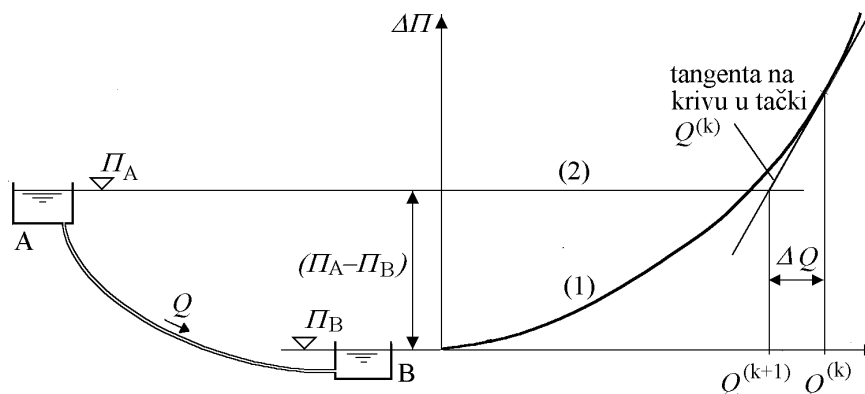
$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)}) + \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x} (x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \dots \quad (2.31)$$

Za $f(Q) = \Pi_i - \Pi_j$, definisano jednačinom (2.9), u okolini tačke, $Q^{(k)}$, i zadržavanjem samo člana sa prvim izvodom, dolazi se do izraza:

$$\Pi_i^{(k+1)} - \Pi_j^{(k+1)} = r_{ij} Q_{ij}^{(k)} |Q_{ij}^{(k)}| + 2r_{ij} |Q_{ij}^{(k)}| (Q_{ij}^{(k+1)} - Q_{ij}^{(k)}) . \quad (2.32)$$

Ako se jednačini (2.32) doda i oduzme prvi član na desnoj strani dolazi se do linearizovanog oblika dinamičke jednačine za cev (ij)

$$Q_{ij}^{(k+1)} = \frac{\Pi_i^{(k+1)} - \Pi_j^{(k+1)}}{2r_{ij} |Q_{ij}^{(k)}|} + \frac{Q_{ij}^{(k)}}{2} . \quad (2.33)$$



Slika 2.9: Određivanje proticaja kroz cevovod između dva rezervoara

Na slici (2.9) dat je primer određivanja proticaja u cevovodu između dva rezervoara A i B, sa konstantnim nivoima, Π_A i Π_B . Rešenje (nepoznati proticaj) nalazi se u preseku dve linije, karakteristike cevovoda $r_{AB}Q|Q|$ (1), i horizontalne linije (2), koja predstavlja raspoloživu denivelaciju $(\Pi_A - \Pi_B)$.

Pošto je na iterativnom nivou (k) , za proticaj $Q^{(k)}$, vrednost $r_{AB}Q^{(k)}|Q^{(k)}|$ različita od $(\Pi_A - \Pi_B)$, povlači se tangenta na krivu (1) do preseka sa linijom (2). Tako se dolazi do sledeće iterativne vrednosti proticaja $Q^{(k+1)}$. Ovim se jedna nelinearna jednačina, kao što je (2.9), u postupku rešavanja, zamenjuje jednačinom prave, koja je tangenta na krivu u tački (k) u kojoj se zna približno rešenje.

U distribucionim mrežama izraz za proticaj (2.33) uvrsti se u jednačinu kontinuiteta (2.1) i dolazi se do sistema linearizovanih jednačina kontinuiteta:

$$\frac{1}{2} \sum_j \frac{\Pi_i^{(k+1)} - \Pi_j^{(k+1)}}{r_{ij}|Q_{ij}^{(k)}|} + Q_{ip} + \frac{1}{2} \sum_j Q_{ij}^{(k)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots (I - I_R), \quad (2.34)$$

čiji je broj jednak broju čvorova sa nepoznatim piježometarskim kotama u mreži.⁴

⁴Do slične jednačine dolazi se ako se jednačina (2.9) linearizuje metodom Pikara (Pickard) (Radojković, Klem, 1989):

$$Q_{ij} = \frac{\Pi_i - \Pi_j}{r_{ij}|Q_{ij}|},$$

Postupak razvijanja funkcije u Tejlorov red iskoristiće se i za linearizaciju složenijih elemenata cevne mreže, kao što su zatvarači, pumpe i slično.

Sistem linearnih jednačina (2.34) može se rešiti direktno, najbolje, nekom od metoda koja vodi računa o tome da se radi o retkoj i simetričnoj matrici, ili, iterativno (Press et al., 1989, Radojković i Klem, 1989). Rešenje sistema (2.34), daje vrednosti pijezometarskih kota, $(\Pi_i^{(k+1)})$, na osnovu kojih treba sračunati odgovarajuće vrednosti proticaja, $(Q_{ij}^{(k+1)})$. Ovim se postupak, ilustrovan na slici (2.9), simultano radi za sve cevi u distribucionoj mreži.

Tačno rešenje sistema (2.34) ne obezbeđuje zadovoljenje jednačine kontinuiteta za sve čvorove u mreži, jer jednačine koje se rešavaju već predstavljaju aproksimaciju osnovnih jednačina. Sa korigovanim proticajima, iz jednačine (2.29), sistem jednačina (2.34) ponovo se rešava sve dok se ne postigne zadovoljavajuća tačnost po proticajima.

Za rešavanje (2.34), najčešće se koristi metoda sukcesivnih nadrelaksacija (*SOR - Successive OverRelaxation*), koja predstavlja poboljšanje Gaus-Zajdelove (*Gauss-Seidel*) iterativne metode za rešavanje sistema linearnih jednačina, uvođenjem parametra nadrelaksacije (ω).

Za objašnjenje metode sukcesivnih nadrelaksacija, koja predstavlja dodatni (tzv. unutrašnji) iterativni ciklus, najpre će se sistem jednačina (2.34) napisati u matričnom obliku

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} , \quad (2.35)$$

gde je \mathbf{A} matrica koeficijenata dimenzije $(I - I_R) \times (I - I_R)$, \mathbf{x} vektor nepoznatih pijezometarskih kota, a \mathbf{b} vektor slobodnih članova. Matrica \mathbf{A} se rastavlja na tri dela

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} + \mathbf{D} + \mathbf{L} , \quad (2.36)$$

gde je \mathbf{D} dijagonalni deo matrice \mathbf{A} , \mathbf{U} gornja trougaona matrica od \mathbf{A} , sa nulama na glavnoj dijagonali i ispod nje, i \mathbf{L} donja trougaona matrica od \mathbf{A} , sa nulama na glavnoj dijagonali i iznad nje. Iterativni postupak određivanja vektora nepoznatih, \mathbf{x} , Gaus-Zajdelovom metodom, može se prikazati kao

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \boldsymbol{\xi}^{(n)} , \quad (2.37)$$

odnosno,

$$\sum_j \frac{\Pi_i^{(k+1)} - \Pi_j^{(k+1)}}{r_{ij} |Q_{ij}^{(k)}|} + Q_{ip} = 0 .$$

dok je metodom sukcesivnih nadrelaksacija

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \omega(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\xi^{(n)}, \quad (2.38)$$

gde je $\xi^{(n)}$, u oba slučaja, rezidual jednačine (2.35) na iterativnom nivou (n) , odnosno

$$\mathbf{Ax}^{(n)} - \mathbf{b} = \xi^{(n)}, \quad (2.39)$$

a ω , parametar nadrelaksacije, koji se kreće u granicama $1 < \omega < 2$. Prema Gesleru (Gessler, 1979), za sisteme jednačina sa piježometarskim kotama kao nepoznatim veličinama, optimalna vrednost je, $\omega_{opt} = 1.85$. Pojava matrice \mathbf{L} na desnoj strani jednačine (2.38) ukazuje da se koriste i vrednosti piježometarskih kota na nivou $(n + 1)$, ako su raspoložive.

Ako se postupak (2.38) primeni na jednačine (2.34), dobija se

$$\Pi_i^{(n+1)} = \Pi_i^{(n)} + \omega \left(\frac{\sum_j \frac{\Pi_j^{(m)}}{2r_{ij}|Q_{ij}|} - Q_{ip} - \frac{1}{2} \sum_j Q_{ij}^{(k)}}{\sum_j \frac{1}{2r_{ij}|Q_{ij}^{(k)}|}} - \Pi_i^{(n)} \right), \quad (2.40)$$

gde (m) može biti $(n + 1)$ ili (n) , u zavisnosti od toga da li je u tom čvoru već sračunata nova vrednost piježometarske kote ili nije. Vrednosti proticaja u imeniocu sume, \sum_j , ne menjaju se tokom ovog iterativnog postupka (imaju eksponent (k)). Kada se ispuni kriterijum konvergencije unutrašnjeg iterativnog ciklusa, (2.40), računaju se nove vrednosti proticaja, $Q_{ij}^{(k+1)}$, i $r_{ij}|Q_{ij}^{(k+1)}|$, na osnovu (2.29), odnosno, (2.33), u spoljašnjem iterativnom ciklusu. Ako se proticaji razlikuju od vrednosti iz prethodnog spoljašnjeg iterativnog ciklusa, ponavlja se unutrašnji iterativni ciklus sa korigovanim proticajima, uvršćenim u jednačinu (2.40).

Kriterijum konvergencije unutrašnjeg iterativnog postupka glasi

$$\max|\Pi_i^{(n+1)} - \Pi_i^{(n)}| < \varepsilon_{\Pi} (\approx 0.001m), \quad (2.41)$$

a spoljašnjeg,

$$\max|Q_i^{(k+1)} - Q_i^{(k)}| < \varepsilon_Q. \quad (2.42)$$

Problemi konvergencije i tačnosti iterativnih metoda rešavanja linearnih sistema jednačina, kojima pripadaju i Gaus-Zajdelova i SOR metoda, obradjeni su na drugim mestima (Radojković, Klem, 1989; Press i dr, 1989).

Proračun počinje od čvorova u kojima su poznate pijezometarske kote, i to su referentni čvorovi. To su rezervoari, prekidne komore, vodotornjevi i slično. Pijezometarske kote se ne menjaju u tim čvorovima,

$$\Pi_i = Z_{ref} . \quad (2.43)$$

Posebnu pažnju treba obratiti kratkim cevima sa malim gubicima energije i brzinama bliskim nuli. Tada je konvergencija sporija, a postoji opasnost od deljenja sa nulom.

Hardi Krosova metoda čvorova

Iako pomenuta u originalnom radu Hardi Krosa, metoda čvorova nije mnogo korišćena sve do pojave računara, jer, po mišljenju autora, nije dovoljno očigledna, kao što je to metoda prstenova. Da se pokaže da to nije baš tako, a sa druge strane, da se sačuva od zaborava delo H. Krosa, objasniće se ovaj jednostavan postupak za iterativno rešavanje sistema jednačina, čija je bitna osobina i da se lako pamti. U svom radu Hardi Kros je ovu metodu nazvao *Method of balancing flows*, pa bi, možda, umesto metoda čvorova, prikladniji naziv bio: Metoda izravnjanja proticaja.

Smisao postupka je sledeći:

U jednačine kontinuiteta uvode se korekcije pijezometarske kote da bi uslov kontinuiteta bio zadovoljen za svaki čvor.

Koristi se linearizovana jednačina kontinuiteta za čvor (i), u sledećem obliku:

$$\sum_j \frac{\Pi_i - \Pi_j}{r_{ij}|Q_{ij}|} + Q_{ip} = 0 . \quad (2.44)$$

Posle (k) iteracija, ako se vrednosti pijezometarskih kota razlikuju od tačnih vrednosti, jednačina kontinuiteta za čvor (i) nije zadovoljena. Može se napisati sledeća jednakost:

$$\sum_j \frac{\Pi_i^{(k)} - \Pi_j^{(k)}}{r_{ij}|Q_{ij}^{(k)}|} + Q_{ip} + \Delta Q_i^{(k)} = 0 , \quad (2.45)$$

gde je ΔQ_i vrednost odstupanja proticaja za čvor (i).

Sledeći (iterativni) korak je određivanje korekcije pijezometarske kote, $\Delta\Pi_i^{(k+1)}$, u čvoru (i), da bi se eliminisalo odstupanje proticaja, $\Delta Q_i^{(k)}$, na iterativnom nivou (k):

$$\sum_j \frac{\Pi_i^{(k)} + \Delta\Pi_i^{(k+1)} - \Pi_j^{(k)}}{r_{ij}|Q_{ij}^{(k)}|} + Q_{ip} = 0. \quad (2.46)$$

Iz prethodne dve jednačine lako se dobije veza između $\Delta\Pi_i^{(k+1)}$ i $\Delta Q_i^{(k)}$:

$$\Delta\Pi_i^{(k+1)} \sum_j \frac{1}{r_{ij}|Q_{ij}^{(k)}|} = \Delta Q_i^{(k)}. \quad (2.47)$$

Konačno, dobija se izraz za vezu pijezometarskih kota u čvoru (i) na dva sukcesivna iterativna nivoa, jer je

$$\Pi_i^{(k+1)} = \Pi_i^{(k)} + \Delta\Pi_i^{(k+1)}. \quad (2.48)$$

Slično razdvajanju na spoljašnji i unutrašnji iterativni ciklus kod metode Njutn-Rafsona, i ovde se, inače jedinstveni iterativni ciklus, može razdvojiti, i vrednost proticaja u imeniocu jednačine (2.47) ne obnavljati na svakom iterativnom koraku.

Da bi se ubrzala konvergencija, može se uvesti faktor nadrelaksacije, ω , kojim se množi korekcija pijezometarske kote, ($\Delta\Pi_i^{(k+1)}$):

$$\Pi_i^{(k+1)} = \Pi_i^{(k)} + \omega \left(\frac{\Delta Q_{ij}}{\sum_j \frac{1}{r_{ij}|Q_{ij}^{(k)}|}} \right). \quad (2.49)$$

Koeficijent nadrelaksacije treba da bude veći od 1, a manji od 2. Postoji nekoliko (komplikovanih) načina da se odredi optimalna vrednost koeficijenta ω . Medjutim, najsigurniji način je probanje, počevši od 1. Kada korekcija pijezometarske kote, $\Delta\Pi$, počne naizmenično da menja znak, nalazimo se blizu optimalne vrednosti.

Ključna jednačina ovog postupka, (2.49), razlikuje se od jednačine (2.40), samo u načinu linearizacije polazne jednačine (2.9). U jednom slučaju to je Pikarova metoda, a u drugom Njutn-Rafsonova. Stoga se ne radi o nekoj suštinski novoj metodi, nego pre o jednostavnom i logičnom inženjerskom pristupu rešavanju problema, koji ima i svoju komplikovaniju matematičku podlogu.

Primer 1

Karakteristike cevi, čvorova i potrošnje vode u čvorovima distribucione mreže prikazane na slici (2.6), date su u tabelama. Odrediti pijezometarske kote u čvorovima i proticaje u cevima za datu potrošnju uz pretpostavku ustaljenog tečenja.

Za proračun se koristi Njutn-Rafsonova metoda (2.40). Kriterijumi za konvergenciju iterativnog postupka iznose

- za unutrašnji ciklus $\Delta\Pi \leq 0.001$ m
- za spoljašnji ciklus $\Delta Q \leq 0.01$ l/s .

Prvih nekoliko iteracija, kao i konačno rešenje, koje se dobija posle 18 iteracija, prikazano je tabelarno.

čvor	Z kota [m]	Π [m]	Q_p [l/s]	cev	čvorovi	L	D	k
						[m]	[mm]	[mm]
				1	1-2	100	250	0.5
				2	2-3	350	200	0.5
1	207.0	210.0	–	3	2-4	250	150	0.5
2	170.0	–	30	4	4-5	150	150	0.5
3	160.0	–	20	5	4-6	300	150	0.5
4	150.0	–	–	6	5-6	200	150	0.5
5	150.0	–	–	7	6-7	200	150	0.5
6	150.0	–	20	8	5-8	200	150	0.5
7	150.0	–	–	9	8-7	200	150	0.5
8	150.0	–	15	10	3-8	250	200	0.5
9	170.0	–	–	11	7-9	250	150	0.5
10	150.0	–	20	12	8-11	250	200	0.5
11	160.0	–	–	13	3-10	250	150	0.5
12	201.0	205.0	–	14	9-11	200	150	0.5
				15	10-11	250	150	0.5
				16	11-12	250	250	0.5

čvor	Z kota [m]	iteracije Π u [m]				
		$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$...	$n = 18$
1	207.0	210.0	210.00	210.00	...	210.00
2	170.0	210.0	209.01	208.73	...	208.41
3	160.0	210.0	205.59	205.17	...	204.94
4	150.0	210.0	206.14	205.75	...	205.45
5	150.0	210.0	205.25	205.05	...	204.92
6	150.0	210.0	204.46	204.59	...	204.65
7	150.0	210.0	204.69	204.75	...	204.78
8	150.0	210.0	204.87	204.83	...	204.81
9	170.0	210.0	204.76	204.81	...	204.82
10	150.0	210.0	203.86	204.00	...	204.12
11	160.0	210.0	204.82	204.85	...	204.85
12	201.0	205.0	205.00	205.00	...	205.00

2.4 Posebni elementi mreže

U prethodnim odeljcima objašnjeno je nekoliko postupaka za određivanje proticaja i piježometarskih kota u distribucionim mrežama, uz pretpostavku da se mreža sastoji od cevi, čvorova i rezervoara. Elementi mreže, kao što su zatvarači, pumpe, reducirani pritiska itd., zahtevaju poseban tretman, koji zavisi od metode na kojoj se zasniva algoritam.

U nastavku će se objasniti kako se matematički opisuju dva važna elementa, hidranti i crpne stanice, da bi se uključili u sistem jednačina sa piježometarskim kotama kao nepoznatim veličinama. Takođe, pokazaće se kako se iterativni postupak može primeniti na jednu cev na kojoj se nalazi zatvarač za regulaciju proticaja.

2.4.1 Hidranti i prskači

Lokalni gubitak energije na regulacionom zatvaraču, koji se nalazi na cevi (ij), može se jednostavno uzeti u obzir uključivanjem u parametar cevi r_{ij} u jednačini (2.9), ali se zbog funkcije koju ima to ne radi. Protivpožarni hidranti i prskači (koriste se i u hidrotehničkim melioracijama) predstavljaju lokalne otpore sa poznatim koeficijentima lokalnih gubitaka, i sa poznatom nizvodnom piježometarskom kotom, koja odgovara koti hidranta, Z_H . Svi se oni tretiraju u suštini na isti način. Proticaj zavisi od piježometarske kote

uzvodno od hidranta, Π_H :

$$\Pi_H - Z_H = \xi'_H \frac{v^2}{2g} = r_H Q^2, \quad (2.50)$$

gde je ξ'_H , koeficijent lokalnog gubitka energije na hidrantu,⁵ izražen u odnosu na brzinsku visinu u cevi, $v^2/2g$. r_H je parametar hidranta i iznosi $\xi'_H/(A^2 2g)$. Razvijanjem u Tejlorov red i ova jednačina se može linearizovati. Rezultat je

$$Q^{(k+1)} = \frac{\Pi_H^{(k+1)} - Z_H}{2r_H Q^{(k)}} + \frac{Q^{(k)}}{2}, \quad (2.51)$$

što po obliku potpuno odgovara linearizovanoj dinamičkoj jednačini (2.33) za cev, odakle se vidi da se hidrant može posmatrati zajedno sa cevi na kojoj se nalazi.

Ako je gubitak energije na toj cevi relativno mali, izraz (2.51) važi za tu cev, a Π_H je jednako pijeometarskoj koti na uzvodnom kraju cevi, $\Pi_i^{(k+1)}$. Ako je u cevi, na kojoj se nalazi hidrant, značajan gubitak energije, treba korigovati jednačinu (2.33), stavljanjem $(r_{ij} + r_H)$ umesto (r_H) .

Uvodjenje elemenata, kao što su hidranti, ne utiče na konvergenciju iterativnog postupka.

Primer 2

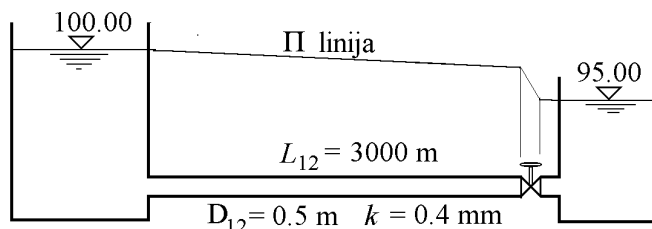
Za dva stepena otvorenosti zatvarača, odnosno, za dve vrednosti koeficijenata lokalnih gubitaka na zatvaraču, $\xi'_{Ha} = 50$, i $\xi'_{Hb} = 100$, odrediti proticaje kroz cevovod, prikazan na slici 2.10, čija je dužina, $L_{12} = 3000$ m, prečnik, $D_{12} = 0.5$ m i hrapavost, $k = 0.4$ mm. Pijeometarska kota u čvoru (1),

⁵ Treba napomenuti da se definicija koeficijenta ξ'_H razlikuje od definicije koeficijenta lokalnog gubitka energije, ξ_H , kako je to uobičajeno u Mehanici fluida, kojom se ξ_H vezuje uz nizvodnu brzinsku visinu. Primenom Bernulijeve jednačine na preseke ispred i iza hidranta lako se dolazi do relacije:

$$\xi'_H = (1 + \xi_H) \frac{A^2}{A_H^2} - 1,$$

gde su A i A_H poprečni preseki cevi i otvora hidranta. Ne treba da čude vrednosti ξ'_H mnogo veće od 1, jer se kod lokalnog gubitka na zatvaraču ne vodi eksplicitno računa o površini preseka kroz koji fluid protiče nego o unutrašnjem preseku prirubnice kojom se zatvarač priključuje na cev. Takođe, vrednosti koeficijenata lokalnih gubitaka za jedan zatvarač se razlikuju ako je iza zatvarača puna cev ili je slobodno isticanje.

na uzvodnom kraju cevi, iznosi $\Pi_1 = 100.00$ m, a nizvodno od zatvarača, $\Pi_2 = 95.00$ m.



Slika 2.10: Primer 2

Proticaj se računa iterativno, modifikovanim izrazom (2.51):

$$Q_{12}^{(k+1)} = \frac{\Pi_1^{(k+1)} - Z_H}{2(r_{12}^{(k)} + r_H)Q_{12}^{(k)}} + \frac{Q_{12}^{(k)}}{2}.$$

Polazna vrednost parametra cevi određuje se preko koeficijenta trenja iz izraza (2.18), za brzinu $V_0 = 1.0$ m/s. Početna vrednost proticaja je, $Q_{12}^{(0)} = V_0 A = 0.1963 \text{ m}^3/\text{s}$.

$$\lambda^{(0)} = 0.01945 \quad r_{12}^{(0)} = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{A^2 2g} = 154.8$$

$$\xi_{Ha} = 50 \quad r_{Ha} = \frac{\xi_{Ha}}{A^2 2g} = 66.1$$

$$Q_{12}^{(1)} = \frac{100.00 - 95.00}{2(154.8 + 66.1)0.1963} + \frac{0.1963}{2} = 0.1558 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\lambda^{(1)} = 0.01962 \quad r_{12}^{(1)} = 156.2$$

$$Q_{12}^{(2)} = \frac{100.00 - 95.00}{2(156.2 + 66.1)0.1558} + \frac{0.1558}{2} = 0.1501 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{12}^{(3)} = \frac{100.00 - 95.00}{2(156.2 + 66.1)0.1501} + \frac{0.1501}{2} = 0.1500 \text{ m}^3/\text{s}$$

Za drugi stepen otvorenosti zatvarača polazi se od iste početne vrednosti proticaja, $Q^{(0)} = 0.1963 \text{ m}^3/\text{s}$:

$$\xi_{Hb} = 100 \quad r_{Hb} = \frac{\xi_{H2}}{A^2 2g} = 132.2$$

$$Q_{12}^{(1)} = \frac{100.00 - 95.00}{2(154.8 + 132.2)0.196} + \frac{0.196}{2} = 0.056 + 0.098 = 0.1425 \text{ m}^3/\text{s}$$

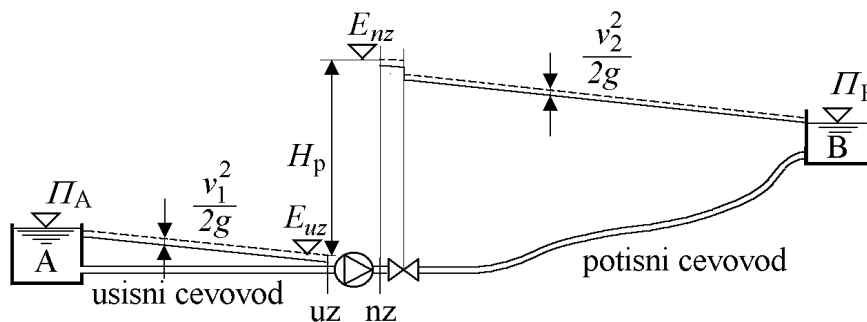
$$\lambda^{(1)} = 0.01970 \quad r_{12}^{(1)} = 156.8$$

$$Q_{12}^{(2)} = 0.1319 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{12}^{(3)} = 0.1315 \text{ m}^3/\text{s}$$

2.4.2 Pumpe

Kada se na cevi (ij) nalazi pumpa (ili crpna stanica), radom pumpe energija fluida se povećava. Na slici (2.11) prikazan je najjednostavniji slučaj crpne stanice sa jednom pumpom, koja deli cevovod na dva dela: usisni i potisni.



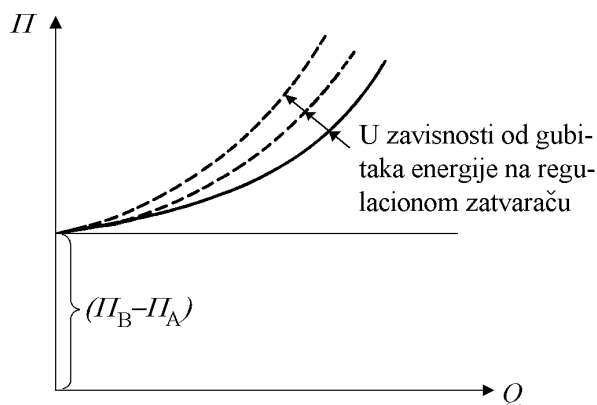
Slika 2.11: Povećanje mehaničke energije fluida u cevi delovanjem pumpe - osnovni pojmovi.

Visina dizanja H_P , (takodje se koristi termin napor pumpe) je razlika energija po jedinici težine, na potisnoj strani, E_{nz} (nizvodno od pumpe - nz) i na usisnoj strani, E_{uz} (uzvodno od pumpe - uz),

$$H_P = E_{nz} - E_{uz} . \quad (2.52)$$

Sa slike se vidi da je jedan deo energije, koju dodaje pumpa, potreban zbog razlike potencijalnih energija u rezervoarima B i A , a da je visina dizanja, H_P , veća od toga, zbog gubitka energije u usisnom i potisnom cevovodu.

Razlika $(\Pi_B - \Pi_A)$, se zove geodetska razlika i ne zavisi od proticaja. Gubici energije zavise od proticaja. Od lokalnih gubitaka posebnu ulogu ima gubitak na zatvaraču na potisnoj strani pumpe, jer se obično njime reguliše proticaj.



Slika 2.12: Kriva otpora cevovoda.

Proticaj pri kome će raditi pumpa (crpna stanica), nije unapred, i za svagda, određen, već zavisi od karakteristike otpora cevovoda (dijagram na slici 2.12). Ordinate krive otpora cevovoda predstavljaju potrebne visine dizanja za različite proticaje za prost cevovod, koji spaja dva rezervoara, A i B .

Izbor odgovarajuće pumpe svodi se na uskladjivanje karakteristike cevovoda i karakteristike pumpe, koja se također može prikazati grafički, ili funkcionalnom zavisnošću visine dizanja pumpe od proticaja.

Kod uključivanja pumpe u proračun, mora se znati smer tečenja u cevi. Karakteristike centrifugalnih pumpi, koje se najviše koriste u vodosnabdevanju, izgledaju kao na slici (2.13). Uobičajeno je (mada, ne i obavezno) da se zavisnost, $H_P = f(Q_P)$, aproksimira parabolom:

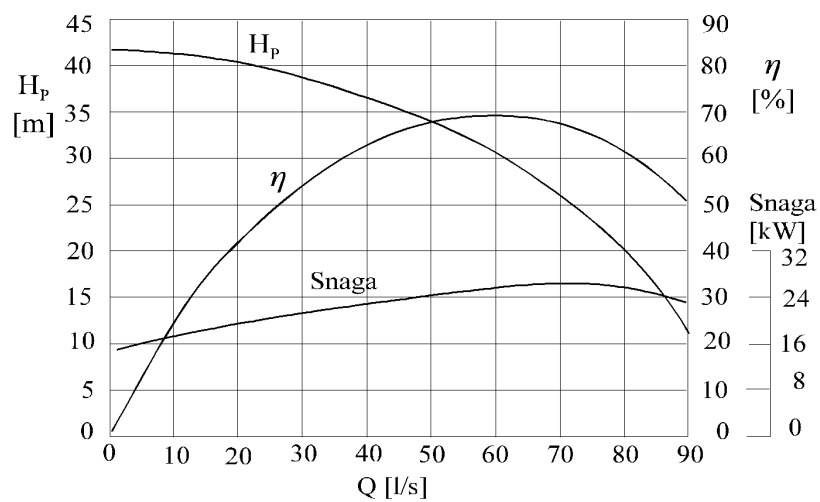
$$H_P = H_0 + A Q_P^2 + B Q_P, \quad (2.53)$$

gde je parametar A uvek negativan. Parametri u prethodnom izrazu zavise od tipa pumpe u crpnoj stanici, njihovog broja, kao i od toga kako su pumpe povezane, serijski ili paralelno, o čemu će biti reči i u Poglavlju 8. Više o pumpama i crpnim stanicama, može se naći u knjizi Radojković i dr. (1989).

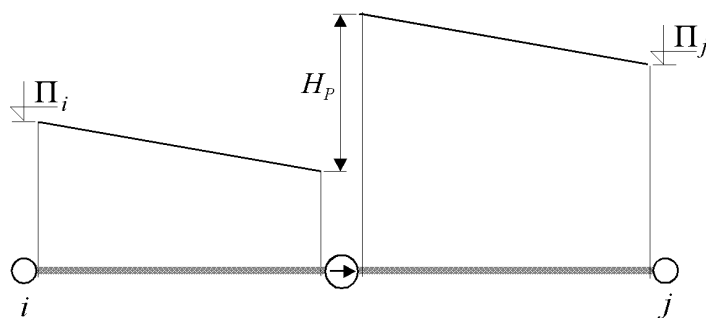
Funkcionalna zavisnost (2.53), može se linearizovati, čime se uklapa u prikazani računski algoritam.

Za cev na kojoj se nalazi pumpa (slika 2.14), sa smerom tečenja od čvora (i) ka čvoru (j), može se napisati

$$\Pi_i - \Pi_j + H_P = r_{ij} Q_{ij} |Q_{ij}|. \quad (2.54)$$



Slika 2.13: Karakteristike jedne centrifugalne pumpe



$$\Pi_i - \Pi_j + (H_0 + AQ_{ij}^2 + BQ_{ij}) = r_{ij}Q_{ij}|Q_{ij}|$$

Slika 2.14: Crpna stanica na cevi (ij)

Linearizacijom izraza dobija se

$$\Delta\Pi^{(k+1)} = \Delta\Pi^{(k)} + \left(2r_{ij}|Q_{ij}| - (2AQ_{ij}^{(k)} + B)\right) (Q_{ij}^{(k+1)} - Q_{ij}^{(k)}), \quad (2.55)$$

gde je $\Delta\Pi = \Pi_i - \Pi_j$. Na kraju, za proticaj u narednoj iteraciji dobija se

$$Q_{ij}^{(k+1)} = \frac{\Pi_i^{(k+1)} - \Pi_j^{(k+1)} + r_{ij}Q_{ij}^{(k)}|Q_{ij}^{(k)}| + (H_0 - A(Q_{ij}^{(k)})^2)}{2r_{ij}|Q_{ij}^{(k)}| - (2AQ_{ij}^{(k)} + B)}. \quad (2.56)$$

$\Pi_i^{(k+1)}$ i $\Pi_j^{(k+1)}$ su pijeometarske kote na uzvodnom i nizvodnom kraju cevi, koje se rešavaju u unutrašnjem iterativnom ciklusu metodom sukcesivnih nadrelaksacija. Član $(2AQ_p + B)$ je manji od nule, tako da bez obzira na znak minus u imeniocu jednačine (2.56), nema opasnosti od deljenja sa nulom. Ukoliko je $(\Pi_i - \Pi_j + H_0)$ manje od nule, dobio bi se proticaj u negativnom smeru. Tada se usvaja da je proticaj kroz pumpu jednak nuli, što se tehnički obezbeđuje postavljanjem nepovratnog ventila u crpnoj stanici.

Ako je cev na kojoj se nalazi pumpa kratka, i ako je gubitak energije mali, $-(\Pi_i^{(k+1)} - \Pi_j^{(k+1)})$, je približno jednako $H_P^{(k+1)}$ pa se može napisati

$$Q_P^{(k+1)} = \frac{H_P^{(k+1)}}{2AQ_P^{(k)} + B} + \frac{A(Q_P^{(k)})^2 - H_{P0}}{2AQ_P^{(k)} + B}. \quad (2.57)$$

Kada je čvor (i), za koji pišemo jednačinu kontinuiteta, nizvodni čvor za cev na kojoj je pumpa, izraz (2.56) treba promeniti, jer je proticaj kroz pumpu negativan proticaj za čvor (i). Ako je $(\Pi_j - \Pi_i + H_0)$ manje od nule, energija koju pumpa dodaje fluidu nije dovoljna da obezbedi tečenje kroz pumpu da se usvaja da je proticaj jednak nuli.

Može se pokazati da sledeći izraz važi za oba slučaja

$$Q_{ij}^{(k+1)} = \frac{\Pi_i^{(k+1)} - \Pi_j^{(k+1)} + r_{ij}Q_{ij}^{(k)}|Q_{ij}^{(k)}| + \delta \cdot (H_0 - AQ_{ij}^{(k)}|Q_{ij}^{(k)}|)}{2r_{ij}|Q_{ij}^{(k)}| - (2A|Q_{ij}^{(k)}| + B)}, \quad (2.58)$$

gde je $\delta = +1$, kada je čvor (i) na uzvodnom kraju cevi, a $\delta = -1$, kada je čvor (i) na nizvodnom kraju cevi.

Kao kod ostalih iterativnih metoda rešavanja sistema jednačina i ovde je potrebno imati neku početnu vrednost. Za cev na kojoj se nalazi crpna stanica, može se pretpostaviti da početni proticaj odgovara $H_P = H_0/2$.

Cevi sa crpnim stanicama, kod kojih su zajedničke karakteristike pumpi aproksimirane kvadratnom parabolom (2.53), ne utiču na konvergenciju iterativnog postupka. Potrebno je samo obezbediti da je $(A \cdot Q^2 + B \cdot Q)$ uvek manje od nule. Kod metode prstenova to nije slučaj. Crpne stanice znatno usporavaju konvergenciju, a nekada je i potpuno onemogućavaju.

Metoda prstenova i Π -metoda imaju svoje prednosti i mane koje su prilično izbalansirane kada se radi o jednostavnim elementima mreže, kao što su to cevi, čvorovi i rezervoari. Kada se predje na složenije elemente, Π -metoda postaje superiorna, što objašnjava činjenicu da je ona ugrađena u većinu komercijalnih programa za analizu rada distribucionih mreža.

Bibliografija

- [1] Abramov N.N., 1974, *Vodosnabženie*, Stroiizdat, Moskva.
- [2] Allen T., Ditsworth R.L., 1972, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Kogakusha Tokyo.
- [3] BERMAD, *Bermad control valves for waterworks, industrial & irrigation applications*, Evron, Israel.
- [4] Epp R., Fowler A.G., 1970, Efficient code for steady-state flows in networks, *J. Hyd. Div. ASCE*, vol. 96, no. HY1.
- [5] Gessler J., 1981, Analysis of pipe networks, *Closed-conduit flow*, eds. H. Choudhry and V. Yevjevich, WRP, Littleton, USA.
- [6] Hardy Cross, 1936, Analysis of flow in networks of conduits or conductors, *University of Illinois, Bulletin No. 286*.
- [7] Idelchik I.E., 1979, *Coefficients de pertes de charge singulieres*, Dunod.
- [8] Kentish D.N.W., 1982, *Industrial Pipework*, McGRAW-HILL Book Company (UK) Limited.
- [9] Miller D. S., 1987, *Internal Flow Systems*, BHRA, Fluid Engineering.
- [10] Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., 1989, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press.
- [11] Radojković M. i Klem N., 1989, *Primena računara u hidraulici*, Gradjevinska knjiga, Beograd.
- [12] Radojković M., Obradović D. i Maksimović Č., 1989, *Računari u komunalnoj hidrotehnici*, Gradjevinska knjiga, Beograd.

- [13] Streeter V. L., Wylie E. B., 1975, *Fluid Mechanics*, sixth edition, International Student Edition, McGraw-Hill.
- [14] Schlichting H., 1968, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill Book Company.
- [15] Yen B.C., 1977, Uncertainties on roughness for pipe design, *Stochastic Processes in Water Resources Engineering*, eds. L. Gottschalk et al., WRP, Fort Collins.

Poglavlje 3

Opšte o neustaljenom tečenju u cevima

3.1 Matematički modeli

Ustaljeno tečenje, razmatrano u prethodnom poglavlju, predstavlja samo inženjersku aproksimaciju stvarnog tečenja vode u cevima. Čak i ako se ne posmatraju neravnomernosti po poprečnom preseku cevi i ne uzima u obzir turbulencija, kretanje vode je uvek neustaljeno zbog stalne promene graničnih uslova tečenja i nemogućnosti vode da se trenutno prilagodi tim promenama. Pored inercije vode i viskoznosti, odnosno, trenja, često značajnu ulogu igraju i elastičnost fluida i zidova cevi. Detaljan opis svih relevantnih pojava dovodi do vrlo složenih jednačina.

Sa druge strane, nepotrebno je i neracionalno da u svakoj prilici koristimo najsloženiji mogući opis tečenja vode u cevima. Model ustaljenog tečenja predstavlja najniži nivo složenosti, odnosno najviši stepen aproksimacije. To ne znači da je zbog toga njegova primena značajno ograničena. Naprotiv, većina inženjerskih analiza zasniva se na primeni pojednostavljenih modela, ali uz dobro poznavanje granica primenljivosti odredjenih modela, odnosno, pretpostavki koje su u njim ugrađene.

Kada je neophodno u analizama voditi računa o neustaljenosti tečenja, bira se odgovarajući, obično složeniji, matematički model. U zavisnosti od problema koji se rešava, brzine promena graničnih uslova, kao i zahtevane tačnosti, možemo se odlučiti za neki od modela neustaljenog tečenja, koji se mogu svrstati u sledeće grupe:

1. Model kvazi-ustaljenog tečenja
2. Model krutog udara (oscilacije vodenih masa)
3. Model elastičnog udara (hidraulički udar)
4. Modeli oscilatornog kretanja i vibracija.

Iako se u praksi često dešava da se ustaljeno tečenje uopšte ne uspostavlja, neustaljeno tečenje treba shvatiti kao prelaz između jednog ustaljenog tečenja u drugo. Zbog toga se podjednako koristi naziv *prelazni režimi* (*transient flows*) kada se govori o neustaljenom tečenju.

3.2 Matematički model kvazi-ustaljenog tečenja

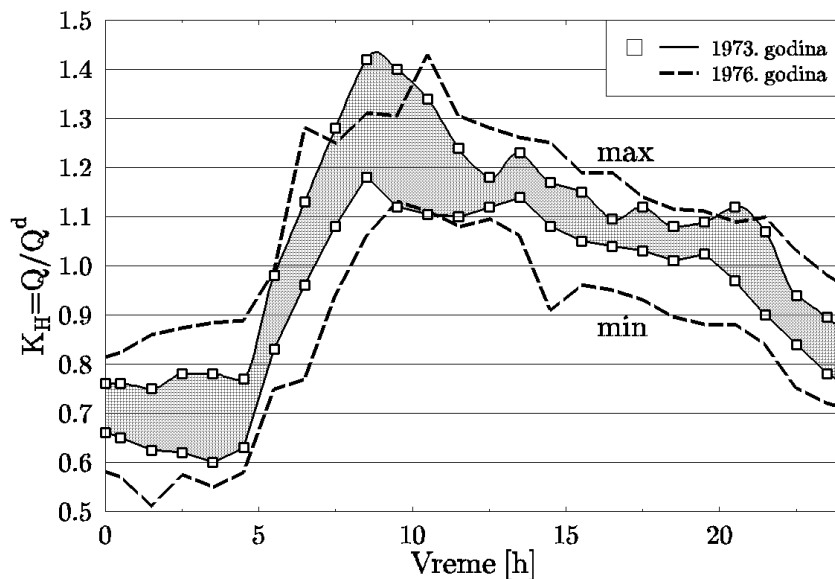
Ovaj tip matematičkog modela najviše se koristi za simulaciju kontinualnog rada distribucionih mreža. Neustaljena i, do određenog stepena, nepredvidljiva čvorna potrošnja, kao i promenljiv režim rada pumpi, zahtevaju postavljanje objekata koji će uskladiti te neravnomernosti. To su rezervoari, koji u matematičkom modelu ustaljenog tečenja predstavljaju nepromenljive pijezometarske kote. Pretpostavka o nepromenljivoj pijezometarskoj koti u rezervoaru važi za ograničeni vremenski period u zavisnosti od dimenzija rezervoara.

Na slici (3.1) prikazani su obvojnice maksimalnih i minimalnih vrednosti koeficijenta dnevne neravnomernosti potrošnje $K_H = Q/Q^d$, za dve karakteristične godine za Beograd.

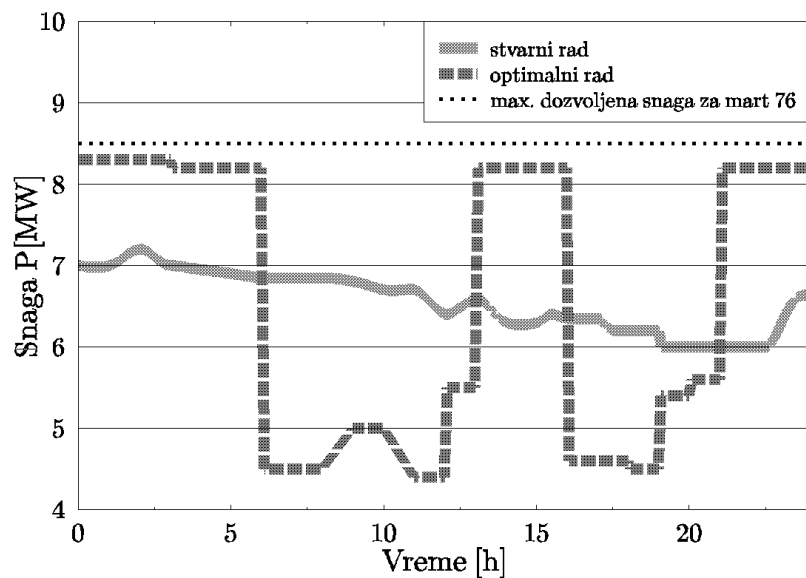
Režim rada pumpi ima manju neizvesnost od dnevne potrošnje, ali su moguće znatno veće varijacije. To je skoro isključivo ekonomska kategorija, koja zavisi od tarifnog sistema elektrodistribucije, sa jedne strane, i cene izgradnje rezervoarskog prostora, sa druge strane. Rezultat jedne analize rada crpnih stanica Beogradskog vodovoda, čiji je cilj bio da se smanje troškovi eksploatacije sistema, dat je na slici (3.2).

Tokom rada distribucione mreže dolazi do promena nivoa vode u rezervoarima, što može bitno da utiče na preraspodelu proticaja u mreži. Da bi se dobila promena nivoa vode u rezervoaru, ΔZ_R , u vremenskom intervalu Δt , jednačina kontinuiteta se primenjuje na čvorove u kojima su rezervoari (slika 3.3),

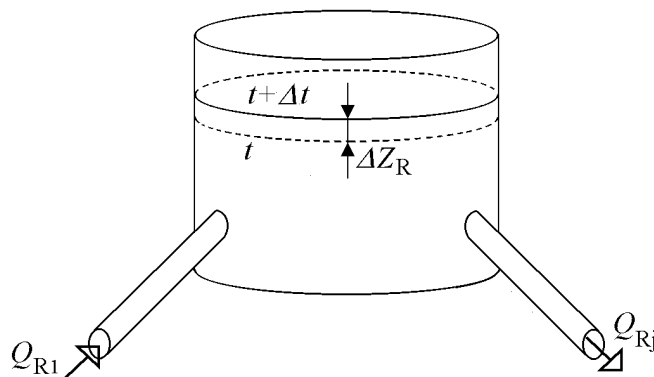
$$\Delta t \sum_j Q_{Rj} = -A_R \cdot \Delta Z_R, \quad (3.1)$$



Slika 3.1: Dnevni dijagrami potrošnje vode za piće za Beograd (Kordić i Obradović, 1979).



Slika 3.2: Stvarno i optimalno korišćenje ukupne snage u crpnim stanicama Beogradskog vodovoda 15. marta 1976. godine (Kordić i Obradović, 1979)



Slika 3.3: Rezervoar

ili u diferencijalnom obliku,

$$\sum_j Q_{Rj} = -A_R \frac{dZ_R}{dt}, \quad (3.2)$$

gde je A_R horizontalna površina rezervoara, koja može biti i funkcija kote nivoa vode u rezervoaru, Z_R .

Znak $(-)$, sa desne strane jednačine, dolazi zbog toga što pozitivnim proticajima odgovara smanjenje kote nivoa. Promene nivoa u rezervoarima distribucione mreže obično su vrlo spore, tako da je pretpostavka da za tečenje u cevima važe jednačine za ustaljeno tečenje, u dosta slučajeva opravdana.

Kontinualna simulacija rada vodovodne mreže sastoji se iz uzastopnog rešavanja sistema jednačina za ustaljeno tečenje u vodovodnoj mreži u određenim trenucima, na način prikazan u prethodnom poglavlju. Na početku svakog (iterativnog) ciklusa rešavanja ustaljenog tečenja u distribucionoju mreži, potrebno je odrediti nove kote nivoa vode u rezervoarima (Z_R) i uzeti odgovarajuće podatke o čvornoj potrošnji. Jednačina (3.2) približno se rešava nekom od metoda za rešavanje običnih diferencijalnih jednačina. Ova približna integracija određuje stabilnost i tačnost rešenja¹, a kako obično nema mnogo rezervoara, preporučuje se korišćenje neke od metoda višeg reda tačnosti.

Bez namere da spisak bude potpun, za ilustraciju postupka daje se nekoliko jednostavnih metoda za približnu integraciju jednačine (3.2):

¹ Misli se na tačnost rešenja jednačina matematičkog modela što nije isto što i tačnost simulacije tečenja u distribucionoju mreži. Ovo je neophodan ali nije i dovoljan uslov za to.

- Ojlerova metoda

$$Z_R^{n+1} = Z_R^n - \frac{\Delta t}{A_R} \sum_j Q_{Rj}^n ;$$

- Leap-frog metoda



$$Z_R^{n+1} = Z_R^{n-1} - \frac{\Delta t}{A_R} \sum_j Q_{Rj}^n ;$$

- Adams-Bašfort (*Adams-Bashforth*)

$$Z_R^{n+1} = Z_R^n - \frac{2\Delta t}{A_R} \left(\frac{3}{2} \sum_j Q_{Rj}^n - \frac{1}{2} \sum_j Q_{Rj}^{n-1} \right) ;$$



- Prediktor-korektor

$$Z_R^{n+1} = Z_R^n - \frac{\Delta t}{A_R} \left(\frac{1}{2} \sum_j Q_{Rj}^n + \frac{1}{2} \sum_j Q_{Rj}^* \right) .$$

Prva metoda je prvog reda tačnosti, dok su preostale tri, drugog reda tačnosti. Medjutim, i medju njima ima dosta razlike. Pored vrednosti na vremenskom nivou (n), druga i treća metoda koriste i vrednosti promenljivih sa prethodnog vremenskog nivoa ($n - 1$). Problem predstavlja početak proračuna jer se ove dve metode tu ne mogu primeniti. To nije beznačajno jer, kod tzv. početnih uslova, greška koja se učini na prvom koraku korišćenjem neke metode niže tačnosti, utiče na ukupnu tačnost proračuna.

Četvrta metoda koristi pomoćne vrednosti Q^* , koje su ocena vrednosti na vremenskom nivou ($n + 1$), dobijene metodom prvog reda tačnosti, recimo Ojlerovom metodom. Vreme koje se troši na računanje je približno dva puta duže nego kod druge i treće metode, ali se zato ne postavlja problem početka proračuna.

Nema dileme da treba koristiti neku metodu koja je višeg reda tačnosti od Ojlerove. Pitanje je da li treba ići još dalje, sa metodama višeg reda tačnosti, recimo, Runge-Kuta (*Runge-Kutta*) trećeg ili četvrtog reda, što podrazumeva više računanja. Odgovor bi bio, da, ako se to isplati. Do povećane tačnosti se može doći i smanjenjem vremenskog koraka (Primer 1 iz Uvoda), pa i formalno manje tačna metoda može dati sasvim prihvatljive rezultate. Na sasvim konkretno pitanje: Da li neka metoda dvostruko višeg reda tačnosti

omogućava bar dvostruko duži vremenski korak, a istu tačnost? odgovor daju Press i dr., (1989): *Uglavnom, čak često, ali, zasigurno, ne uvek*. Povećanje dužine vremenskog koraka nekada nema smisla jer znači gubitak nekih dragocenih informacija. Za simulaciju tečenja vode u distribucionim vodovodnim mrežama preporučuje se da Δt ne bude duže od 30 min, a kao optimalna dužina, preporučuje se 15 min.

3.3 Matematički model krutog udara

Kao i svako telo konačne mase, voda u cevi ne može trenutno da menja svoju brzinu pod dejstvom sila koje na nju deluju. Ako se zadržimo na relativno sporim promenama na granicama cevi, može se pretpostaviti da se fluid u cevi ponaša kao nestišljiv (kruto telo). U tom slučaju, sile pritiska, težine i trenja, $(P + G)$ i T , koje deluju na fluid u cevi (ij) , nisu u ravnoteži (slika 3.4).

Dok se ne dostigne ustaljeno tečenje, njihovo delovanje dovodi do promene količine kretanja fluida u cevi.²

Količina kretanja je proizvod mase i brzine, mV . U vremenskom intervalu Δt sile koje deluju na masu fluida u cevi dovedu do promene količine kretanja $\Delta(mV)$, odnosno, $m\Delta V$

$$m\Delta V = \sum \text{sila} \cdot \Delta t .$$

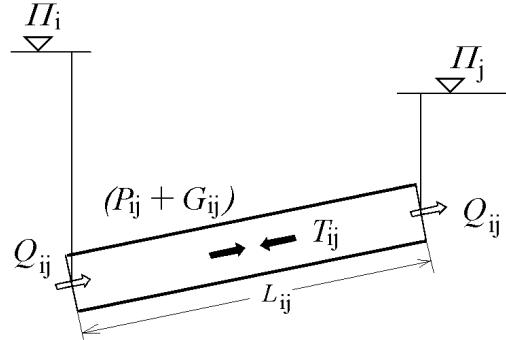
Masa fluida u cevi je nepromenljiva i jednaka je $\rho(AL)_{ij}$, pa se može napisati

$$\rho(AL)_{ij}\Delta V_{ij} = (\underbrace{P_{ij} + G_{ij}}_{\text{jedn.(2.5)}} - \underbrace{T_j}_{\text{jedn.(2.7)}}) \Delta t . \quad (3.3)$$

Deljenjem jednačine sa Δt i pod pretpostavkom da se radi o jako malom vremenskom intervalu ($\Delta t \rightarrow dt$) i odgovarajućoj promeni brzine, dolazi se do diferencijalnog oblika zakona održanja količine kretanja. Sile na desnoj strani jednačine su iste kao za ustaljeno tečenje, pa se korišćenjem oznaka sa slike (3.4) može napisati:

$$\rho(AL)_{ij} \frac{dV_{ij}}{dt} = \rho g A_{ij} (\Pi_i - \Pi_j) - C_\tau \frac{1}{2} \rho V_{ij} |V_{ij}| O_{ij} L_{ij} . \quad (3.4)$$

² Drugi Njutnov zakon mehanike.



Slika 3.4: Sile koje deluju na fluid u cevi

Indeksi (ij), koji označavaju da se veličine odnose na cev izmedju čvorova (i) i (j), mogu se izostaviti da bi se pojednostavilo pisanje.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{L}(\Pi_i - \Pi_j) - C_\tau \frac{1}{2} \frac{V|V|}{R}, \quad (3.5)$$

odnosno, preko proticaja

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{gA}{L}(\Pi_i - \Pi_j) - C_\tau \frac{1}{2} \frac{Q|Q|}{AR}, \quad (3.6)$$

gde je $R = A/O$ hidraulički radijus.

Fluid u cevi se ponaša kao kruto telo, pa odatle i naziv, matematički model krutog udara. Svaka promena na jednom kraju cevi prenosi se trenutno kroz cev, a brzine su iste u svim presecima cevi.

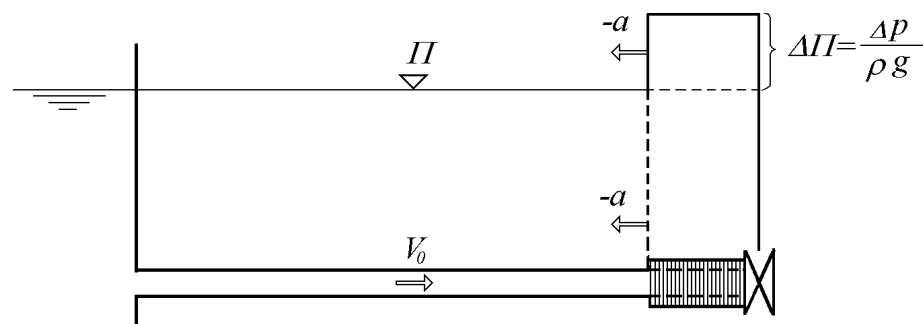
Ako se uvede Darsi-Vajsbahov koeficijent trenja, i ako se radi o cevi kružnog poprečnog preseka, gde je hidraulički radijus $R = D/4$, dobija se:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{gA}{L}(\Pi_i - \Pi_j) - \frac{2\lambda}{D^3\pi} Q|Q|. \quad (3.7)$$

Ova jednačina je osnovna za analize u naredna dva poglavlja.

3.4 Matematički model elastičnog udara (hidraulički udar)

Svaka promena brzine fluida u cevi za ΔV , izaziva određenu promenu pritiska, Δp , kao i promenu gustine $\Delta \rho$. Kada je promena pritiska značajna



Slika 3.5: Poremećaj (povećanje pritiska) izazvan zatvaranjem zatvarača na nizvodnom kraju cevi

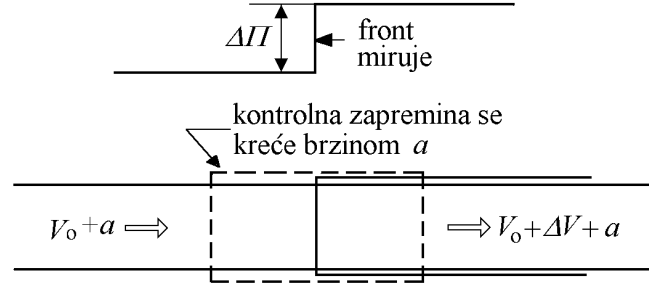
i kada se mora uzeti u obzir promena brzine duž cevi, dolazi se do modela hidrauličkog udara. Ovo je pravi linijski model tečenja u cevima. Pretpostavlja se da su deformacije fluida i cevi male i da je veza između napona i deformacija linearna, pa se koristi naziv elastični udar. Kod nagle promene brzine poremećaj se prostire kroz cev kao talas sa strmim čelom, konačnom, mada dosta velikom brzinom, a . Promene pritiska ili brzine na granicama cevi mogu biti jako brze.

Naziv hidraulički udar je odomaćen u hidrotehničkoj praksi. Verovatno potiče od toga što se pri prolasku talasa povećanja pritiska sa strmim čelom kroz cev čuje zvuk kao da je cev udarena čekićem (engleski *water hammer*). Sam pojam hidraulički udar je znatno širi i obuhvata sve talase promene pritiska fluida u cevi.

U cilju objašnjenja fenomena, posmatra se **trenutno i potpuno** zatvaranje zatvarača na nizvodnom kraju horizontalne cevi konstantnog poprečnog preseka (slika 3.5). Poremećaj u vidu fronta putuje uzvodno, brzinom $(-a)$. Ako se zanemari trenje, pokretni front razdvaja cev na dve zone, sa konstantnim, a međusobno različitim veličinama.

	neporemećena zona	front	poremećena zona
brzina:	V_0		$V_0 + \Delta V$
pritisak:	p_0		$p_0 + \Delta p$
gustina:	ρ_0		$\rho_0 + \Delta \rho$
cev:	A		$A + \Delta A$

Ovaj problem može se, jednostavnom transformacijom koordinatnog sistema, značajno pojednostaviti. U koordinatnom sistemu, koji se kreće za-



Slika 3.6: Pokretna kontrolna zapremina

jedno sa poremećajem brzinom (a), uzvodno, izdvaja se kontrolna zapremina (slika 3.6). U takvom koordinatnom sistemu front se ne pomera, i problem se proučava kao ustaljen. U dva koordinatna sistema, pokretnom i nepokretnom, razlikuju se samo brzine. U pokretnom koordinatnom sistemu u neporemećenoj zoni brzina je jednaka ($V_1 = V_0 + a$), dok je u poremećenoj ($V_2 = V_0 + \Delta V + a$). Takodje, promene $\Delta\rho$ i ΔA , su mnogo manje od referentnih veličina ρ_0 i A .

3.4.1 Promena pritiska i piježometarske kote

Sile koje deluju na kontrolnu zapreminu moraju biti u ravnoteži. Od površinskih sila uzeće se u obzir samo sile pritiska, dok se trenje zanemaruje.

Promena količine kretanja mase fluida u kontrolnoj zapremini je:

$$\begin{aligned}\rho Q(V_2 - V_1) &= \rho_0(V_0 + a)A[(V_0 + \Delta V + a) - (V_0 + a)] \\ \rho Q(V_2 - V_1) &= \rho_0(V_0 + a)A\Delta V.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Komponenta sile pritiska u pravcu tečenja je jednaka:

$$P_1 - P_2 = p_0A - (p_0 + \Delta p)A.\quad (3.9)$$

Izjednačavanjem ova dva izraza, (3.8) i (3.9), dolazi se do vrlo korisne relacije do koje su krajem prošlog veka došli Žukovski u Rusiji i Alijevi (Allievi) u Italiji:

$$\Delta p = -\rho(V_0 + a)\Delta V.\quad (3.10)$$

Iz iskustva se zna da je brzina propagacije, a , znatno veća od brzine strujanja, V , pa se u praksi može koristiti još jednostavniji izraz:

$$\Delta p = -\rho_0 a \Delta V,\quad (3.11)$$

odnosno,

$$\Delta\Pi = -\frac{a}{g}\Delta V . \quad (3.12)$$

Ovi izrazi su od velikog praktičnog značaja, jer omogućavaju približno određivanje promene jedne zavisno promenljive, ako se zna promena one druge.

Medjutim, treba ukazati na to da su greške zbog nekritičke primene ovih relacija česte. Karakterističan je primer delimičnog zatvaranja zatvarača na cevovodu, gde se, zbog nepoznavanja same prirode ove pojave, neosnovano pretpostavlja da je promena brzine fluida proporcionalna promeni položaja zatvarača. Izrazi (3.11) i (3.12) daju pravi odgovor, ako se **zna** promena jedne veličine, a ne i ako se krene od pogrešne pretpostavke.

3.4.2 Brzina prostiranja poremećaja

Dinamička jednačina iskorišćena je za određivanje veze između promene brzine i promene pritiska, dok se jednačina kontinuiteta može iskoristiti za procenu brzine prostiranja poremećaja. Kada se pritisak u fluidu poveća, fluid se sabija a cev širi. Usled toga, cev je sposobna da primi veću količinu fluida nego pod normalnim pritiskom. Promena brzine na nizvodnom kraju cevi se ne oseti istovremeno na uzvodnom kraju cevi. Brzina prostiranja poremećaja zavisi od sposobnosti cevi da primi dodatnu količinu fluida.

U pokretnom koordinatnom sistemu, nema promene mase u kontrolnoj zapremini, a proticaji mase kroz kontrolne površine na ulazi i izlazu

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\text{ulaz}} &= \rho_0 \cdot A \cdot (V_0 + a) , \\ \dot{m}_{\text{izlaz}} &= (\rho_0 + \Delta\rho) \cdot (A + \Delta A) \cdot (V_0 + \Delta V + a) , \end{aligned}$$

su međusobno jednake. Brzina fluida je znatno manja od brzine propagacije talasa, ($V_0 \ll a$), pa se i proizvodi V_0 i $\Delta\rho$, ili ΔA , smatraju malim veličinama višeg reda, i kao takvi se mogu eliminisati. Izjednačavanjem ulaza i izlaza iz kontrolne zapremine, dolazi se do sledećeg izraza:

$$\rho_0 \Delta A a + \Delta\rho A a = -\rho_0 A \Delta V , \quad (3.13)$$

odnosno,

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0} + \frac{\Delta A}{A} \right) a = -\Delta V . \quad (3.14)$$

Radi procene brzine prostiranja poremećaja posmatra se deonica cevi dužine ΔL koju poremećaj predje za vreme Δt (a je dakle jednako $\Delta L/\Delta t$). Jednačina (3.13) se može napisati na sledeći način

$$\rho_0 \Delta A \Delta L + \Delta \rho A \Delta L = -\rho_0 A \Delta V \Delta t . \quad (3.15)$$

Članovi na levoj strani zajedno predstavljaju promenu mase fluida u cevi usled širenja cevi ($\rho_0 \Delta A \Delta L$) i usled sabijanja fluida ($\Delta \rho A \Delta L$), a na desnoj strani je dodatna masa fluida koja udje u cev.

Zapreminski modul stišljivosti fluida po definiciji je jednak

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta \rho / \rho_0} , \quad (3.16)$$

odakle se dobija,

$$\frac{\Delta p}{K} = \frac{\Delta \rho}{\rho_0} , \quad (3.17)$$

Ako je cev slobodno oslonjena lako se dolazi do poprečne deformacije cevi. Iz kotlovske formule sledi da je promena napona u zidu cevi jednaka $\Delta \sigma_T = \Delta p D / (2e)$, a odgovarajuća dilatacija, $\Delta \xi_T = \Delta \sigma_T / E$, gde je, e , debljina zida cevi, a, E , Jangov (*Young*) modul elastičnosti. Relativna promena površine, $(\Delta A/A)$, iznosi, $2\Delta \xi_T$, (Poglavlje 6), odnosno:

$$\frac{\Delta A}{A} = 2 \frac{\Delta \sigma_T}{E} = \frac{\Delta p D}{e E} . \quad (3.18)$$

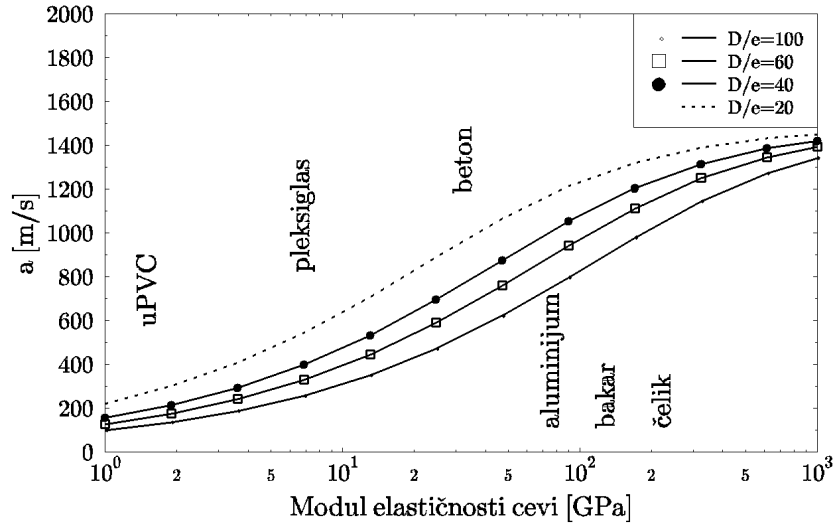
Preko jednačina (3.14) i (3.11) dolazi se do

$$\left(\frac{\Delta p}{K} + \frac{\Delta p D}{e E} \right) a = \frac{\Delta p}{\rho_0 a} , \quad (3.19)$$

odakle se dobija izraz za brzinu propagacije poremećaja kroz cev

$$a^2 = \frac{K/\rho_0}{1 + \frac{K D}{E e}} . \quad (3.20)$$

Na slici (3.7) prikazana je promena brzine propagacije talasa kroz vodu u zavisnosti od elastičnosti zida cevi i relativne debljine zida cevi, odnosno, D/e . Takodje, naznačene su oblasti koje odgovaraju pojedinim materijalima od kojih se prave cevi. Zapreminski modul stišljivosti vode iznosi 2.20 GPa (na temperaturi 20 °C).



Slika 3.7: Uticaj elastičnosti zida cevi i odnosa D/e na brzinu propagacije talasa u vodi

Može se ukazati na dva ekstremna slučaja. Kada je deformacija cevi mnogo manja od deformacije fluida, tada je $\Delta A/A$ vrlo malo, a brzina propagacije poremećaja postaje bliska brzini zvuka u neograničenom fluidu, odnosno:

$$a \approx a_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}. \quad (3.21)$$

Prema podacima iz tabele (3.1), brzina propagacije u samoj vodi je oko 1450 m/s, dok je u vodi koja se nalazi u cevi još manja.

Kod vrlo deformabilnih provodnika (guma, krvni sudovi i slično), drugi član u imeniocu jednačine (3.20), postaje dominantan, tako da je brzina propagacije jednaka:

$$a \approx \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{\Delta A/A}}. \quad (3.22)$$

U takvim slučajevima, potrebno je na drugi način definisati vezu između napona i deformacije zidova cevi.

Na brzinu propagacije talasa u cevi utiču i drugi faktori, kao što su način oslanjanja cevi, oblik poprečnog preseka, prethodno stanje napona u zidovima cevi, koncentracije rastvorenih i suspendovanih materija u vodi itd, što će se pokazati kasnije (u Poglavljju 9.).

Tabela 3.1: Fizičke karakteristike vode

temperatura t [$^{\circ}C$]	gustina ρ [$\frac{kg}{m^3}$]	viskoznost ν [$10^6 \frac{m^2}{s}$]	modul stišljivosti K [$10^{-9} \frac{N}{m^2}$]
0	999.9	1.792	2.04
5	1000.0	1.519	2.06
10	999.7	1.308	2.11
15	999.1	1.141	2.14
20	998.2	1.007	2.20
25	997.1	0.897	2.22
30	995.7	0.804	2.23

3.5 Matematički modeli oscilatornog kretanja i vibracija

Ova oblast se razvijala pod direktnim uticajem istraživanja u oblasti elektrotehnike i automatike. Zavisno promenljive veličine proučavaju se najčešće u transformisanim koordinatama, odnosno, u frekventnom domenu.

Metodologije analize odudaraju od onih koje se standardno koriste u Hidraulici, i mogu se podeliti u dve grupe:

- Metode frekventnog odziva, izazvanog ustaljenim prinudnim vibracijama, i
- Metode slobodnih vibracija, gde se pretpostavlja da slobodne vibracije proticaja i pritiska već postoje u sistemu, a sam izvor nije bitan.

Kod metode frekventnog odziva, pritisak i proticaj u svakoj tački sistema osciluju istom frekvencijom, kao i pobuda. Pobuda može biti oscilacija nivoa vode u rezervoaru usled talasa na površini, oscilacije zatvarača, rad pumpe, odvajanje vrtloga itd. Oscilacije zavisno promenljivih, proticaja i pritiska, imaju različite amplitude i fazno su pomerene u zavisnosti od položaja poprečnog preseka, ali se ne menjaju kroz vreme. Radi lakših transformacija, jednačine se prvo linearizuju, za šta je potrebna pretpostavka o malim promenama. Dobijene jednačine se relativno jednostavno rešavaju sa proizvoljnom tačnošću.

Pored posmatranja u frekventnom domenu, oscilatorno kretanje se može proučavati i u realnom vremenu, odnosno, korišćenjem modela elastičnog udara (pa čak i modela krutog udara). Razvojem računara, posebno personalnih, došlo se do nivoa kada dugotrajna simulacija (reda veličine stotine hiljada vremenskih priraštaja) ne predstavlja naročiti problem, čak i za relativno velike mreže.

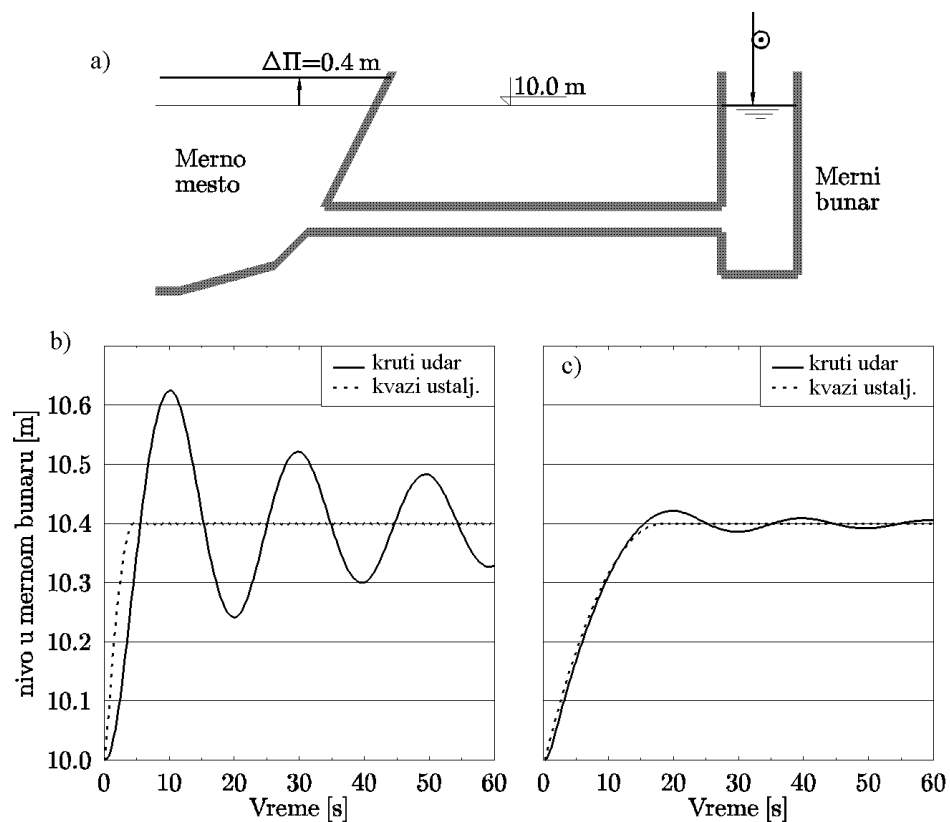
3.6 Granice važenja pojedinih modela

Svi modeli, pomenuti u ovom poglavlju, stoje na raspolaganju inženjeru za analizu neustaljenog tečenja slabo stišljivog fluida u cevima. Kada će koji biti primenjen nije jednostavno odrediti. Naime, ne mogu se unapred podeliti problemi i oblasti i dodeliti im se odgovarajući modeli, kao što se često misli. Tako, na primer, vlada uverenje da probleme distribucije vode treba rešavati isključivo modelima kvazi-ustaljenog tečenja, da probleme oscilovanja vode u tunelima derivacionih hidroelektrana treba rešavati modelima krutog udara, probleme regulacije proticaja i nivoa modelima oscilatornog kretanja, i slično. Takva podela je neprihvatljiva, jer primena modela zavisi prvenstveno od hidrauličkih pokazatelja tečenja u cevima. Podela materije u ovoj knjizi napravljena je po istom principu, i izlaganje ide od najjednostavnijih modela i njihove primene, ka složenijim.

U prilog prethodnom razmatranju o primenljivosti različitih matematičkih modela, analizira se primer neustaljenog tečenja u sistemu za merenje nivoa tečnosti u rezervoarima i u otvorenim tokovima (Ivetić, Maksimović, 1984). Podatak o nivou je jedna od osnovnih informacija kod kontrole i regulacije rada hidrotehničkih sistema. Da bi se obezbedili optimalni uslovi rada i održavanja opreme za merenje nivoa, nivo se meri u posebnom rezervoaru, koji je hidraulički povezan sa mestom u kom se zahteva podatak o nivou. Na slici (3.8.a) shematski je prikazana veza izmedju mernog mesta i mernog bunara.

Posmatra se nagla promena nivoa u mernom preseku (tzv. odskočna funkcija, *step function*). Promena nivoa u mernom bunaru kasni za promenom nivoa na mernom mestu. Da bi se dobila slika o funkcionisanju ovog sistema za merenje potrebno je analizirati rad sistema odgovarajućim matematičkim modelom za neustaljeno tečenje. Reč *odgovarajući*, iako lepo zvuči, praktično, ne znači mnogo.

Na slici (3.8), levo i desno, određene su promene nivoa u mernom bunaru,



Slika 3.8: a) Registrovanje promene nivoa na mernom mestu (u reci ili rezervoaru) merenjem u mernom bunaru ($A = 0.2\text{m}^2$). Spojna cev: $L = 15$ m, $D = 0.20$ m, $\lambda = 0.02$. b) Promena nivoa u mernom bunaru za $\sum \xi = 5$. c) Promena nivoa u mernom bunaru za $\sum \xi = 100$.

za dva slučaja, korišćenjem modela kvazi-ustaljenog tečenja i modela krutog udara. Odstupanje rezultata je značajno na prvom dijagramu, dok je na drugom zanemarljivo. Razlika između ova dva slučaja je u lokalnim gubicima energije u spojnoj cevi. U prvom slučaju (dijagram levo) lokalni gubici iznose 5 brzinskih visina fluidne struje u cevi, a u drugom, 100. Povećani gubici energije doveli su do prigušenja nepoželjnih oscilacija nivoa u mernom bunaru, i do smanjenja razlike između rezultata koje daju dva modela. U oba slučaja, matematički model krutog udara je odgovarajući model za analizu, dok bi model kvazi-ustaljenog tečenja to mogao da bude u drugom slučaju.

Neustaljeno tečenje u cevima može se proučavati matematičkim modelima različite složenosti. Granice njihove primene nisu stogo definisane, a izbor matematičkog modela, kojim će se neki problem analizirati, zavisi od mnogo faktora. U narednim poglavljima, pružiće se dovoljno informacija o pojedinim modelima, kako bi se posao izbora odgovarajućeg modela olakšao.

Bibliografija

- [1] Ivetić M, Maksimović Č, 1984, Feasibility of the use of an ultrasonic depth gauge in a stilling well for a telemetric system, HYDROSOFT 84, Portorož, editori: C. A. Brebbia, Č. Maksimović, i M. Radojković, Elsevier, Amsterdam.
- [2] Kordić M., Obradović D., 1979, Analiza razlika između proizvedene i fakturisane količine vode u Beogradu primenom matematičkog modeliranja i banke podataka, Savetovanje Udruženja za tehnologiju vode *Gubici u sistemu vodovoda*, Kragujevac.
- [3] Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., 1989, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press.

Poglavlje 4

Oscilacije tečnosti u cevima

Matematički model krutog udara daje, u dosta slučajeva, promene proticaja u cevima vrlo bliske stvarnim. Promene nivoa u rezervoarima su takodje verodostojne. Zbog toga, oblast primene modela krutog udara može se proširiti (barem za grubu analizu) i na one slučajeve gde nas ne zanima šta se dešava duž cevi, nego samo vreme i način kako se stiže do novog ustaljenog tečenja.

Za odredjen broj jednostavnih slučajeva može se doći do analitičkih rešenja, koja se mogu iskoristiti za definiciju osnovnih pojmova vezanih za model krutog udara, za procenu reda veličine karakterističnih pokazatelja tečenja, kao i za verifikaciju numeričkih modela pre njihove primene na komplikovanije slučajeve.

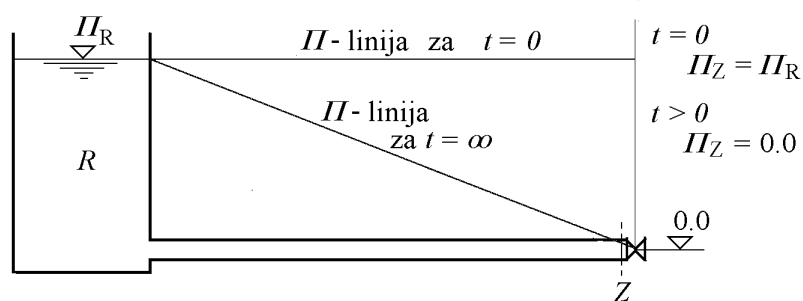
4.1 Uspostavljanje ustaljenog tečenja

Najjednostavniji način da se ilustruje primena matematičkog modela krutog udara je na primeru uspostavljanja ustaljenog tečenja nakon trenutnog i potpunog otvaranja zatvarača na nizvodnom kraju horizontalne cevi (slika 4.1).

Dinamička jednačina za fluid u cevi konstantnog poprečnog preseka, na osnovu (3.6), od rezervoara do zatvarača, glasi:

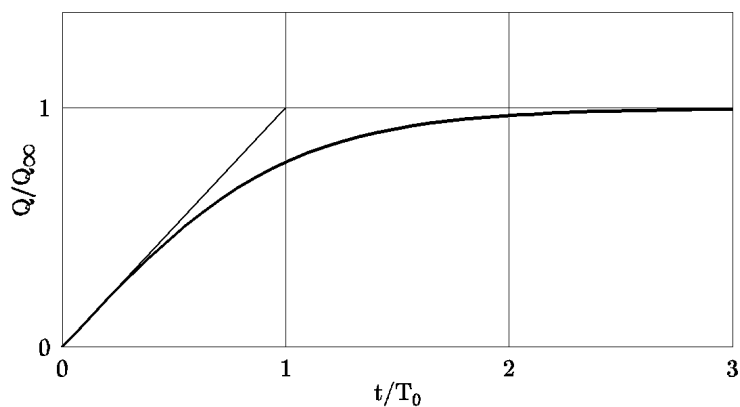
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{gA}{L}(\Pi_R - \Pi_Z) - \frac{2\lambda}{D^3\pi}Q|Q| . \quad (4.1)$$

U početnom trenutku voda u cevi miruje. Proticaj je jednak nuli, jer je $\Pi_Z = \Pi_R$. Za $t > 0$, zatvarač je potpuno otvoren i $\Pi_Z = 0$. Počinje ubrzavanje



Slika 4.1: Naglo otvaranje zatvarača na kraju cevi (kruti udar)

vode u cevi pod dejstvom sile pritiska (prvi član na desnoj strani jednačine 4.1). Nagib linije promene proticaja (slika 4.2), u početnom trenutku, jednak je tom članu.



Slika 4.2: Uspostavljanje ustaljenog tečenja

Drugi član na desnoj strani jednačine, usled sile trenja, postepeno se povećava da bi se u beskonačnosti izjednačio sa prvim, usled sile pritiska. Tada je postignuto ustaljeno tečenje, $dQ/dt = 0$, odnosno:

$$Q_{\infty}^2 = 2g A^2 \frac{D}{\lambda L} (\Pi_R - \Pi_Z) . \quad (4.2)$$

Da bi se uklonio član sa trenjem, dinamička jednačina može se modifikovati na sledeći način,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{gA \Delta \Pi}{L Q_{\infty}^2} [Q_{\infty}^2 - Q^2] , \quad (4.3)$$

odnosno,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{T_0} \frac{Q_\infty^2 - Q^2}{Q_\infty}, \quad (4.4)$$

gde je, $\Delta\Pi = \Pi_R - \Pi_Z$, a T_0 , karakteristično vreme za koje bi se postigao proticaj, Q_∞ , pod dejstvom sile pritiska. Dobija se iz jednačine pravca tangente na krivu promene proticaja u početnom trenutku

$$\frac{Q_\infty - 0}{T_0} = \frac{gA}{L} \Delta\Pi,$$

odnosno,

$$T_0 = \frac{L Q_\infty}{gA\Delta\Pi} = \sqrt{\frac{2DL}{g\Delta\Pi\lambda}}, \quad (4.5)$$

Jednačina (4.4) je obična diferencijalna jednačina, koja se, uz uslov $Q \neq Q_\infty$, može integrisati:

$$\int_0^t dt = T_0 Q_\infty \int_0^Q \frac{dQ}{Q_\infty^2 - Q^2},$$

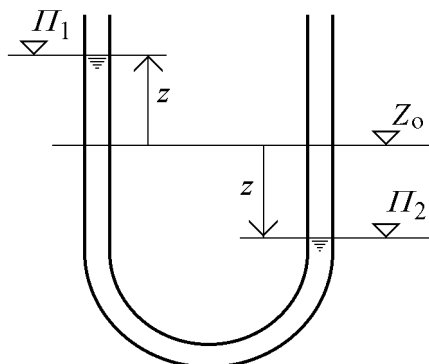
$$t = T_0 Q_\infty \frac{1}{2 Q_\infty} \ln \frac{Q_\infty + Q}{Q_\infty - Q}.$$

Teorijski, ustaljeno tečenje, odnosno, Q_∞ , dostiže se u beskonačnosti. Praktično, može se zadati "dozvoljena greška aproksimacije" ustaljenog tečenja, i tada se dolazi do konačne vrednosti vremena uspostavljanja ustaljenog tečenja. Ako je dozvoljena greška 1 %, vreme za koje će se postići Q_∞ (odnosno, $0.99 \cdot Q_\infty$) je:

$$t_{99\%} = \frac{T_0}{2} \ln \frac{1.99}{0.01} = 2.646 T_0 \quad (4.6)$$

4.2 Oscilacije tečnosti u cevi konstantnog poprečnog preseka

U prethodnom primeru, sila koja izaziva promenu količine kretanja, sila pritiska, bila je konstantna. Kod cevi konstantnog poprečnog preseka, sa dva vertikalno postavljena kraka (slika 4.3), pijeometarske kote na krajevima vodenog stuba, Π_1 i Π_2 , menjaju se ako se vodeni stub izvede iz ravnoteže. U težnji da se ponovo uspostavi ravnotežno stanje, stub tečnosti osciluje oko ravnotežnog položaja. Pod dejstvom sile trenja amplituda oscilacija se postepeno smanjuje i na kraju oscilacije potpuno odumiru.



Slika 4.3: Oscilacije tečnosti u cevi konstantnog preseka

4.2.1 Oscilacije bez trenja

Posmatra se najpre slučaj kada na masu fluida u cevi deluju samo sile težine i pritiska. Dinamička jednačina za fluid u cevi može se napisati na sledeći način:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{L} (\Pi_1 - \Pi_2) \quad . \quad (4.7)$$

Pijezometarske kote u vertikalnim cevima podjednako su udaljene za z od ravnotežnog položaja Π_0 ,

$$\Pi_1 = \Pi_0 + z \quad ,$$

$$\Pi_2 = \Pi_0 - z \quad ,$$

$$\Pi_1 - \Pi_2 = 2z \quad ,$$

Prema ovome, član na desnoj strani jednačine (4.7) je pozitivan kada je Π_1 veće od Π_2 .

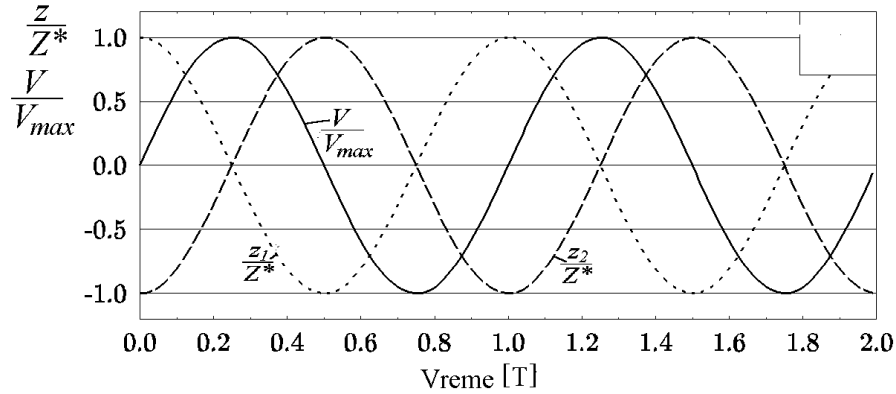
$$\frac{dV}{dt} = \frac{2g}{L} z \quad . \quad (4.8)$$

Brzina pomeranja tečnosti, V , takodje se može izraziti preko (z). Pošto je usvojeno da je smer brzine pozitivan (od 1 ka 2) kada se Π_1 smanjuje, uvodi se da je:

$$V = -\frac{dz}{dt} \quad ,$$

pa se prethodna jednačina može dalje pojednostaviti:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{2g}{L} z \quad . \quad (4.9)$$



Slika 4.4: Neprigušene oscilacije u cevi.

Opšte rešenje ove jednačine je:

$$z = C_1 \cos \sqrt{\frac{2g}{L}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{2g}{L}}t , \quad (4.10)$$

Integracione konstante C_1 i C_2 određuju se iz početnih uslova:

1. U početnom trenutku stub tečnosti izveden je iz ravnoteže i maksimalno je udaljen od ravnotežnog položaja, odnosno, za $t = 0$ i $z = Z^*$, dobije se, $C_1 = Z^*$;
2. U tom trenutku fluid miruje i $dz/dt = 0$, pa se dobija da je $C_2 = 0$.

Rešenje za neprigušene oscilacije tečnosti glasi (slika 4.4):

$$z = Z^* \cos \sqrt{\frac{2g}{L}}t , \quad (4.11)$$

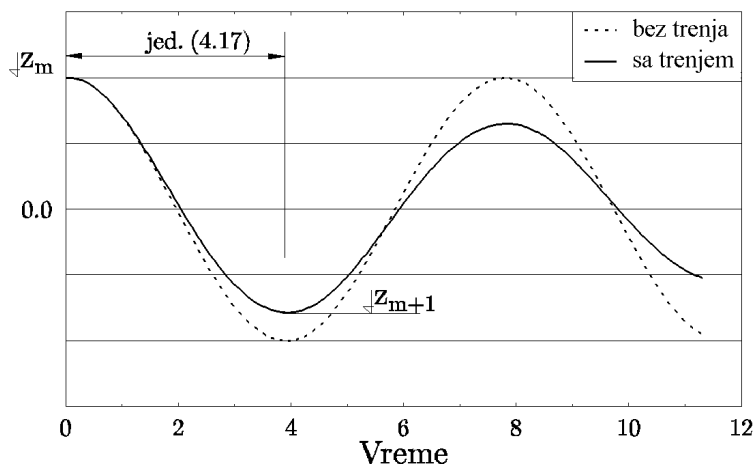
$$V = -\frac{dz}{dt} = Z^* \sqrt{\frac{2g}{L}} \sin \sqrt{\frac{2g}{L}}t . \quad (4.12)$$

Perioda kompletne oscilacije je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}} . \quad (4.13)$$

a maksimalna brzina, koja se javlja pri prolazu nivoa kroz ravnotežni položaj, Π_0 , je:

$$V_{max} = Z^* \sqrt{\frac{2g}{L}} . \quad (4.14)$$



Slika 4.5: Promena nivoa tečnosti u cevi konstantnog preseka bez trenja i sa trenjem

4.2.2 Oscilacije tečnosti sa trenjem

Uvodi se sila trenja

$$T = C_\tau \frac{1}{2} \rho V |V| OL, \quad 4C_\tau = \lambda$$

koja koči oscilacije:

$$\frac{dV}{dt} - \frac{2g}{L}z + \frac{\lambda}{2D}V|V| = 0. \quad (4.15)$$

Eliminisanjem brzine dolazi se do sledeće jednačine

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\lambda}{2D} \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| + \frac{2g}{L}z = 0. \quad (4.16)$$

Ovo je nelinearna diferencijalna jednačina koja se ne može egzaktno integrisati, ali može numerički, o čemu će biti reči kasnije.

Ako se, međjutim, pretpostavi da je koeficijent trenja konstantan, jednačina se može jednom integrisati po vremenu. Posmatra se oblast pozitivne brzine, kada z opada (odnosno, pijezometarska kota Π_1 opada, a Π_2 raste). Oblast na koju se ograničava važnost ovih razmatranja naznačena je na slici (4.5), a jednačina glasi,

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{\lambda}{2D} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{2g}{L} z = 0 . \quad (4.17)$$

Posle jednostruke integracije ove jednačine dobija se:

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{4gD^2}{\lambda^2 L} \left(1 + \frac{\lambda z}{D} \right) + C \exp \left(\frac{\lambda z}{D} \right) . \quad (4.18)$$

Vrednost integracione konstante C dobija se iz početnog uslova:

$$\begin{aligned} t = t_0, \quad dz/dt = 0, \quad z = z_m \\ C = -\frac{4gD^2}{\lambda^2 L} \left(1 + \frac{\lambda z}{D} \right) \exp \left(-\frac{\lambda z_m}{D} \right) \\ \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{4gD^2}{\lambda^2 L} \left(1 + \frac{\lambda z}{D} - \left(1 + \frac{\lambda z_m}{D} \right) \exp \left(\frac{\lambda(z - z_m)}{D} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Jednačina se ne može dalje integrirati ali se može iskoristiti za određivanje veličine uzastopnih ekstremnih oscilacija. Na osnovu, z_m , maksimuma, od čega polazimo, dolazi se do, z_{m+1} , minimuma, kada je opet, $dz/dt = 0$. Na osnovu slike (4.5) jasno je da je z_m pozitivno a z_{m+1} negativno.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{\lambda z_{m+1}}{D} = \left(1 + \frac{\lambda z_m}{D} \right) \exp \left(-\frac{\lambda z_m}{D} \right) \exp \left(\frac{\lambda z_{m+1}}{D} \right) \\ \left(1 + \frac{\lambda z_{m+1}}{D} \right) \exp \left(-\frac{\lambda z_{m+1}}{D} \right) = \left(1 + \frac{\lambda z_m}{D} \right) \exp \left(-\frac{\lambda z_m}{D} \right) \end{aligned}$$

Prethodni izraz može se prikazati grafički (Slika 4.6) i skraćeno:

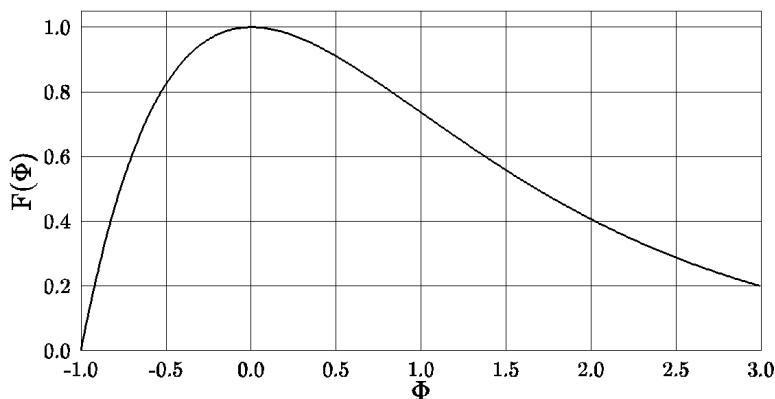
$$F(\phi) = (1 + \phi)e^{-\phi} \quad (4.20)$$

gde je $\phi = \lambda z/D$.

Na slici je prikazan samo jedan deo rešenja, za ϕ između -1.0 i $+3.0$. Korišćenje dijagrama je jednostavno. Za poznato (pozitivno) z_m sračuna se ϕ_+ i odgovarajuće $F(\phi_+)$, a dalje iz uslova

$$F(\phi_+) = F(\phi_-), \quad \text{odnosno, } F(\phi_m) = F(\phi_{m+1})$$

dobije se, ϕ_{m+1} , i vrednost minimuma oscilacije, z_{m+1} . Interesantno je to da prigušenje koje ograničava narednu oscilaciju ne zavisi od dužine stuba



Slika 4.6: Analitičko rešenje za ekstremne oscilacije tečnosti u cevi konstantnog preseka

tečnosti, nego samo od prečnika cevi i koeficijenta trenja. Linija $F(\phi_+)$ teži nuli ostajući stalno pozitivna, dok $F(\phi_-)$ postaje negativno za ϕ manje od -1 . Rezultat ovoga je zapanjujući: *bez obzira kolika je amplituda prve oscilacije z_m , naredna amplituda ne može biti veća od D/λ zbog prigušenja usled trenja.*

$$|z_{m+1}| \leq \frac{D}{\lambda} \quad (4.21)$$

Pretpostavka o konstantnoj vrednosti koeficijenta trenja važi samo za turbulentno tečenje u hrapavim cevima. Kako brzina usled delovanja trenja opada tako se neizbežno dolazi do oblasti promenljivog koeficijenta trenja, $\lambda(sfRe)$. U oblasti laminarnog tečenja može se takodje doći do analitičkog rešenja (Wylie, Streeter, 1978), koje se ne navodi ovde jer je manjeg praktičnog značaja za hidrotehniku.

Primer 1

U cevi unutrašnjeg prečnika, $D = 0.1\text{m}$, na dužini od $L = 30\text{m}$, nalazi se voda. Krajevi cevi su vertikalno postavljeni i početna denivelacija vode u njima iznosi $z_m = 2\text{m}$. Ako je koeficijent trenja konsantan, i iznosi $\lambda = 0.04$, kolika je naredna ekstremna vrednost $|z_{m+1}|$? Da li će za $z_m = 6\text{m}$ i odgovarajuće $|z_{m+1}|$ biti tri puta veće?

$$\phi_m = 0.04 \frac{2}{0.1} = 0.800 ,$$

$$F(\phi_m) = 0.809 = F(\phi_{m+1}) .$$

Sa dijagrama na slici 4.6, ili rešavanjem odgovarajuće jednačine, dobija se:

$$\phi_{m+1} = -0.516 \longrightarrow z_{m+1} = \frac{\phi_{m+1}D}{\lambda} = -1.29\text{m} .$$

Za $z_m = 6\text{ m}$ i $\phi_m = 2.4$, dobija se

$$F(\phi_m) = 0.308 = F(\phi_{m+1})$$

Odgovarajuća vrednost $z_{m+1} = -2.18\text{ m}$, jer je $\phi_{m+1} = -0.871$.

Kao što se vidi, novo $|z_{m+1}|$ nije tri puta veće od prvobitnog. Takođe, ono je manje i od $D/\lambda = 2.5\text{ m}$, što predstavlja graničnu vrednost.

4.3 Oscilacije tečnosti u spojenim rezervoarima

Za razliku od oscilacija tečnosti u cevima konstantnog poprečnog preseka, gde se može prigovoriti da se radi o slučaju koji nema praktičnog značaja, oscilacije tečnosti u spojenim rezervoarima se često javljaju. Tečnost u cevi i dalje osciluje pod dejstvom sila i svoje inercije, samo što u ovom slučaju površine rezervoara utiču na karakter promene brzine u cevi i piježometarskih kota, a time i na periodu oscilovanja.

Na slici 4.7 data je skica rezervoara sa odgovarajućim oznakama. Piježometarske kote, Π_1 i Π_2 , obeležavaju kote nivoa u rezervoarima (1) i (2) u odnosu na neki apsolutni referentni nivo, a z_1 i z_2 , u odnosu na ravnotežni nivo Z_0 .

Pored linijskih gubitaka energije (usled trenja) mogu se uzeti u obzir i lokalni gubici. Oni se bez velikih problema mogu uključiti u efektivni koeficijent trenja.

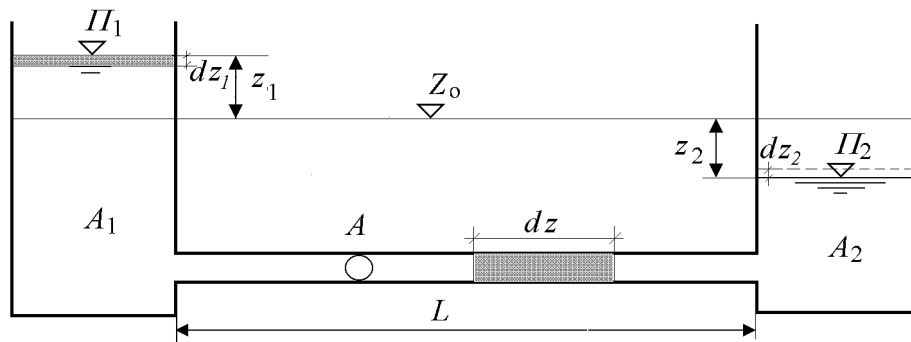
$$\lambda_e = \lambda + \sum \xi \frac{D}{L} \quad (4.22)$$

Dinamička jednačina za fluid u cevi između dva rezervoara glasi:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{L} (z_1 - z_2) - \frac{\lambda_e}{2D} V|V| . \quad (4.23)$$

Koristeći jednačine kontinuiteta za rezervoare, umesto nivoa u rezervoarima može se uvesti pomoćna promenljiva, z , koja predstavlja pomeranje tečnosti u cevi između rezervoara, u odnosu na ravnotežni položaj,

$$- dz_1 A_1 = dz_2 A_2 = dz A , \quad (4.24)$$



Slika 4.7: Oscilacije tečnosti u spojenim rezervoarima

a, A , A_1 i A_2 , su, redom, površine poprečnog preseka cevi, rezervoara (1) i rezervoara (2). Iako se ne meri u vertikalnom pravcu, za pomeranje tečnosti u cevi koristi se oznaka z , zbog analogije sa prethodnim primerom. Tada se dinamička jednačina može dovesti na oblik koji odgovara jednačini (4.17), za oscilacije tečnosti u cevi konstantnog preseka:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{gA}{L} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) z - \frac{\lambda_e}{2D} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = 0 . \quad (4.25)$$

Članu $2g/L$, iz jednačine (4.17), odgovara član

$$\frac{gA}{L} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) ,$$

pa se analitičko rešenje i ostala razmatranja mogu direktno primeniti i ovde.

Perioda oscilovanja bez trenja iznosi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{gA(1/A_1 + 1/A_2)}} . \quad (4.26)$$

Uz postavljanje istog ograničenja, da jednačina važi samo za slučaj kada z opada, odnosno, da brzina ne menja znak, i jednačina (4.25) se može jedanput integrisati.

Da bi se dobile uzastopne ekstremne vrednosti, jednačina (4.20) se koristi direktno sa $\phi = \lambda_e z/D$. Ekstremne oscilacije nivoa takodje su ograničene,

i to različito za rezervoare (1) i (2). Bez obzira koliki je početni otklon iz ravnotežnog položaja, (z) mora biti manje od (D/λ_e) , a nivoi u rezervoarima,

$$(z_1)_{m+1} \leq \frac{D}{\lambda_e} \frac{A}{A_1} , \quad (4.27)$$

$$(z_2)_{m+1} \leq \frac{D}{\lambda_e} \frac{A}{A_2} . \quad (4.28)$$

Primer 2

Cev iz primera 1 (dužine, $L = 30$ m, prečnika $D = 0.1$ m, efektivni koeficijent trenja $\lambda_e = 0.04$), spaja dve vertikalne cilindrične posude. Posmatraju se dva slučaja: (a) prečnik posuda je $D_1 = D_2 = 0.35$ m, i (b) prečnik posuda je $D_1 = D_2 = 0.70$ m.

U prvom trenutku, nivo u posudi (1) je 2 m iznad ravnotežnog položaja, a brzina je jednaka nuli. Zatvarač na cevi se naglo otvori i voda kreće kroz cev. Koliki je naredni minimum u posudi (1), za oba slučaja?

(a)	(b)
$z_m = \frac{A_1}{A} (z_1)_m = 3.5^2 \cdot 2 = 24.5\text{m}$	$z_m = 98\text{m}$
$\phi_m = 0.04 \cdot \frac{24.5}{0.1} = 9.80$	$\phi_m = 39.2$
$F(\phi_m) = 0.0006 \approx 0.00 = F(\phi_{m+1})$	
$\phi_{m+1} = -1.000 \implies (z_1)_{m+1} = -0.204\text{m}$	$(z_1)_{m+1} = -0.051\text{m}$

Periode oscilovanja su, $T_a = 27.2$ s, i $T_b = 54.4$ s.

I ovaj primer može se iskoristiti za približavanje odgovoru o granicama primenljivosti modela kvazi-ustaljenog tečenja i krutog udara. Naime, isti zadatak može se rešiti modelom kvazi ustaljenog tečenja. Za tečenje u cevi važi:

$$\frac{g}{L} (z_1 + z_2) = \frac{\lambda}{2D} V|V| ,$$

odnosno,

$$V = \sqrt{\frac{2gD}{\lambda L} (z_1 + z_2)} = \sqrt{\frac{2gD}{\lambda L} z_1 \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right)} .$$

Iz jednačine kontinuiteta sledi:

$$- A_1 \frac{dz_1}{dt} = V A ,$$

$$\frac{dz_1}{dt} = -\frac{A}{A_1} \sqrt{\frac{2gD}{\lambda L}} z_1 \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) = -\frac{A}{A_1} K \sqrt{z_1}, \quad (4.29)$$

što se može integrisati, da bi se dobilo:

$$t = -\frac{A_1}{A} \frac{2}{K} \sqrt{z_1} + C. \quad (4.30)$$

Vrednost integracione konstante određuje se iz početnog uslova, za $t = 0$ i $z_1 = z_m$, sledi da je

$$C = \frac{A_1}{A} \frac{2}{K} \sqrt{z_m}.$$

Promena nivoa z_1 data je izrazom:

$$z_1 = \left(\sqrt{z_m} - \frac{A}{A_1} \frac{K}{2} t\right)^2. \quad (4.31)$$

Rešenje (4.31), promena nivoa, z_1 , u rezervoaru (1), deo je kvadratne parabole, čija je početna tačka, $(0, z_m)$, a krajnja, $(2A_1\sqrt{z_m}/(AK), 0)$. Promena brzine kroz vreme je linearna, jer je brzina proporcionalna prvom izvodu nivoa.

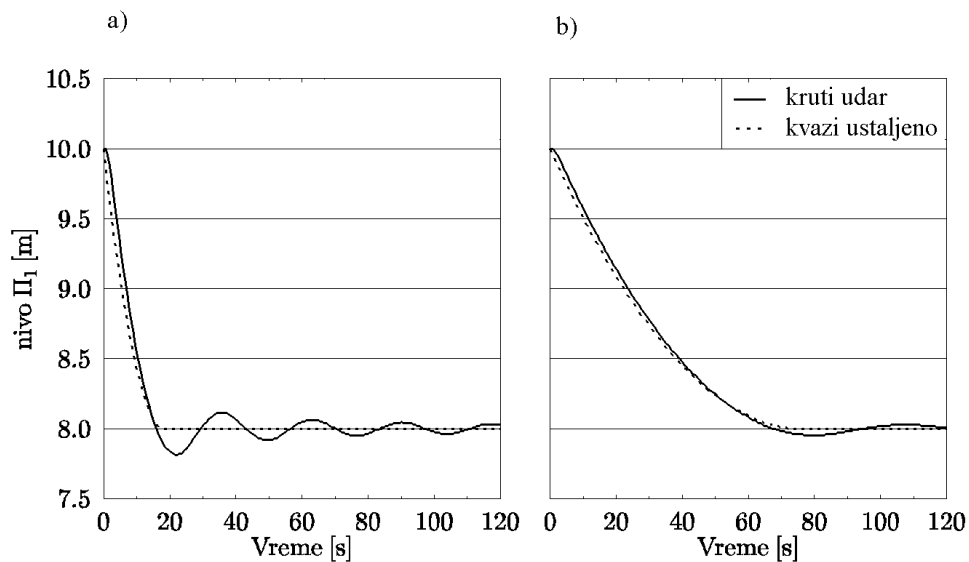
$$V = V_{max} - K^2 \frac{A}{A_1} \frac{t}{2}$$

gde je (V_{max}) , maksimalna brzina po modelu kvazi ustaljenog tečenja, koja se javlja u početnom trenutku, pri $z_1 = z_m$.

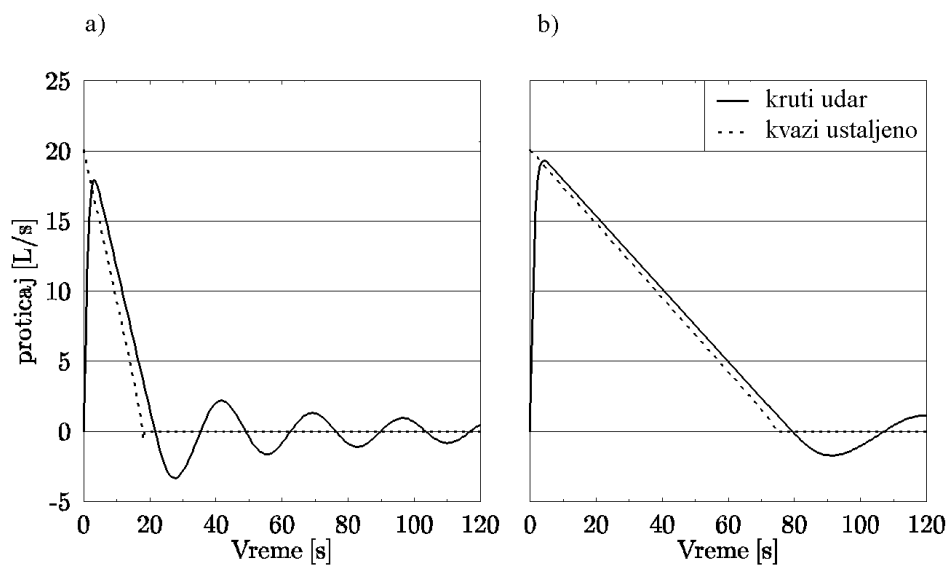
Ako se pretpostavi konstantna vrednost koeficijenta trenja, promena nivoa (z_1) ima horizontalnu tangentu za $z_1 = 0$, kada i brzina postaje jednaka nuli. Odstupanje od te pretpostavke postaje značajno tek pri malim vrednostima Re broja. Naime, zbog linearne veze između brzine i gubitka energije usled trenja, kod laminarnog tečenja, nivo (z_1) asimptotski se približava ravnotežnom položaju, što nije teško pokazati.

Rešenje (4.30) postepeno se približava ravnotežnom položaju, i dostiže ga za konačno vreme, dok kod modela krutog udara, rešenje ima oscilatorni karakter.

Kada postoji velika razlika između površinâ rezervoara i površine cevi koja ih spaja, promene nivoa su znatno sporije pa uticaj trenja, koje ograničava oscilovanje tečnosti u spojnoj cevi, postaje tako značajan, da je već amplituda prve naredne oscilacije zanemarljivo mala. Isti efekat ima namerno povećanje gubitaka energije u spojnoj cevi, čime se utiče na λ_e u jednačinama, (4.27) i (4.28).



Slika 4.8: Promene nivoa u rezervoaru (1), Primer 2; a) $D_1 = D_2 = 0.35$ m, b) $D_1 = D_2 = 0.70$ m.



Slika 4.9: Promene proticaja u spojnoj cevi, Primer 2; a) $D_1 = D_2 = 0.35$ m, b) $D_1 = D_2 = 0.70$ m.

Oba modela su primenjena na primer 2 i rezultati su prikazani na slikama (4.8) i (4.9).

Jednačina (4.25) rešena je približno, prediktor-korektor metodom. Slaganje sa analitičkim rešenjem (4.20), koje daje samo ekstreme, a ne i vreme njihovog ostvarivanja, je odlično. O približnim metodama i ocenama njihove valjanosti biće više reči u narednom poglavlju. Ovde je jedini pokazatelj kvaliteta primenjene metode mera do koje se približno rešenje poklapa sa analitičkim.

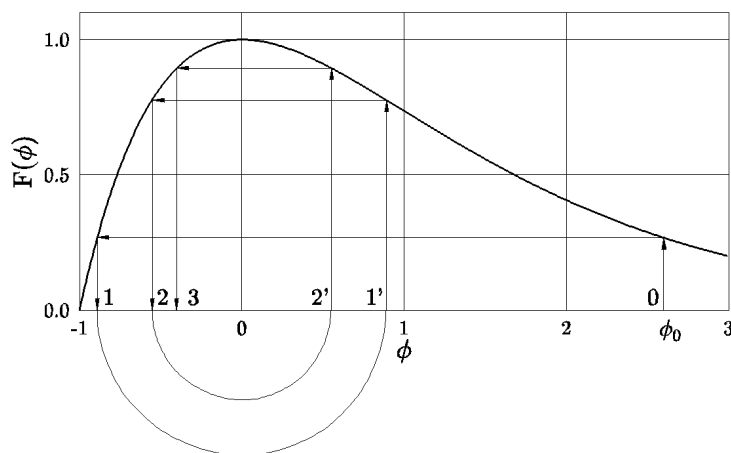
Isprekidanom linijom prikazano je rešenje modelom kvazi-ustaljenog tečenja, a punom, modelom krutog udara. Odstupanja za slučaj (b) nisu značajna, pa primena modela kvazi ustaljenog tečenja može biti opravdana. Na slici (4.8), minimum oscilacija, nivo $z_{m+1} = -0.204\text{m}$, javlja se posle 20 s u slučaju (a), a u slučaju (b), nivo $z_{m+1} = -0.051\text{ m}$, posle 80 s. Oscilacije nivoa u slučaju (a), posle 80 s, istog su reda veličine kao u slučaju (b), što nameće zaključak da postoji zajednička obvojnica i za dalje oscilacije. Na slici (4.10) prikazane su promene veličine ϕ u nekoliko uzastopnih oscilacija tečnosti u cevi između dva rezervoara iste horizontalne površine. Počinje se od vrednosti ϕ_0 , obeležene tačkom (0). Oznakom (1) obeležena je vrednost koja odgovara prvom minimumu, (2) je vrednost ϕ koja odgovara narednom maksimumu itd. Sa 1', 2' i 3' označene su vrednosti za pozitivno ϕ koje odgovara maksimumu u drugom kraku cevi. Odgovarajući nivoi dobijaju se na osnovu

$$z = \frac{\phi D}{\lambda_e} \frac{A}{A_1} .$$

Na smanjenje amplituda oscilacija direktno utiču povećanje gubitaka na trenje i povećanje površine rezervoara. Promenom površine rezervoara menja se i perioda oscilovanja tečnosti u cevi.

Dijagrami sa promenama proticaja posebno su interesantni. Jednim delom linije su skoro paralelene, što ukazuje na dominantan uticaj trenja u samom početku i ograničenje naredne ekstremne vrednosti, jer je deo potencijalne energije "potrošen" na trenje. Za oscilacije koje kasnije nastaju, perioda oscilovanja praktično se poklapa sa teorijskom, do koje se došlo uz zanemarenje trenja. Linija dobijena modelom kvazi ustaljenog tečenja predstavlja ravnotežno stanje kome teži rešenje dinamičke jednačine (4.23).

Brzina promene graničnog uslova ista je u oba slučaja, ali promene nivoa u rezervoarima nisu iste. Po svemu sudeći značajnu ulogu ima brzina promene ravnotežnog stanja, koje se dobija modelom kvazi-ustaljenog tečenja. Veličina koja najbolje karakteriše tu brzinu je vreme za koje proticaj kroz cev padne



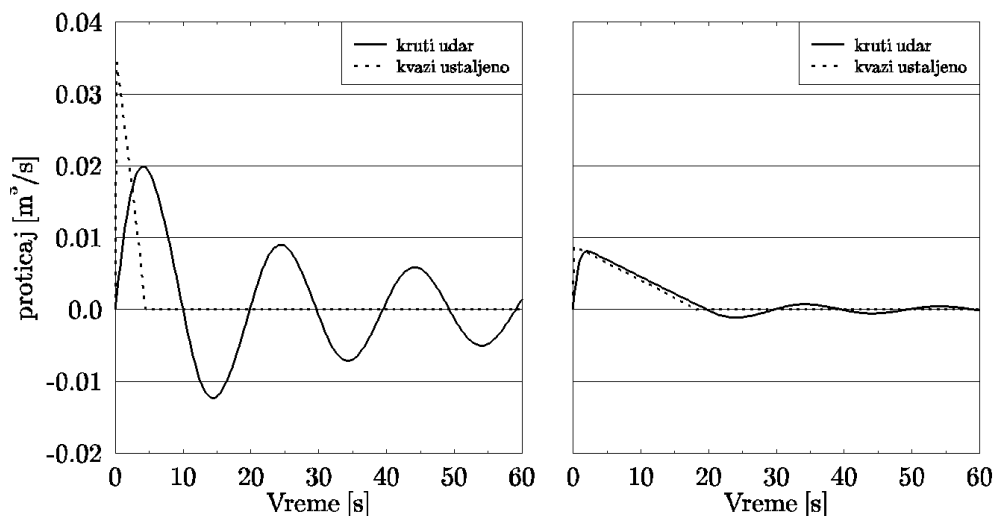
Slika 4.10: Uzastopne oscilacije tečnosti u spojenim rezervoarima

na nulu, odnosno, vreme za koje se izjednače nivoi u rezervoarima, t_m . Druga veličina, koja utiče na to koliko će se ova dva rešenja međusobno razlikovati jeste masa vode u cevi i njena inercija. Kao ocena ovog uticaja, može da posluži vreme uspostavljanja ustaljenog tečenja, $t_{99\%}$, dobijeno izrazom (4.6), ili, T_0 , iz izraza (4.5). Za oba slučaja u Primeru 2, T_0 je približno jednako 2 s (ili, tačnije, 1.947), dok je karakteristično vreme promene proticaja u kvazi-ustaljenom tečenju (slika 4.9), u jednom slučaju 19 s, a u drugom, 76 s. Tek posle tog vremena može se govoriti o oscilacijama tečnosti u cevi i oscilacijama nivoa u rezervoarima oko ravnotežnog položaja. Relativni odnos karakterističnih vremena, t_m/T_0 , u jednom slučaju je oko 10, a u drugom, kada su amplitude oscilacija vrlo male, i kada se rezultati vrlo malo razlikuju, 40.

Na slici (4.11) prikazane su promene proticaja u spojnoj cevi iz primera na kraju prethodnog poglavlja, gde je pretpostavljena vrlo brza promena nivoa na mernom mestu. Dve vrednosti koeficijenata gubitka energije, daju različita vremena punjenja mernog bunara, ali i različito vreme uspostavljanja ustaljenog tečenja, ($t_{99\%}$, odnosno, T_0).

Za prvi dijagram, t_m/T_0 , iznosi 1, a za drugi, 16.0.

Ovde su prikazana dva slučaja gde je bilo jednostavno identifikovati karakteristična vremena promene ravnotežnog stanja i ubrzanja fluida. Ideja nije



Slika 4.11: Proticaj u cevi koja spaja merni bunar i rezervoar u kome se meri nivo (vidi sliku 3.8); a) $\sum \xi = 5$, b) $\sum \xi = 100$.

bila da se po svaku cenu traže ta vremena i da se propisuju oblasti važenja pojedinih modela, već da se ukaže na dominantne mehanizme kod ova dva modela. Kao kriterijumi za izbor odgovarajućeg modela, mnogo korisnije su relacije (4.27) i (4.28).

4.3.1 Opšte o numeričkim modelima krutog udara

U ovom poglavlju dat je pregled matematičkih modela zasnovanih na principu krutog udara. Za jednostavne granične uslove do analitičkih rešenja se negde može doći direktno, a negde, uz određene pretpostavke.

Analitička rešenja daju korisne informacije o procesu (o periodu oscilovanja, o prigušenju oscilacija itd), ali to nije dovoljno da se pokriju svi slučajevi koji se javljaju u inženjerskog praksi.

Kada se fluid posmatra kao kruto telo, matematički model se sastoji od jedne ili više običnih diferencijalnih jednačina tipa (4.1), koje se kombinuju sa odgovarajućim graničnim uslovima (po potrebi, takodje, i običnim diferencijalnim jednačinama tipa (3.2), ili Bernulijevom jednačinom).

Kod približnog rešavanja sistema običnih diferencijalnih jednačina uglavnom važi sve što i za pojedinačne jednačine (Press et al., 1989), mada ima i dosta specifičnosti. Eventualni problemi mogu se identifikovati prethodnim analizama stabilnosti i tačnosti, i otkloniti modifikacijama numeričkog modela ili primenom jednostavnijih matematičkih modela.

U narednom poglavlju o vodostanima ukazaće se na osnovne probleme koji se javljaju kod primene numeričkih modela za rešavanje problema oscilacija vodenih masa. Koristiće se najjednostavnije metode, počev od Ojlerove, iako postoji mnogo daleko boljih metoda od ovih.

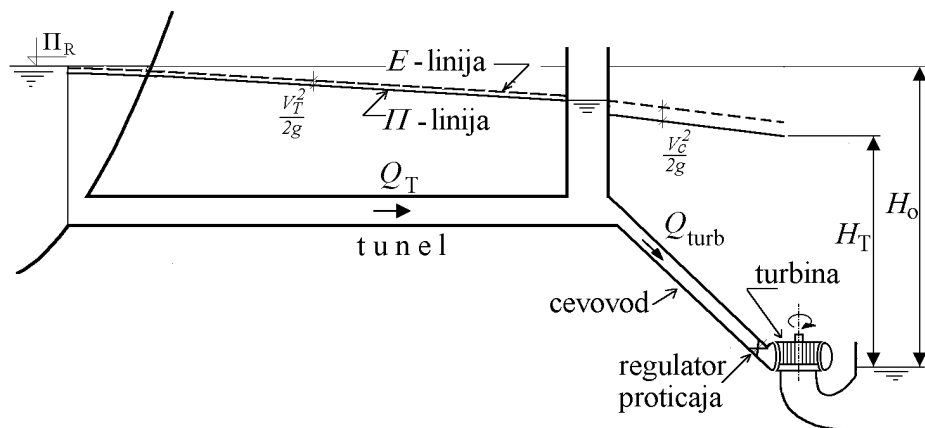
Bibliografija

- [1] Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., 1989, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press.
- [2] Wylie, E. B., Streeter, V. L., 1978, *Fluid Transients*, McGraw-Hill.

Poglavlje 5

Vodostani

Jedna važna oblast primene modela krutog udara je proučavanje oscilacija vode u delu dovoda vode od vodozahvata u jezeru do hidroelektrane. Vodostani su objekti u vidu rezervoara sa slobodnom površinom, ograničene veličine, koji treba da omoguće statičku i funkcionalnu sigurnost derivacione hidroelektrane (slika 5.1).



Slika 5.1: Podužni presek dovoda jedne derivacione hidroelektrane

Ukratko, njihova uloga je sledeća:

- Smanjuju oscilacije pritiska kod hidrauličkog udara ¹, skraćujući dužinu

¹ O ovome će biti više reči u narednim poglavljima

cevi u kojoj se nagle promene pritiska dešavaju, i ujedno, ograničavaju dejstvo hidrauličkog udara na deo cevi od turbine do vodostana;

- Poboljšavaju regulacione karakteristike turbine na taj način, što primaju višak vode kod smanjenja opterećenja turbine (zbacivanje snage - *load rejection*), a takodje i obezbeđuju vodu u početnom trenutku, kod naglog povećanja opterećenja.

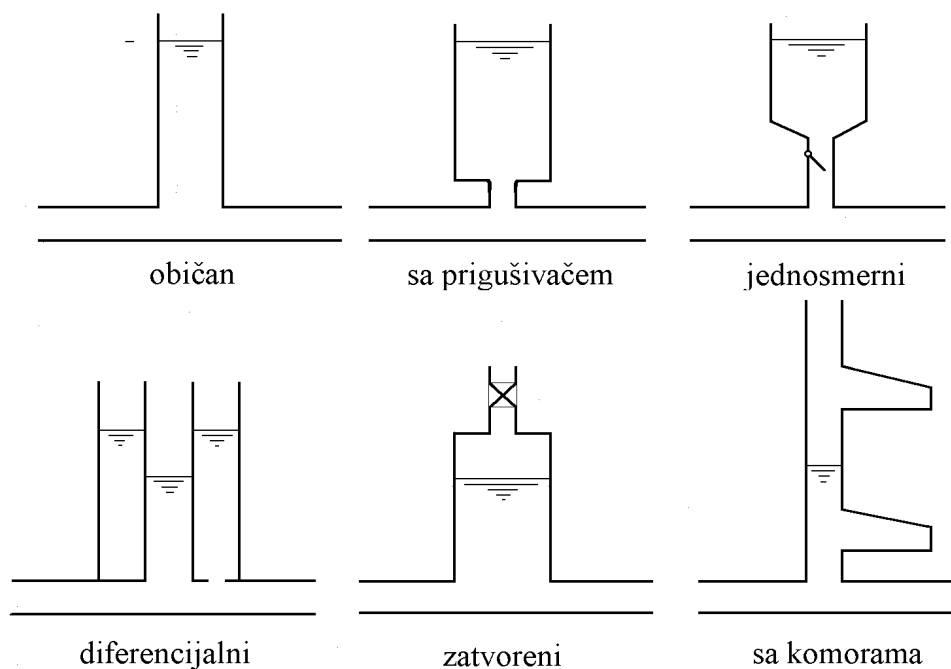
U cilju što efikasnijeg ispunjenja njihove uloge, vodostani se postavljaju što je moguće bliže turbinama.

Ova oblast je dosta izučavana i to, ne bez razloga. Zbog velike investicione vrednosti objekata hidroelektrana isplatilo se ulagati u ispitivanja vodostana, jer se zaštitom od hidrauličkog udara, pored povećanja pouzdanosti smanjuju i troškovi izgradnje dovodnog tunela. Postoji obimna literatura iz ove oblasti od koje dobar deo datira sa početka, i iz prve polovine ovog veka. U poredjenju sa oscilacijama vode u spojenim rezervoarima ovde nema ništa suštinski novo (razlike su samo u složenosti graničnih uslova). Sa gledišta Hidraulike, bitno je to da se radi o jednom praktičnom problemu i o mogućnosti da se napravi čvrsta veza između formalizma matematičkog modela i onog šta bi trebalo da on opisuje.

Tipovi vodostana. Zbog različitih zahteva koje treba da ispune i zbog težnje da konstrukcija bude što manja, postoji nekoliko tipova vodostana (slika 5.2):

- Običan, ili cilindrični vodostan,
- Vodostan sa prigušivačem,
- Jednosmerni vodostan,
- Diferencijalni vodostan,
- Zatvoreni vodostan,
- Vodostan sa komorama.

U ovom poglavlju vodostani se proučavaju sa aspekta postavljanja dodatnog uslova za analizu oscilacija mase vode u dovodnom tunelu hidroelektrane, kao i njihovog uticaja na regulaciju rada turbine. O njima će biti reči i u poglavlju 8, kao o graničnom uslovu za rešavanje jednačina elastičnog udara i kao sredstvu za zaštitu od hidrauličkog udara.



Slika 5.2: Tipovi vodostana

5.1 Osnovne jednačine

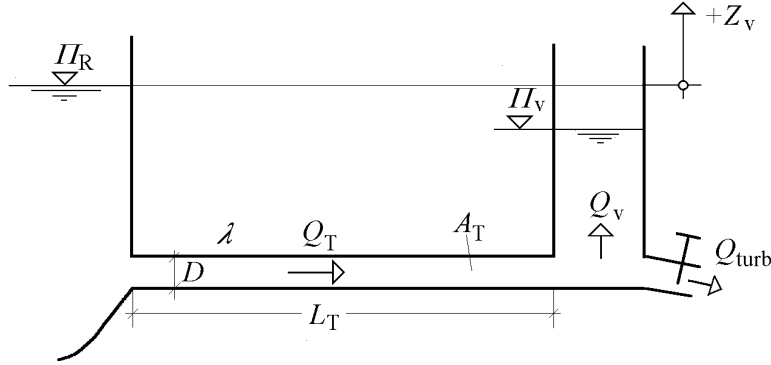
Posmatra se osnovna shema: *jezero - tunel - vodostan*, sa vezom na cevovod pod pritiskom (slika 5.3). Pretpostavlja se da se sve promene u radu turbine trenutno prenose do vodostana, što je prikazano zatvaračem neposredno iza vodostana.

Kod provere funkcionisanja vodostana i za grubo odredjivanje dimenzija i položaja vodostana, interesantna su dva ekstremna slučaja - trenutno zatvaranje predturbinskog zatvarača pri maksimalnom proticaju, i naglo povećanje proticaja kroz turbinu.

Uz pretpostavke da pijezometarske kote na početku i na kraju tunela odgovaraju nivoima vode u jezeru, Π_R , i u vodostanu, Π_V , dinamička jednačina za vodu u tunelu glasi:

$$\frac{dQ_T}{dt} = \frac{gA_T}{L}(\Pi_R - \Pi_V) - \frac{2\lambda}{\pi D^3}Q_T|Q_T| . \quad (5.1)$$

Q_T je proticaj kroz tunel, A_T je površina poprečnog preseka tunela, D je prečnik tunela i L dužina tunela. Jednačina kontinuiteta za čvor u kom se



Slika 5.3: Osnovna shema vodostana

nalazi vodostan je:

$$Q_T = Q_V + Q_{turb} \quad , \quad (5.2)$$

gde je, Q_V , proticaj vode koja ulazi u vodostan, a Q_{turb} proticaj koji ide prema turbini. Promena nivoa vode u vodostanu zavisi od proticaja, Q_V :

$$Q_V = \frac{d\Pi_V}{dt} A_V \quad ,$$

odnosno,

$$\frac{d\Pi_V}{dt} = \frac{1}{A_V} (Q_T - Q_{turb}) \quad . \quad (5.3)$$

Jednačine (5.2) i (5.3) definišu granični uslov u čvoru sa vodostanom. Uzvodni granični uslov, kota nivoa u jezeru, Π_R , je nepromenljiv.

Periode i amplitude oscilacija uz zanemarenje trenja

U jednačini (5.1) izostavlja se drugi član na desnoj strani, a umesto pjezometarskih kota uvodi se odstojanje od ravnotežnog položaja, $Z_V = \Pi_V - \Pi_R$:

$$\frac{dQ_T}{dt} = \frac{gA_T}{L} (-Z_V) \quad . \quad (5.4)$$

Za slučaj trenutnog zatvaranja turbine, nizvodni granični uslov se zadaje kao:

$$\begin{aligned} t < 0 & \quad Q_{turb} = Q_0 \quad , \\ t \geq 0 & \quad Q_{turb} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Time se jednačina kontinuiteta svodi na sledeći oblik:

$$\frac{dZ_V}{dt} = \frac{1}{A_V} Q_T \quad , \quad (5.5)$$

što, kada se uvrsti u jednačinu (5.4), daje:

$$\frac{d^2 Z_V}{dt^2} + \frac{g A_T}{L A_V} Z_V = 0 \quad . \quad (5.6)$$

Opšte rešenje ove jednačine dato je u prethodnom poglavlju (4.10):

$$Z_V = C_1 \cos \sqrt{\frac{g A_T}{L A_V}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g A_T}{L A_V}} t \quad .$$

Integracione konstante određuju se na osnovu početnih uslova. Za $t = 0$, i $Z_V = 0$, dobija se da je $C_1 = 0$. Dalje, zbog potpunog zatvaranja, u početnom trenutku takodje je:

$$\frac{dZ_V}{dt} = \frac{Q_0}{A_V} = C_2 \sqrt{\frac{g A_T}{L A_V}} \quad ,$$

odakle sledi

$$C_2 = Q_0 \sqrt{\frac{L}{g A_T A_V}} \quad .$$

Tako se konačno, za napred date početne uslove, dobija rešenje:

$$Z_V = Q_0 \sqrt{\frac{L}{g A_V A_T}} \sin \sqrt{\frac{g A_T}{L A_V}} t \quad . \quad (5.7)$$

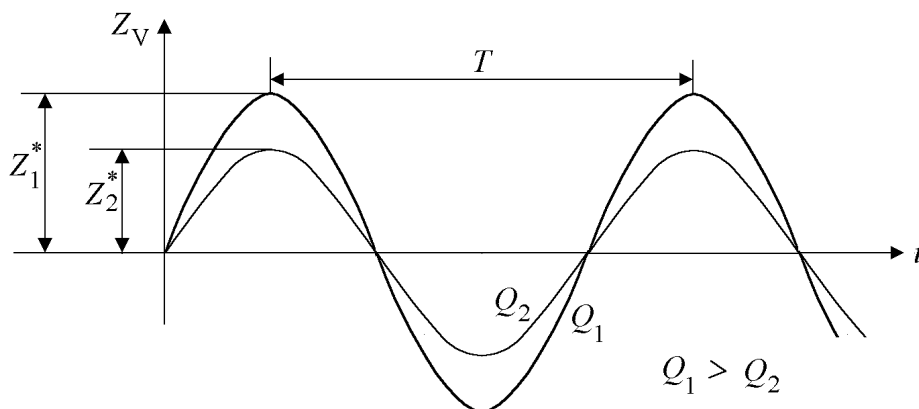
Perioda oscilacija ne zavisi od početnog proticaja u cevovodu (slika 5.4):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L A_V}{g A_T}} \quad , \quad (5.8)$$

dok, amplituda zavisi:

$$Z^* = Q_0 \sqrt{\frac{L}{g A_V A_T}} = V_0 \sqrt{\frac{L A_T}{g A_V}} \quad , \quad (5.9)$$

gde je, $V_0 = Q_0/A_T$. Za određivanje periode oscilovanja mogao se iskoristiti



Slika 5.4: Zavisnost amplitude oscilacija od početnog proticaja

izraz (4.26), dobijen za oscilacije nivoa u spojenim rezervoarima

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L A_1 A_2}{g A(A_1 + A_2)}} .$$

Ovde je jedan rezervoar (jezero), jako veliki, u odnosu na drugi (vodostan), pa se $1/A_{jez}$ može zanemariti u odnosu na $1/A_V$. Dakle, bez obzira na različite granične uslove, koji su doveli do oscilovanja, perioda oscilovanja je ista u oba slučaja. Ta perioda je osobina sistema, cevi i rezervoara, koje cev spaja, pa se zove i sopstvena (odnosno, svojstvena), ili prirodna perioda oscilovanja. Ta osobina sistema iskazuje se kao njegova sklonost da intenzivnije osciluje ako periodična pobuda na granici ima periodu blisku sopstvenoj periodi sistema.

Ako se posmatra kompletna jednačina (5.1), sa trenjem, ne može se doći do analitičkog rešenja čak ni u ovom jednostavnom slučaju, cilindričnog vodostana. Sila trenja koči fluid i na kraju dovodi do odumiranja oscilacija, ali to ne znači da se u inženjerskim analizama trenje može zanemariti. Zanezanje trenja nije obavezno ni na strani sigurnosti. Za rešavanje jednačina matematičkog modela koriste se približne metode integracije diferencijalnih jednačina, od kojih su neke objašnjene u uvodnom poglavlju.

Približne metode integracije mogu se podeliti na grafičke i numeričke. Grafičke metode približne integracije odigrale su vrlo značajnu ulogu u periodu pre pojave računara. Više detalja o njima može se naći u "klasicima" iz ove oblasti (Jaeger, 1961), dok se ovde neće razmatrati. Takodje iz tog vremena, do skora se održala praksa da se za procenu ekstremnih vrednosti

nivoa u vodostanima koriste dijagrami zavisnosti (Z_{max}/Z^*), ili (Z_{min}/Z^*), u funkciji ($\Delta E_{tr}/Z^*$), koji su nastali sintezom rezultata približne integracije osnovnih jednačina za veliki broj slučajeva. S obzirom na ograničenu vrednost analiza zasnovanih na matematičkom modelu krutog udara, koji se objašnjava u ovom poglavlju, i potrebu primene složenijih modela sa detaljnijim opisom graničnih uslova, koji se obrađuju u nastavku, ovakva praksa je postala nedovoljna i prema tome, neprihvatljiva.

5.1.1 Numerički model

Jednačine matematičkog modela, (5.1) i (5.3), najjednostavnije se mogu diskretizovati na sledeći način:

$$\frac{Z_V^{n+1} - Z_V^n}{\Delta t} = \frac{1}{A_V} (Q_T^n - Q_{turb}^n) , \quad (5.10)$$

$$\frac{Q_T^{n+1} - Q_T^n}{\Delta t} = \frac{gA_T}{L} \left(-\frac{Z_V^{n+1} + Z_V^n}{2} \right) - \frac{2\lambda}{\pi D^3} Q_T^n |Q_T^n| , \quad (5.11)$$

gde eksponenti, (n) i ($n + 1$), označavaju, tekući i naredni vremenski nivo. Napisan je uobičajeni način formiranja numeričkog modela za cilindrični vodostan, za koji će se u narednom tekstu koristiti termin *standardni*. Ako bi u jednačini (5.11), umesto $(Z_V^{n+1} + Z_V^n)/2$, stajalo, Z_V^n , radilo bi se o Ojlerovoj metodi, koja je prvog reda tačnosti. Ovako, na vrlo jednostavan način, tačnost je formalno poboljšana zbog integracije prvog člana na desnoj strani metodom trapeznog pravila. Numerička stabilnost je takodje poboljšana, jer, kao što se može videti iz narednog primera, Ojlerova metoda je bezuslovno nestabilna. Podjednako dobra alternativa ovome je diskretizacija prve jednačine *leap-frog* metodom, a druge Ojlerovom.

Redosled proračuna odgovara redosledu jednačina. Neustaljeno tečenje izaziva poznata promena proticaja kroz turbinu, (Q_{turb}).

Kao praktična preporuka uzima se da vremenski priraštaj treba da bude najmanje 1/20 periode oscilovanja da bi se moglo dovoljno tačno rekonstruisati funkcija kao što je sinusoida. Da li je to zaista i dovoljno zavisi od metode rešavanja i od zahtevane tačnosti, što će se pokazati u narednom primeru.

Primer 1

Odrediti promene nivoa u vodostanu koje izaziva trenutno zatvaranje regulatora turbine uz smanjenje proticaja sa $30 \text{ m}^3/\text{s}$ na $15 \text{ m}^3/\text{s}$. Prečnik tunela je $D_T = 3\text{m}$, prečnik vodostana je $D_V = 8\text{m}$, a dužina tunela $L = 6000\text{m}$. Uticaj trenja zanemariti.

Na slici (5.5) prikazani su rezultati dobijeni primenom numeričkog modela (5.10) i (5.11). Kvadratići predstavljaju računске tačke, a linija koja ih spaja je očigledno sinusoida. Vremenski korak od $\Delta t = 20\text{s} \approx T/20$ omogućava dovoljno dobru aproksimaciju rešenja, koje se za ovaj slučaj može naći i analitički.

Na osnovu izraza (5.8), perioda oscilovanja jednaka je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{6000 \cdot 50.27}{9.81 \cdot 7.07}} = 414 \text{ s}$$

a amplituda (5.9),

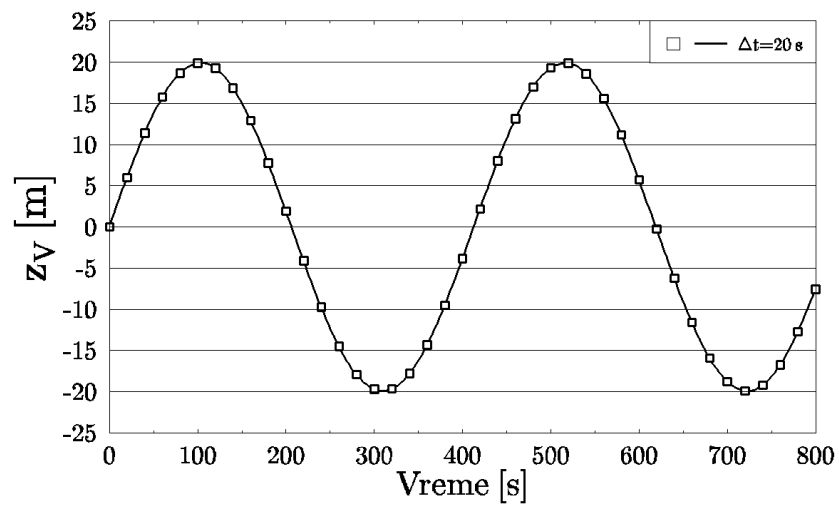
$$Z_m = 15\sqrt{\frac{6000}{9.81 \cdot 50.27 \cdot 7.07}} = 19.7\text{m}$$

Rezultati dobijeni standardnim numeričkim modelom praktično se poklapaju sa analitičkim rešenjem.

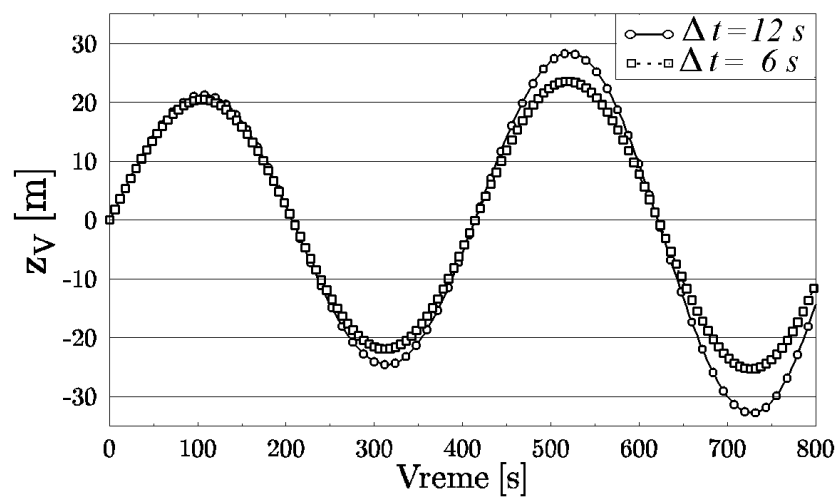
Na slici (5.6) prikazani su rezultati simulacije numeričkim modelom zasnovanim na Ojlerovoj metodi, i to za vrednosti vremenskog priraštaja, $\Delta t = 12\text{s}$, i za dvostruko kraće, $\Delta t = 6\text{s}$. Amplitude oscilacija stalno se povećavaju što ukazuje da se radi o nestabilnom rešenju.

U prilogu B uradjena je analiza stabilnosti obe metode, na osnovu čega je zaključeno da je numerički model zasnovan na Ojlerovoj metodi bezuslovno nestabilan, a da je standardni numerički model uslovno stabilan.

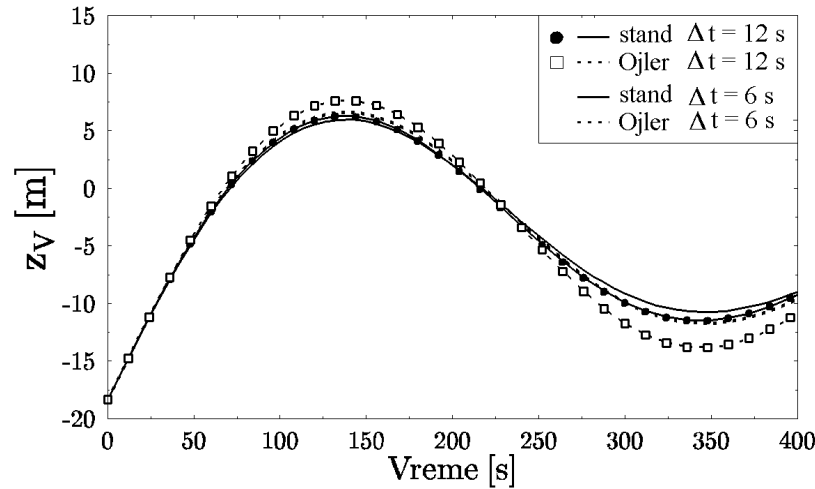
Kada se računa sa trenjem, i Ojlerova metoda daje prigušene oscilacije, a rešenje "liči" na stvarno, i to naročito za dovoljno kratak vremenski korak. Na slici (5.7) prikazani su rezultati proračuna oscilacija nivoa, dobijeni Ojlerovom i standardnom metodom, za isti primer, ali sa trenjem uzetim u obzir. Koeficijent trenja, λ , je jednak 0.01 i konstantan je tokom proračuna. Linija dobijena Ojlerovom metodom sa vremenskim priraštajem 6 s, skoro potpuno se poklapa sa linijom dobijenom jednačinama (5.10) i (5.11), sa dvostruko većim priraštajem. Bez obzira na to, Ojlerovu metodu ne treba koristiti za rešavanje ovakvih zadataka.



Slika 5.5: Oscilacije nivoa u vodostanu; standardni numerički model (trenje zanemareno), $\Delta t = 20$ s



Slika 5.6: Oscilacije nivoa u vodostanu; Ojlerova metoda (trenje zanemareno)



Slika 5.7: Oscilacije nivoa u vodostanu sa trenjem

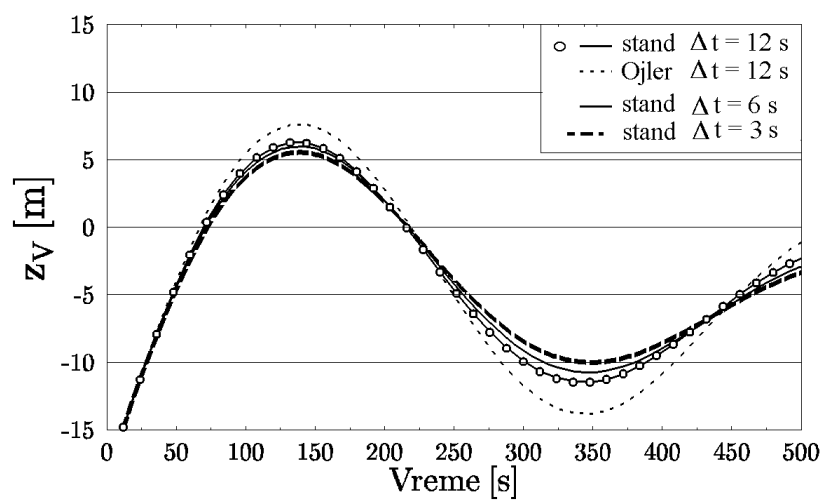
Maksimalni nivo u vodostanu je oko 5 m, što je znatno manje od vrednosti analitičkog rešenja 19.7 m (koje je dobijeno uz zanemarenje trenja). Na slici (5.8) može se videti uticaj vremenskog koraka na tačnost integracije jednačina. Pored rezultata Ojlerove metode ($\Delta t = 12$ s) date su linije dobijene standardnom metodom sa vremenskim priraštajima 12, 6 i 3 s. Ovim se praktično demonstrira konvergencija približnog rešenja tačnom kada $\Delta t \rightarrow 0$. Konvergencija bi se ubrzala korišćenjem neke metode višeg reda tačnosti (Press et al., 1989).

Kod nekih drugih metoda, kao što je kod *leap-frog* metode moguće su određene anomalije (testerasto rešenje, odnosno, razdvajanje rešenja na parnim i neparnim koracima), koje su posledica greške na početku proračuna.

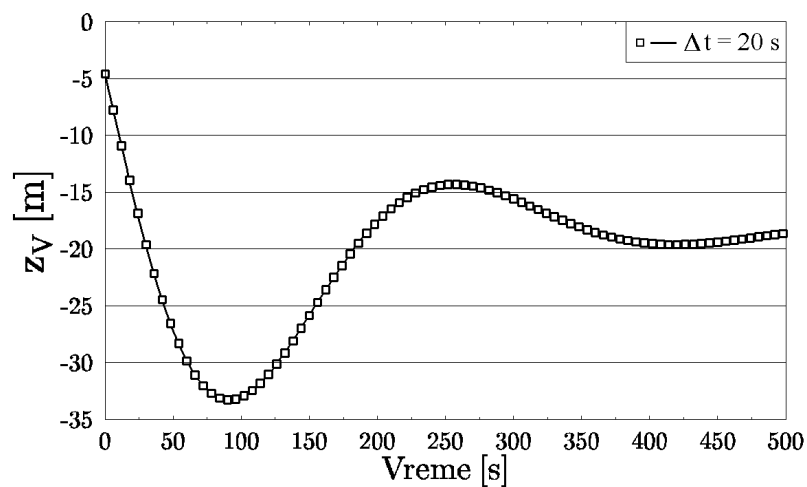
Podrazumeva se da dimenzije vodostana treba da budu takve da je minimalni nivo dovoljno iznad ulaza u tunel i u cevovod pod pritiskom da ne bi došlo do uvlačenja vazduha, a isto tako i da se pri maksimalnom nivou voda ne izliva nekontrolisano van vodostana.

Primer 2

Pri proticaju od $15 \text{ m}^3/\text{s}$ dolazi do naglog otvaranja regulatora turbine i povećanja proticaja na $30 \text{ m}^3/\text{s}$. Vodostan je cilindrični, prečnika $D_V = 6 \text{ m}$. Koeficijent trenja za tečenje u tunelu iznosi $\lambda = 0.01$. Sve ostale brojčane vrednosti su kao u Primeru 1. Odrediti minimalnu kotu nivoa u vodostanu.



Slika 5.8: Uticaj vremenskog koraka na tačnost rešenja



Slika 5.9: Oscilacije nivoa u vodostanu usled otvaranja regulatora turbine

Vremenski priraštaj kod rešavanja jednačina jednak je 6 s, a rešenje je dato na slici (5.9). Minimum se javlja 90 s posle otvaranja regulatora turbine i jednak je -33.3 m. Oscilacije se umiruju oko vrednosti $Z_V = -18.36$ m, što odgovara gubitku na trenje u ustaljenom tečenju pri proticaju $Q = 30$ m³/s.

Ovakav (ili sličan) manevar merodavan je za određivanje minimalnog nivoa u vodostanu. Za povećanje proticaja od 0 do Q_{max} može se dobiti i niži nivo u vodostanu, ali se smatra da se takav manevar može lako izbeći propisivanjem procedure starta turbina, pa prema tome ne treba da bude merodavan.

Na isti način analiziraju se i vodostani komplikovanijeg oblika o kojima će biti reči posle razmatranja uslova rada turbina, odnosno, definisanja nizvodnog graničnog uslova za vodostan.

Pored ekstremnih uslova rada turbine (naglo zatvaranje i otvaranje), koji određuju dimenzije vodostana, potrebno je proveriti promene nivoa vode u vodostanu i pri malim promenama proticaja kroz turbinu zbog mogućnosti pojave neprigušenih oscilacija.

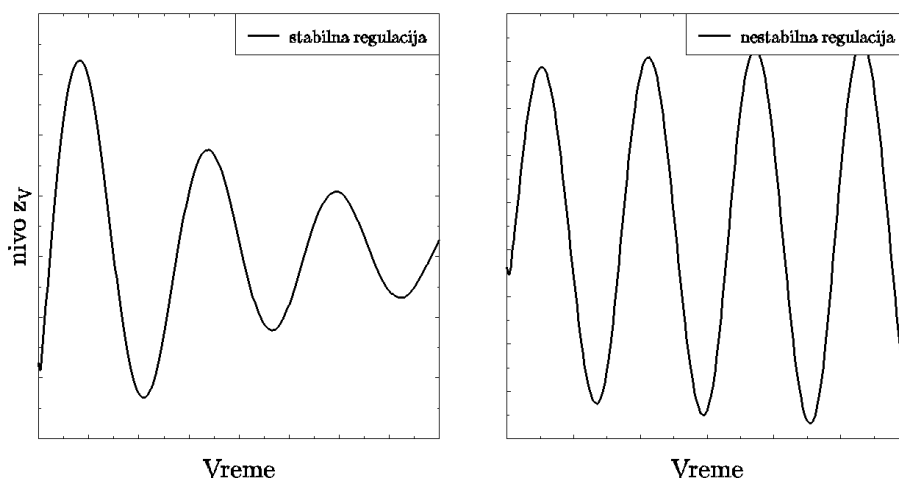
5.2 Stabilnost rada vodostana

Svaki poremećaj izazvan promenom režima rada turbine dovodi do oscilovanja vode u sistemu jezero-tunnel-vodostan.

Na osnovu jednačine (5.9) vidi se da je amplituda oscilovanja, Z^* , obrnuto proporcionalna sa korenom horizontalne površine vodostana A_V . Često, ekonomski interes izražava se kroz težnju da površina vodostana, A_V , bude što manja. To bi bio logičan zahtev da se na samom kraju cevovoda pod pritiskom ne nalazi turbina, kojoj, za planiranu proizvodnju električne energije, ne odgovaraju velike promene nivoa u vodostanu. Zbog toga, u sastavu hidroelektrane nalazi se regulator proticaja, koji menja površinu proticajnog profila i tako neutrališe promene nivoa u vodostanu. Prisustvo ovog aktivnog činioca, u određenim prilikama, može dovesti do oscilacija nivoa u vodostanu, koje, vremenom, ne jenjavaju, nego se pojačavaju. Taj problem se naziva **nestabilnost rada vodostana**²(slika 5.10).

Postoje četiri osnovna tipa regulacije rada turbine, ili četiri načina, kojima

² Termin nestabilnost javlja se u ovoj knjizi, i u ovom poglavlju, takodje kada se govori o numeričkim algoritimima za približno rešavanje diferencijalnih jednačina. U ovom slučaju reč je o fizičkoj nestabilnosti sistema za regulaciju.



Slika 5.10: Regulacija rada turbine

se može analizirati uticaj promene proticaja kroz turbinu u matematičkom modelu neustaljenog tečenja. Radi jednostavnijeg pisanja, zanemariće se gubici energije u cevovodu pod pritiskom.

1. **Konstantan proticaj.** Ovo je česta pretpostavka kod grubih analiza. Koristi se kod određivanja dimenzija vodostana. Naime, zadaje se nagla promena proticaja (otvaranje ili zatvaranje predturbinskog zatvarača) posle čega se proticaj ne menja (Primeri 1 i 2, u ovom poglavlju). Kako međutim, proticaj kroz turbinu zavisi od kote nivoa u vodostanu, ovakva analiza se može koristiti samo kod jako velikih padova turbine, H_T .
2. **Konstantan otvor regulatora proticaja.** Koristi se kod ručne (fiksne) regulacije, ili kada je regulator pokvaren. Ovaj uslov se koristi i kada je regulator ispravan, ali je već potpuno otvoren. Proticaj Q_T je proporcionalan $\sqrt{2g(\Pi_R + Z_V - Z_{DV})}$, gde je, Π_R , kota nivoa u rezervoaru (akumulaciji), Z_{DV} , kota nivoa nizvodno od turbine.
3. **Konstantna snaga (odnosno, zahtevana snaga).** Pretpostavlja se idealan regulator koji održava proizvod proticaja, neto pada turbine i koeficijenta korisnog dejstva, $Q_{turb}(\Pi_R + Z_V - Z_{DV})\eta_T$, konstantnim, ili koji prati određenu promenu. Ako se pretpostavi da je η_T konstantno,

onda se uslov konstantne snage može prikazati kao:

$$Q_{turb}(\Pi_R + Z_V - Z_{DV}) = Q_0(\Pi_R - \Delta E_{tr,0} - Z_{DV}) ,$$

odnosno,

$$Q_{turb} = \frac{Q_0(\Pi_R - \Delta E_{tr,0} - Z_{DV})}{H_R + Z_V - Z_{DV}} , \quad (5.12)$$

gde je $\Delta E_{tr,0}$ gubitak energije usled trenja pri merodavnom proticaju, Q_0 . Kod smanjenja nivoa u vodostanu Z_V , regulator treba da poveća proticajni profil da bi se povećao proticaj. U prvom trenutku povećanje proticaja obezbeđuje se pražnjenjem vodostana. Dolazi do smanjenja nivoa u vodostanu, što, opet, smanjuje proticaj. Regulator povećava otvor itd. Radi se o destabilizirajućoj akciji, koja može dovesti do nestabilnosti sistema.

4. **Konstantna snaga kombinovana sa punim otvorom pretkola turbine.** Ovo je takodje realna situacija, koja ustvari predstavlja kombinaciju regulacije pod 3., sve dok se to može, i onda prelazak na regulaciju 2. (Potencijalno, ovo je situacija u kojoj može doći do ispada turbine iz pogona. Naime, u elektroenergetskom sistemu, ako ne može da se održi zahtevana snaga, dolazi do pada frekvencije. Ako frekvencija padne ispod određene granice, generator ispada iz sistema, a strujanje kroz turbinu se mora zaustaviti.)

Razni istraživači su se bavili ovom problematikom (Jaeger, 1961; Chaudhry, 1979). Prema njihovim rezultatima može se zaključiti da je slučaj regulacije 2. uvek stabilan, a da je slučaj 1. stabilan samo ako se uzme u obzir trenje.³

Treći slučaj analizirao je Toma (*Thoma*) (Chaudhry, 1979), na lineari-zovanim jednačinama i došao do zaključka da su oscilacije nestabilne ako je površina vodostana manja od određene vrednosti, koja je data ovim izrazom:

$$(A_V)_{min} = \frac{A_T D_T}{\lambda(H_0 - \Delta E_{tr,0})} , \quad (5.13)$$

gde je, $H_0 = \Pi_R - Z_{DV}$, geodetska razlika nivoa uzvodnog i nizvodnog rezervoara, odnosno, bruto pad turbine. Ovo je tzv., Tomin kriterijum, koji daje minimalnu površinu vodostana da bi se izbegle neprigušene oscilacije. Kriterijum se odnosi na obične, cilindrične vodostane.

³ Da li se ovde radi o korišćenju metode koja je bila nestabilna? (Vidi stranu 108.)

Ova razmatranja ukazuju na potrebu prikladnijeg opisa složenog graničnog uslova nizvodno od vodostana i analizu velikog broja različitih pogonskih situacija. Unapred je jasno da se standardnim matematičkim modelima krutog udara, ne mogu obuhvatiti svi mogući slučajevi, ma koliko detaljna analiza bila. Zbog toga se osnovne jednačine prevode u bezdimenzionalni oblik i kao takve dalje analiziraju.

Normalizacija jednačina

Polazi se od jednačina (5.3) i (5.1):

$$\frac{dZ_V}{dt} = \frac{1}{A_V} (Q_T - Q_{turb}) \quad ,$$

$$\frac{dQ_T}{dt} = -\frac{gA_T}{L} Z_V - \frac{2\lambda}{\pi D^3} Q_T |Q_T| \quad .$$

Uvode se sledeće bezdimenzionalne veličine:

$$\begin{aligned} y &= Z_V/Z^* \quad , \\ x &= Q_T/Q_0 \quad , \\ q &= Q_{turb}/Q_0 \quad , \\ \tau &= 2\pi t/T \quad , \end{aligned}$$

gde su, Q_0 , početni proticaj kroz sistem, a T i Z^* , perioda i amplituda oscilacija za slučaj kada je zanemareno trenje.

Koristeći relacije (5.8) i (5.9), za periodu i amplitudu oscilovanja, dolazi se do sledećih jednačina u bezdimenzionalnom obliku:

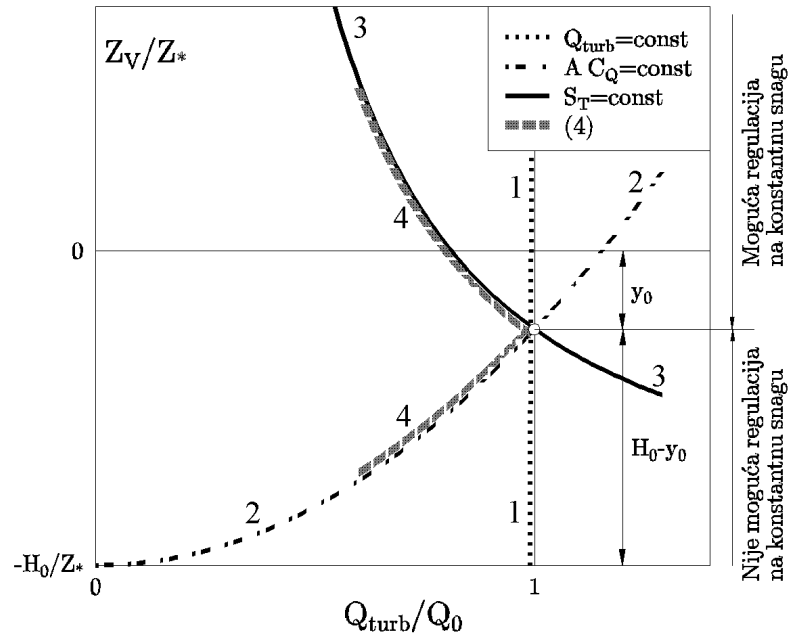
$$\frac{dy}{d\tau} = x - q \quad , \quad (5.14)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -y - \frac{\Delta E_{tr,0}}{Z^*} x^2 \quad , \quad (5.15)$$

gde je $\Delta E_{tr,0}$, gubitak energije usled trenja za proticaj Q_0 :

$$\Delta E_{tr,0} = \lambda \frac{L}{D} \frac{Q_0^2}{2gA_T^2} \quad .$$

Bezdimenzionalne veličine, $y = Z_V/Z^*$ i $q = Q_{turb}/Q_0$, iskorišćene su za grafički prikaz osnovnih tipova regulacije rada turbine (slika 5.11). Tačka u



Slika 5.11: Osnovni tipovi regulacije rada turbine

kojoj se seku linije 1, 2 i 3 predstavlja projektovanu radnu tačku. Četvrti način regulacije u toj tački prelazi sa krive 3 na krivu 2, što je prikazano isprekidanom linijom.

Stabilnost rada vodostana ispituje se pomoću normalizovanih jednačina za razne kombinacije parametara $\Delta E_{tr,0}/H_0$ i $\Delta E_{tr,0}/Z^*$. Kombinovanjem jednačina (5.14) i (5.15) dolazi se do jednačine:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - q}{-y - \frac{\Delta E_{tr,0}}{Z^*} x^2}, \quad (5.16)$$

za koju se traže singularne tačke, odnosno, tačke u kojima je $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Dalje se, prema tipu singulariteta, zaključuje da li je regulacija stabilna ili ne.

Na slikama (5.12) i (5.13) prikazana su dva slučaja regulacije rada turbine analizirana normalizovanim jednačinama. Na slici (5.12) prikazan je slučaj konstantnog otvora regulatora proticaja. Rešenje je prikazano linijama duž kojih su konstantni nagibi ($d y / d x$) i Krive linije sa strelicama na kraju predstavljaju trajektorije rešenja, dok se druge linije zovu izokline. Izokline

predstavljaju geometrijska mesta tačaka u kojima trajektorije rešenja imaju isti nagib (naznačen je kratkim linijama na izoklini).

Jednačina (5.16) ima dve singularne tačke, od kojih se samo $(1, \Delta E_{tr,0}/Z^*)$, nalazi u oblasti mogućeg rešenja. Za kombinaciju parametara, $\Delta E_{tr,0}/H_0 = 0.15$ i $\Delta E_{tr,0}/Z^* = 0.6$, trajektorija rešenja iz bilo kog dela dijagrama teži stabilnoj tački.

Na slici (5.13) prikazan je slučaj regulacije na konstantnu snagu. Oblast stabilnog rada vodostana je za ovaj slučaj i za kombinaciju parametara kao na slici, ograničena dvema razdelnim linijama. Iz bilo kog dela ravni moguće je nacrtati trajektorije rešenja, a samo one između razdelnih linija teže radnoj tački, ukazujući da je rad vodostana stabilan. Van te oblasti rad vodostana je nestabilan.

Analiza stabilnosti rada vodostana po kompleksnosti prelazi nivo ove knjige. Više detalja o tome može se naći u stručnoj literaturi (Chaudhry, 1979).

Primer 3: Regulacija rada turbine na konstantnu snagu.

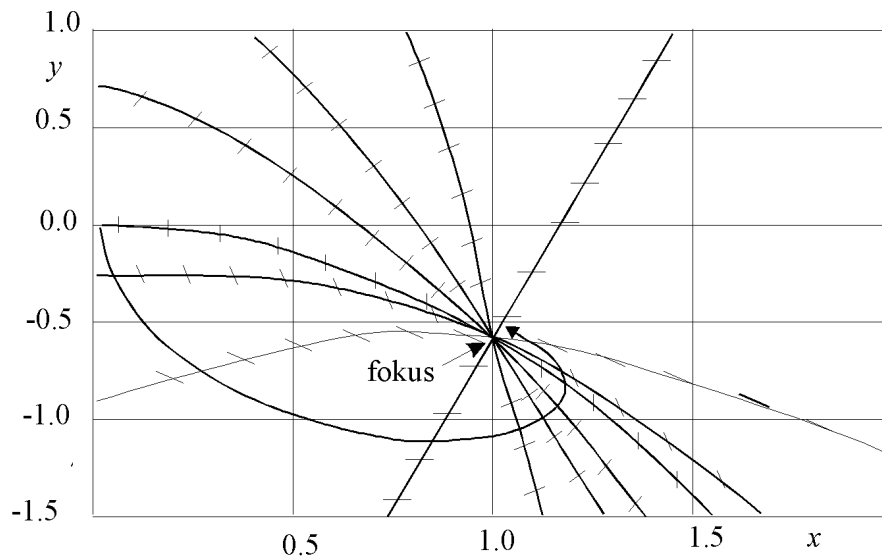
Dužina tunela $L = 6000\text{m}$, prečnik tunela $D_T = 3\text{ m}$, koeficijent trenja $\lambda_T = 0.01$, prečnik vodostana $D_V = 5\text{ m}$, pad turbine $H_R - Z_{DV} = 200\text{ m}$. Pri proticaju od $Q_0 = 26\text{m}^3/\text{s}$, dolazi do naglog smanjenja snage na $\approx 60\%$ početne, što odgovara $\approx 15\text{m}^3/\text{s}$. Pod pretpostavkom da je koeficijent korisnog dejstva turbine približno konstantan u celoj oblasti od interesa i jednak $\eta_T = 0.95$ odrediti promenu nivoa vode u vodostanu.

Za odredjivanje proticaja kroz turbinu korišćen je izraz (5.12), a jednačine matematičkog modela rešene su približno metodom Adams-Bašforta sa vremenskim priraštajem $\Delta t = 12\text{ s}$. Na prvom koraku korišćena je modifikovana Ojlerova metoda sa dvostruko kraćim vremenskim korakom.

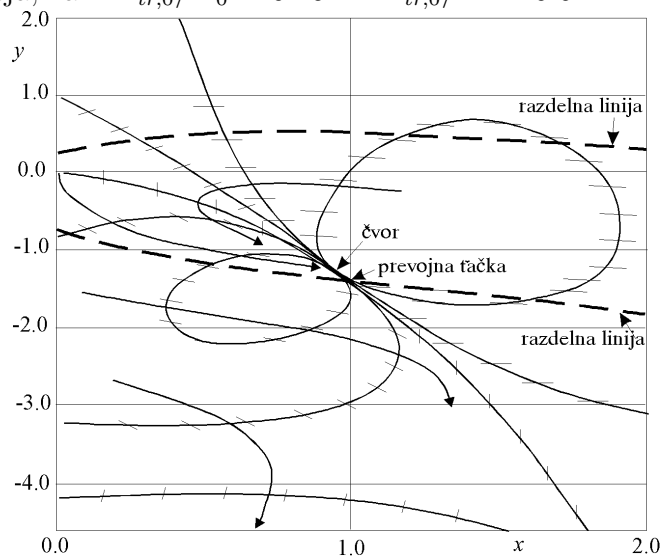
Rezultati proračuna oscilacija nivoa vode u vodostanu prikazani su na slici (5.14). Radi poredjenja sračunate su promene nivoa i pod pretpostavkom konstantnog proticaja kroz turbinu. kao što se može videti, osnovna greška koja se time čini je da se amplitude oscilacija, kao i vreme njihovog prigušenja, značajno potcenjuju.

Na slici (5.15) prikazane su promene proticaja, Q_T , Q_{turb} i Q_V . Može se uočiti fazni pomak oscilacija Q_{turb} od $\pi/2$, u odnosu na oscilacije Q_T i Q_V , dok su periode oscilovanja iste.

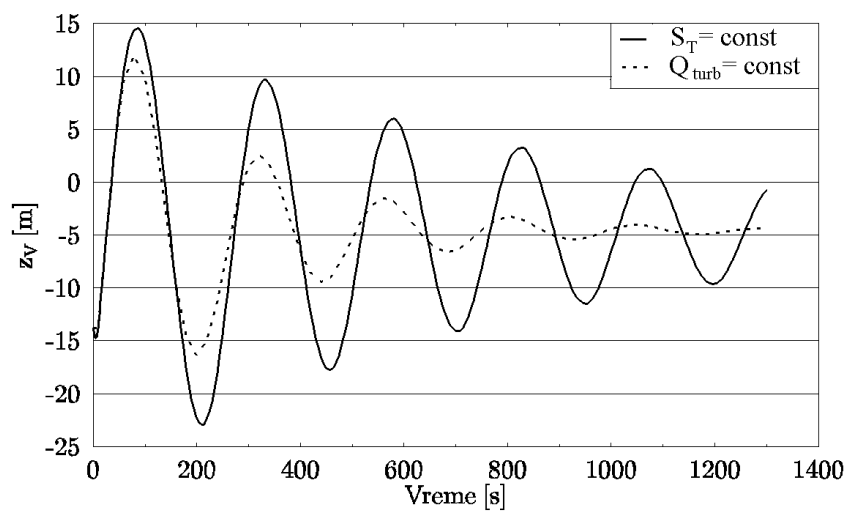
Prema izrazu (5.13) izračunata je minimalna površina vodostana po Tominom kriterijumu da iznosi $A_{Th} = 10.9\text{m}^2$. Medjutim, prema proračunu sa



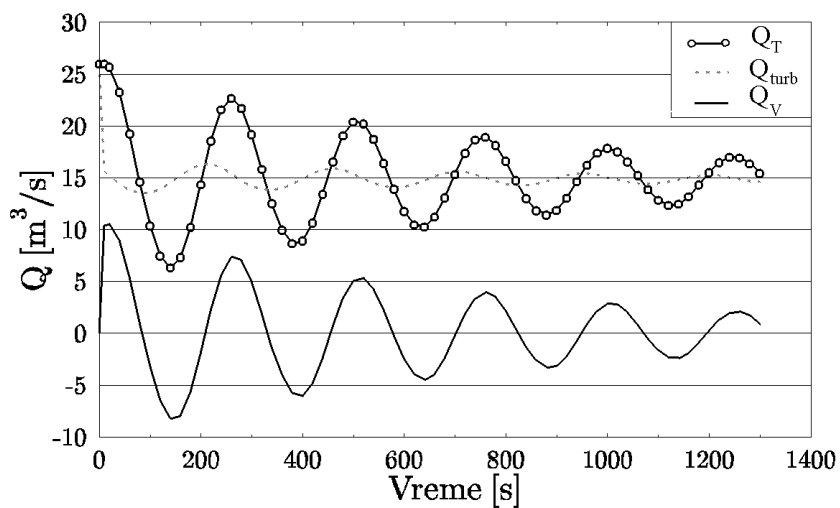
Slika 5.12: Fazni portret rada vodostana za slučaj konstantnog otvora regulatora proticaja, za $\Delta E_{tr,0}/H_0 = 0.15$ i $\Delta E_{tr,0}/Z^* = 0.6$



Slika 5.13: Fazni portret rada vodostana slučaj regulacije na konstantnu snagu, za $\Delta E_{tr,0}/H_0 = 0.35$ i $\Delta E_{tr,0}/Z^* = 1.4$



Slika 5.14: Oscilacije nivoa u vodostanu usled smanjenja snage na 60 %



Slika 5.15: Proticaji pri regulaciji turbine na konstantnu snagu

datim podacima i parametrima numeričkog modela, regulacija je nestabilna sve dok je $A_V \leq 14.5\text{m}^2$.

5.2.1 Vodostan sa prigušivačem

Amplitude oscilovanja, kao i samo prigušenje i odumiranje oscilacija, zavise od gubitaka energije tečnosti koja osciluje. Sa druge strane, nije preporučljivo povećavati gubitke energije kroz tunel, jer time proizvodnja električne energije postaje manje ekonomična. Najpovoljnije rešenje je uključivanje gubitaka energije samo tokom oscilacija.

Jedan od načina da se smanje amplitude oscilovanja, a samim tim da se smanji i gradjevinska visina vodostana, jeste smanjenje otvora na spoju vodostana i tunela (slika 5.16). Tako se vodi otežava komunikacija sa vodostanom. Osnovna pretpostavka o jednakosti pijezometarske kote na kraju tunela i kote nivoa vode u vodostanu, korišćena u izvodjenju jednačine (5.1), ovde ne važi, kada je $Q_V \neq 0$.

$$\Pi_V = \Pi_2 \neq \Pi_1 .$$

Za uspostavljanje veze izmedju te dve pijezometarske kote koristi se Bernulijeva jednačina:

$$\Pi_1 = \Pi_2 + \Delta E_{PR} = \Pi_2 + \xi_{PR} \frac{Q_V |Q_V|}{2gA_{PR}^2} . \quad (5.17)$$

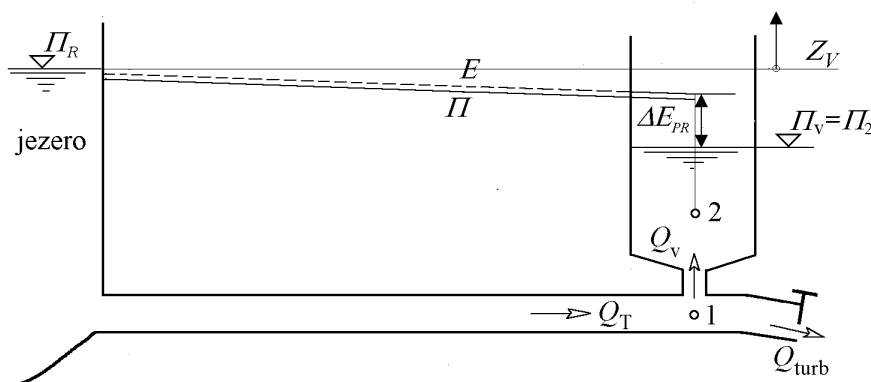
Jednačina kontinuiteta koristi se u nepromenjenom obliku (5.3), a uvrštavanjem relacije (5.17) u jednačinu (5.1), dolazi se do dinamičke jednačine za tunel sa vodostanom sa prigušivačem:

$$\frac{dQ_T}{dt} = \frac{gA_T}{L} \left(-Z_V - \xi_{PR} \frac{Q_V |Q_V|}{2gA_{PR}^2} \right) - \frac{2\lambda}{\pi D^3} Q_T |Q_T| . \quad (5.18)$$

Kod projektovanja prigušivača treba voditi računa o dve stvari:

1. kod velikog prigušenja, deo oscilacija pritiska prolazi pored vodostana, i hidraulički udar se oseća i u tunelu, i
2. pogoršavaju se uslovi za regulaciju rada turbina.

Odredjivanje dimenzija i oblika prigušivača, koji treba da ima zahtevani gubitak energije, takodje nije lak posao, a najpouzdaniji način je korišćenje rezultata modelskih ispitivanja.



Slika 5.16: Vodostan sa prigušivačem

Numerički model vodostana sa prigušivačem

Sistem običnih diferencijalnih jednačina (5.2), (5.18) i (5.3), može se aproksimirati na sledeći način:

$$\frac{Z_V^{n+1} - Z_V^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{A_V} (Q_T^n - Q_{turb}^n) , \quad (5.19)$$

$$\frac{Q_T^{n+1} - Q_T^n}{\Delta t} = \frac{gA_T}{L} \left(-\frac{Z_V^{n+1} + Z_V^n}{2} - \xi_{PR} \frac{Q_V^n |Q_V^n|}{2gA_{PR}^2} \right) - \frac{2\lambda}{\pi D^3} Q_T^n |Q_T^n| , \quad (5.20)$$

$$Q_V^{n+1} = Q_T^{n+1} - Q_{turb} . \quad (5.21)$$

Primer 4

Na kraju kružnog tunela sa betonskom oblogom (apsolutna hrapavost $k = 2$ mm, dužine 9000 m, prečnika 3 m), nalazi se cilindrični vodostan sa prigušivačem. Pri proticaju od $20 \text{ m}^3/\text{s}$ regulator proticaja turbine se naglo zatvara i proticaj pada na nulu. Odrediti za koliko se smanjuje maksimalni nivo u vodostanu zahvaljujući prigušivaču u odnosu na vodostan bez prigušivača. Prečnik vodostana je 5.0 m, prečnik otvora prigušivača je 1.2 m, a koeficijent lokalnog gubitka za oba smera tečenja je isti i iznosi $\xi_{PR} = 2.0$.

Koeficijent trenja je jednak $\lambda = 0.0125$.

$$v_0 = \frac{Q_0}{A_T} = 2.83 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Početni nivo vode u vodostanu odgovara gubitku energije na trenje pri početnom proticaju,

$$Z_V = -\Delta E_{tr} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v_0^2}{2g} = -15.31 \text{ m} .$$

Perioda oscilovanja i amplituda oscilacija bez trenja iznose,

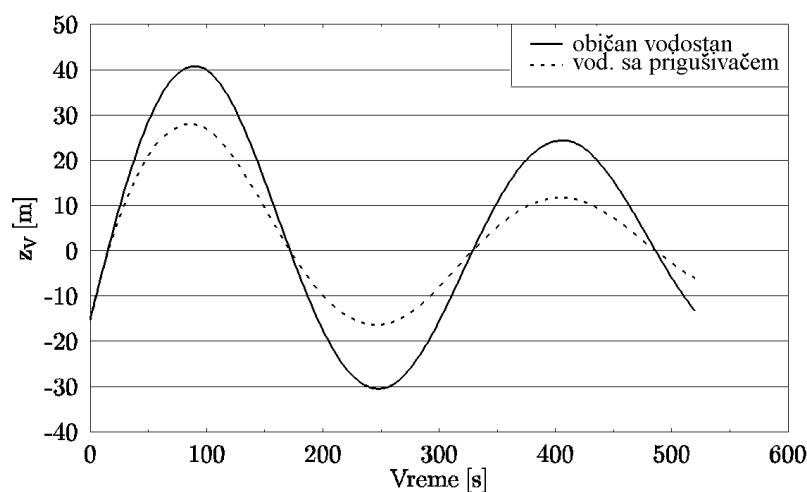
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{LA_V}{gA_T}} = 317 \text{ s} ,$$

$$Z^* = v_0 \sqrt{\frac{LA_T}{gA_V}} = 51.4 \text{ m} .$$

Jednačine matematičkog modela rešene su približno metodom Adams-Bašforta sa vremenskim korakom $\Delta t = 8 \text{ s}$ ($\approx T/40$). Na slici (5.17) prikazane su promene nivoa vode u vodostanu sa i bez prigušivača. Zahvaljujući prigušivaču maksimalni nivo je sa 41 m smanjen na 28 m (mereno u odnosu na nivo u uzvodnom rezervoaru). Trenje u tunelu odgovorno je za smanjenje maksimalnog nivoa sa 51.4 m na 41 m.

Na ovom primeru objasniće se princip rada prigušivača, dok se detaljnija objašnjenja mogu se naći u literaturi (Boreli, 1976). Na slici (5.18), prikazan je zbir sila (sile težine, pritiska i trenja), koje deluju na fluid u tunelu, odnosno, efektivna *sila kočenja* (podeljena sa $\rho g A_T$), za običan vodostan i za vodostan sa prigušivačem. "Sila kočenja" odgovara desnoj strani dinamičke jednačine (5.18). Kod običnog vodostana, prikazano punom linijom, sila prati promenu nivoa vode u vodostanu, i u prvim trenucima je najmanja. Linija polazi od koordinatnog početka jer je sila kočenja u trenutku proticaja kroz turbinu jednaka nuli. Naime, sile pritiska i težine uravnotežene su silom trenja. Prigušivač obezbeđuje značajnu silu kočenja i u početnom trenutku (tačkasta linija i šrafirano na dijagramu) pa odatle i veća efikasnost vodostana sa prigušivačem. Radi lakšeg razlučivanja doprinosa prigušivača na prigušenje, isprekidanom linijom nacrtana je i promena nivoa vode u vodostanu sa prigušivačem. Te dve linije se poklapaju kada je brzina vode u tunelu jednaka nuli.

Treba istaći da je izbor optimalnog oblika i dimenzija prigušivača vrlo osetljiva stvar. U zoni gde se traži rešenje, male promene površine prigušivača



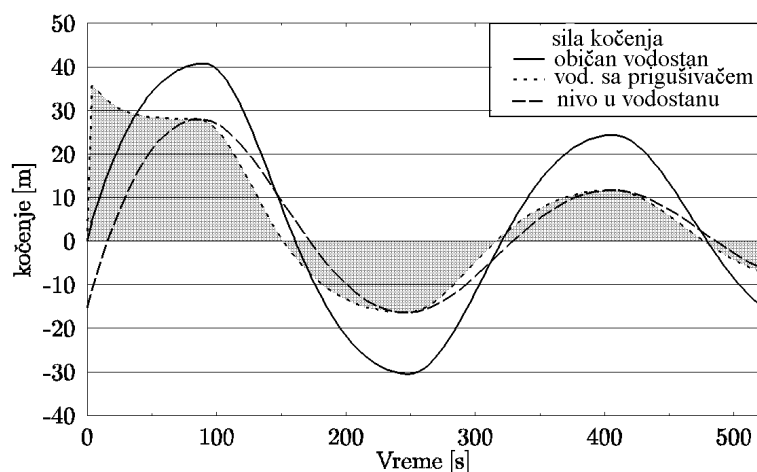
Slika 5.17: Uticaj prigušivača na smanjenje oscilacija nivoa vode u vodostanu

dovode do velikih promena ekstremnih vrednosti nivoa. Tu je najmanji problem tačnost proračuna, a osnovni, određivanje odgovarajućeg koeficijenta lokalnog gubitka. Najpouzdaniji način za određivanje tog koeficijenta su modelska ispitivanja. Zahteva se vrlo precizna izrada prigušivača i na modelu i na objektu, a ispitivanja su vrlo složena.

Osetljivost oscilacija na dimenzije prigušivača prikazana je tabelarno.

Prečnik D_p [m]	A_p [m ²]	Z_{max} [m]	"Sila kočenja" [m]
3.0	7.07	41.0	0.8
1.4	1.54	33.0	17.2
1.3	1.33	30.8	23.1
1.2	1.13	28.0	31.9
1.1	0.95	24.5	45.1

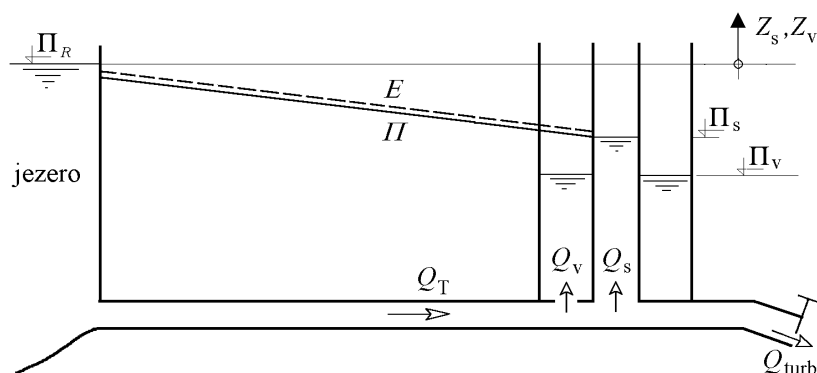
Rezultati su dobijeni variranjem prečnika prigušivača za podatke iz Primera 4. Pored prečnika i površine prigušivača date su i maksimalna kota u vodostanu i početna vrednost sile kočenja. Pretpostavljeno je i da je koeficijent lokalnog gubitka isti za sve proticaje i za sve razmatrane slučajeve, što je daleko od realnosti (Hajdin, Špoljarić, 1982).



Slika 5.18: Sila kočenja oscilacija nivoa u vodostanu

5.2.2 Diferencijalni vodostan

Diferencijalni vodostan se sastoji iz dva dela, od kojih jedan radi kao običan (na slici (5.19), prikazano kao centralni deo - S), a drugi, koji je glavni, kao vodostan s prigušivačem. Regulatorne karakteristike ovakvog vodostana, u principu, trebalo bi da budu bolje od vodostana sa prigušivačem.



Slika 5.19: Diferencijalni vodostan

Pijezometarska kota vode na kraju tunela odgovara koti nivoa, Π_s . Pretpostavlja se da nema prelivanja iz centralnog dela u glavni. Nepoznate

veličine, kojih ima pet, (Q_T , Q_V , Q_S , $Z_V = \Pi_V - \Pi_R$ i $Z_S = \Pi_S - \Pi_R$), određuju se iz sledećih relacija:

$$\frac{dQ_T}{dt} = -Z_S \frac{gA_T}{L} - \frac{2\lambda}{\pi D^3} Q_T |Q_T| , \quad (5.22)$$

$$Q_T = Q_V + Q_S + Q_{tur} , \quad (5.23)$$

$$Q_V = \pm C_Q A_{PR} \sqrt{2g|Z_S - Z_V|} , \quad (5.24)$$

$$\frac{dZ_V}{dt} = \frac{Q_V}{A_V} , \quad (5.25)$$

$$\frac{dZ_S}{dt} = \frac{Q_S}{A_S} . \quad (5.26)$$

Na osnovu prethodnih razmatranja lako se može doći do numeričkog modela diferencijalnog vodostana.

5.2.3 Napomene za projektovanje

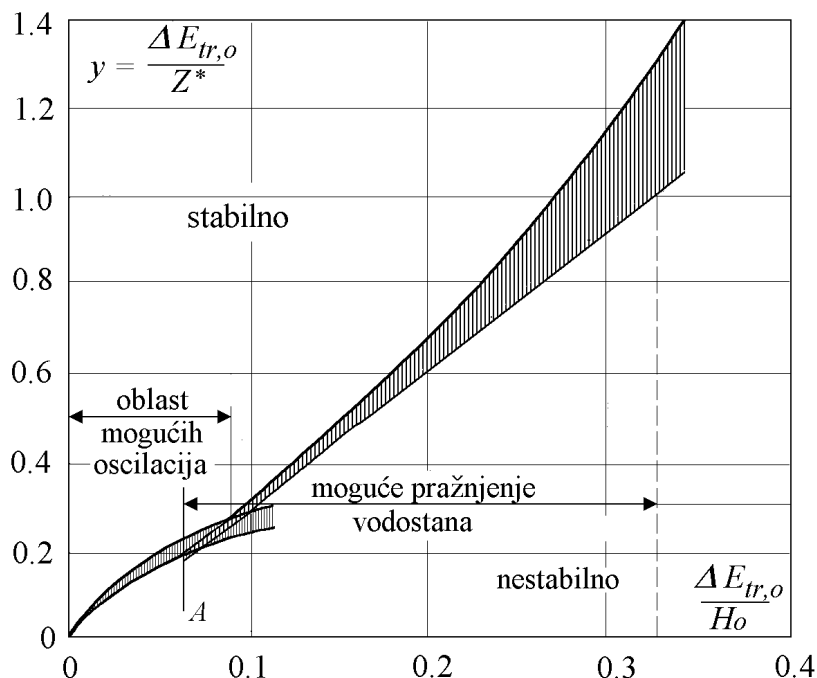
Vodostan je najefikasnije i najpouzdanije sredstvo za zaštitu od hidrauličkog udara dovodnih tunela hidroelektrana. Koristi se i u drugim situacijama, mada znatno ređe. Zbog visoke gradjevinske cene vodostana, prednost dobijaju jeftinija, obično manje pouzdana rešenja (vidi Poglavlje 9).

Zbog uloge koju imaju kod hidroelektrana vodostani se postavljaju što je moguće bliže turbinama. Vodostan pruža rasterećenje elastičnim talasima izazvanim manevrima turbine, ali promena brzine vode u tunelu dovodi do oscilatornog kretanja, koje vremenom mora da se prigušuje (uslov stabilnosti rada vodostana). Drugi uslov koji mora biti ispunjen je da ne dodje do pražnjenja vodostana i uvlačenja vazduha u tunel.

Bez obzira na rezerve koje razni istraživači imaju na Tomin kriterijum, on može da posluži za izbor minimalnog preseka vodostana. Tako se zahteva da presek cilindričnog vodostana bude bar 50 % veći od A , (vidi stranu 120), a diferencijalnog i vodostana sa prigušivačem, bar 25 %. Ovo su okvirne dimenzije od kojih se može odstupiti ako se za to ukaže potreba. Recimo, ako se oscilacije sporo prigušuju potrebno je povećati površinu vodostana, i obrnuto, ako se oscilacije brzo umiruju, može se površina vodostana i smanjiti. Za izbor konačnih dimenzija treba uzeti u razmatranje još podataka, kao, na primer, promenljivi koeficijent korisnog dejstva turbine, karakteristike regulatora itd.

Kao pomoć kod procene problema koji se javljaju u najkritičnijim uslovima rada (minimalni nivo u akumulaciji, maksimalna zahtevana snaga u datim uslovima) može da posluži dijagram (5.20) koji sadrži rezultate raznih istraživača (Chaudhry, 1979). Na apscisi je relativni gubitak energije u odnosu na bruto pad turbine, a na ordinati je gubitak energije u odnosu na amplitudu neprigušenih oscilacija. Ukoliko se radna tačka nalazi iznad linija ne treba očekivati nikakve probleme u radu vodostana, dok, ako je radna tačka ispod krivih, postoji opasnost od neprigušenog oscilovanja, ili od pražnjenja vodostana, ili od oboje.

Za određivanje maksimalnog nivoa u vodstanu, analizira se slučaj trenutnog ispada svih turbina pri maksimalnom radnom nivou i maksimalnom proticaju. Za određivanje minimalnog nivoa obično se analizira povećanje proticaja sa 50 % na 100 % pri minimalnom nivou u akumulaciji.



Slika 5.20: Vrste nestabilnih režima rada vodostana

U fazi projektovanja ne mogu se sa sigurnošću znati vrednosti koeficijenta trenja i lokalnih gubitaka. Zbog toga se kod procene maksimalnog nivoa u vodostanu radi sa najmanjim mogućim vrednostima, i sa najvišim nivoom

vode u akumulaciji. Kod određivanja minimalne kote u vodostanu, uzimaju se maksimalno moguće vrednosti koeficijenata gubitaka energije i minimalni nivo u akumulaciji.

Bibliografija

- [1] Boreli, M., 1976, *Hidraulika*, Gradjevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu.
- [2] Hajdin, G., Špoljarić, A., 1982, Fizički modeli kao potrebno sredstvo za određivanje lokalnih uticaja u prelaznim procesima u hidrotehničkim sistemima. Poseban osvrt na vodostanske prigušivače. Savetovanje za visoke brane.
- [3] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., 1989, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press.
- [4] Jaeger, C., 1961, *Engineering Fluid Mechanics*, Blackie and Sons Ltd., London.
- [5] Chaudhry, M. H., 1979, *Applied Hydraulic Transients*, Van Nostrand Reinhold Company.

Poglavlje 6

Hidraulički udar

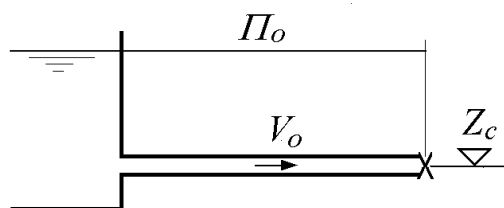
6.1 Opis pojave

Posmatra se relativno kratak horizontalno položen cevovod (slika 6.1), na čijem uzvodnom kraju se nalazi rezervoar, a na nizvodnom, zatvarač, koji je delimično otvoren. Pri početnom proticaju, Q_0 , i brzini, V_0 , gubitak energije na trenje je zanemarljiv u odnosu na gubitak energije na zatvaraču.

Zatvarač se trenutno i potpuno zatvara, i izaziva trenutno zaustavljanje vode uzvodno od zatvarača i povećanje piježometarske kote za $\Delta\Pi$, koje se dobija na osnovu izraza Žukovskog,

$$\Delta\Pi = -\frac{a\Delta V}{g} \quad (3.16)$$

Pretpostavlja se da je visina pritiska ($\Pi_0 - Z_C$), duž cevi u početnom trenutku, veća od ($\Delta\Pi$). Ovo je najjednostavniji primer, kojim se ilustruje fenomen hidrauličkog udara. Koriste se relacije izvedene u Poglavlju 3, upravo za



Slika 6.1: Početno stanje, pre naglog zatvaranja zatvarača

takav slučaj. Opšti matematički model, koji ima mnogo širu primenu, izvešće se u nastavku.

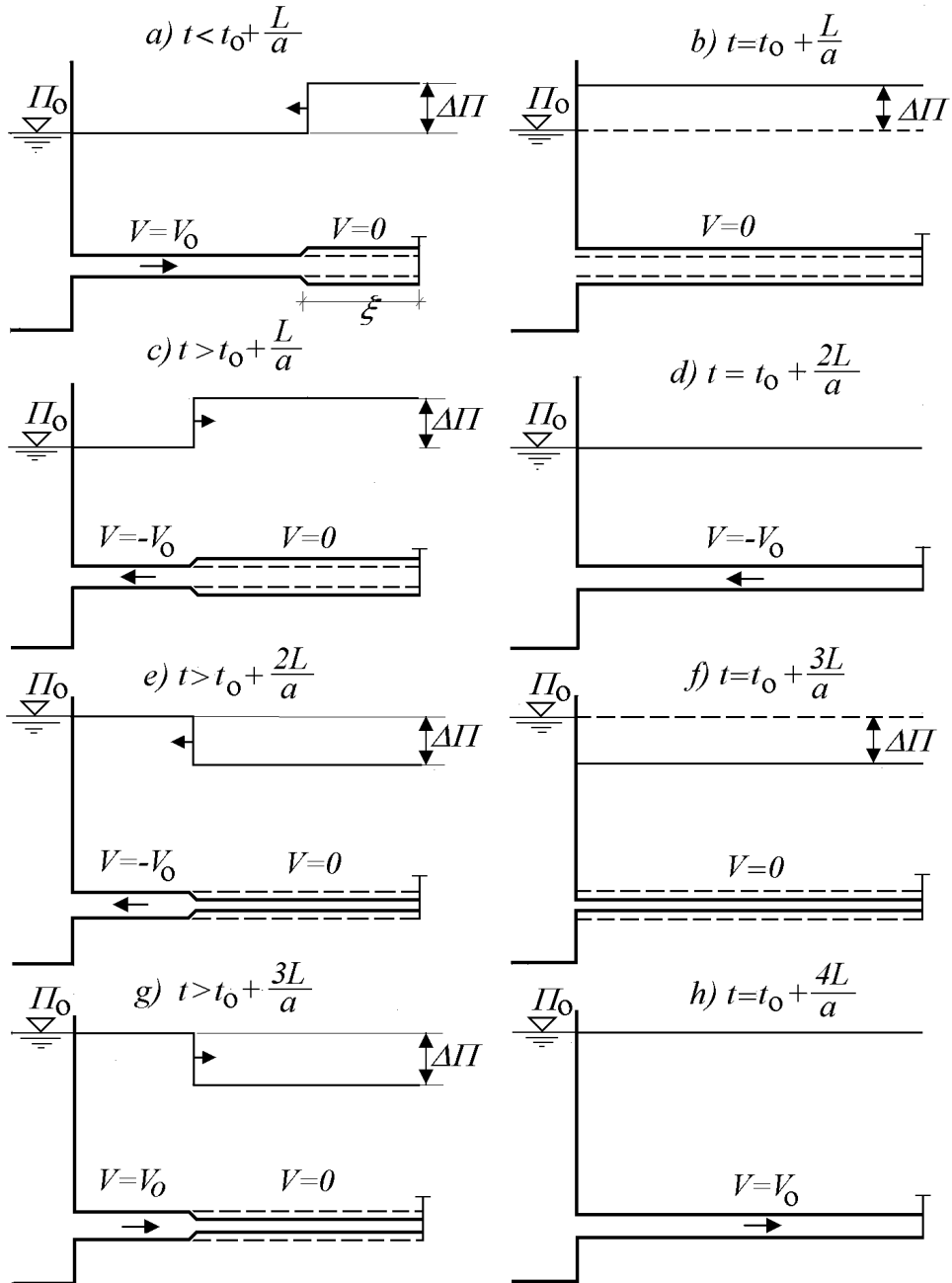
Poremećaj (zaustavljanje vode i povećanje pijezometarske kote) putuje uzvodno brzinom propagacije, a . Redosled događaja prikazan je na slici (6.2), gde se, osim promena na pijezometarskoj liniji, mogu, karikirano, videti i promene na cevi (kod povećanja pijezometarske kote, širenje cevi, a kod smanjenja, sužavanje).

Prva slika, (a), pokazuje trenutak ($t = t_0 + \xi/a$), kada je poremećaj stigao do preseka koji je na rastojanju (ξ) uzvodno od zatvarača. Slika (b) pokazuje momenat kada je poremećaj stigao do uzvodnog kraja cevi. Brzina fluida u celoj cevi jednaka je nuli, a na celoj dužini cevi povećana je pijezometarska kota. U odnosu na neporemećeno stanje, masa fluida u cevi povećana je za $(\rho L A_C \Delta V/a)$. Fluid je normalno pricao u cev, sve dok poremećaj nije stigao do rezervoara. Tada dolazi do rasterećenja stanja napona fluida u cevi, a zbog velike zapremine rezervoara, u njemu se ne menja nivo. Pritisak na ulazu u cev postaje jednak pritisku u rezervoaru, a višak vode počinje da ističe iz cevi. Zbog elastične deformacije dolazi do iste promene brzine, ali sa promenjenim znakom, $-V_0$. Talas rasterećenja (negativni talas) putuje nizvodno brzinom, a , (na slici (c)).

Na slici (d), u trenutku $t = t_0 + 2L/a$, na celoj cevi je uspostavljeno prvobitno stanje pritiska, ali je brzina suprotnog smera od prvobitne. Poremećaj je stigao do zatvarača, od koga ne može dalje. Zatvarač još jednom nameće uslov, $V = 0$, ali zbog različitog smera brzine, sada dolazi do smanjenja visine pritiska za $\Delta\Pi$. Negativni talas (smanjenje pritiska) odbio se od zatvorenog zatvarača i putuje uzvodno. Prostiranje negativnog talasa u uzvodnom smeru prikazano je na slici (e). Slika (f) pokazuje stanje kada je $V = 0$, ali za razliku od slike (b), ovde je pijezometarska kota za $(\Delta\Pi)$ manja od početne. Kod rezervoara opet dolazi do rasterećenja stanja napona fluida u cevi, i fluid iz rezervoara kreće, brzinom V_0 , da nadoknadi manjak u cevi, slika (g). Na kraju, posle $(4L/a)$, opet se dolazi do slike sa početka analize, za t_0 , kada je došlo do naglog zatvaranja cevovoda. Zbog zanemarenja trenja i pretpostavke o elastičnim deformacijama fluida i cevi dolazi do neprigušenog periodičnog prelaska kinetičke energije fluida u elastičnu.

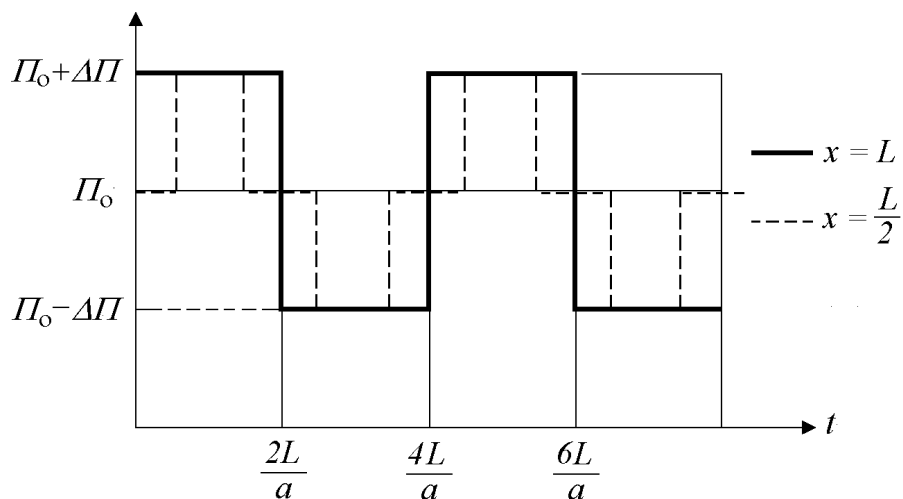
Vremenski interval posle koga se uslovi u jednom poprečnom preseku ponavljaju, naziva se teorijskom periodom oscilacija cevovoda:

$$T = \frac{4L}{a} \quad (6.1)$$



Slika 6.2: Propagacija i odbijanje talasa hidrauličkog udara, koji je izazvan trenutnim i potpunim zatvaranjem zatvarača na nizvodnoj strani cevovoda

Na slici (6.3) dat je dijagram promene piježometarskih kota u karakterističnim tačkama na cevovodu, na sredini i na kraju cevovoda, u funkciji vremena. Trajanje promenjenog pritiska najveće je kod zatvarača, a najmanje je kod rezervoara, praktično nula. Brzina se takodje menja periodično, s tim, što je kod zatvarača stalno jednaka nuli, a na ulazu u cevovod skače sa pozitivne na negativnu vrednost.



Slika 6.3: Promene Π - kota u karakterističnim tačkama cevi izazvane trenutnim zatvaranjem zatvarača

Važno je uočiti sledeće: kod rezervoara, odnosno kod mesta rasterećenja, talas promene pritiska promenio je znak, a kod slepog kraja cevi odbio se bez promene znaka.

Slučaj naglog otvaranja zatvarača na cevovodu, mnogo je komplikovaniji. Proticaj kroz zatvarač zavisi od piježometarske kote uzvodno od zatvarača, što se ne može lako opisati jednostavnim modelom. Zbog pravljenja paralele sa modelom krutog udara slučaj naglog otvaranja zatvarača biće analiziran u narednom poglavlju.

6.2 Osnovne jednačine

Relacija Žukovskog izvedena je za naglu promenu brzine i uz zanemarenje trenja. Može poslužiti za procenu ekstremnih vrednosti pritisaka u kratikim

cevovodima, ali nije dovoljna za analizu prelaznih režima u složenijim cevovodima. Za izvođenje matematičkog modela koriste se isti zakoni održanja kao u Poglavlju 3, samo sa nešto manje pojednostavljenja.

Pored osnovnih pretpostavki o linijskom problemu (varijacije brzine po poprečnom preseku se zanemaruju, važi hidrostatička raspodela pritisaka u poprečnom preseku itd.) i korišćenju veličina reprezentativnih za poprečni presek, uvode se i dodatne pretpostavke:

- Fluid i materijal cevi ponašaju se kao idealno elastično telo,
- Sila trenja se uzima kao kod ustaljenog tečenja,
- Nema diskontinuiteta u cevi, što je preduslov za diferencijalni pristup.

Dinamička jednačina se izvodi za elementarnu deonicu cevi, a zbog stišljivosti fluida i deformisanja cevi, neophodna je i jednačina kontinuiteta (Poglavlje 3).

6.2.1 Dinamička jednačina

Posmatra se masa fluida na deonici cevi, elementarne dužine, δx (slika 6.4), dovoljno male da se može pretpostaviti linearna promena svih veličina na njoj.

Sila pritiska u pravcu strujanja koja deluje na elementarnu masu fluida sastoji se od razlike sila pritiska u uzvodnom i nizvodnom poprečnom preseku

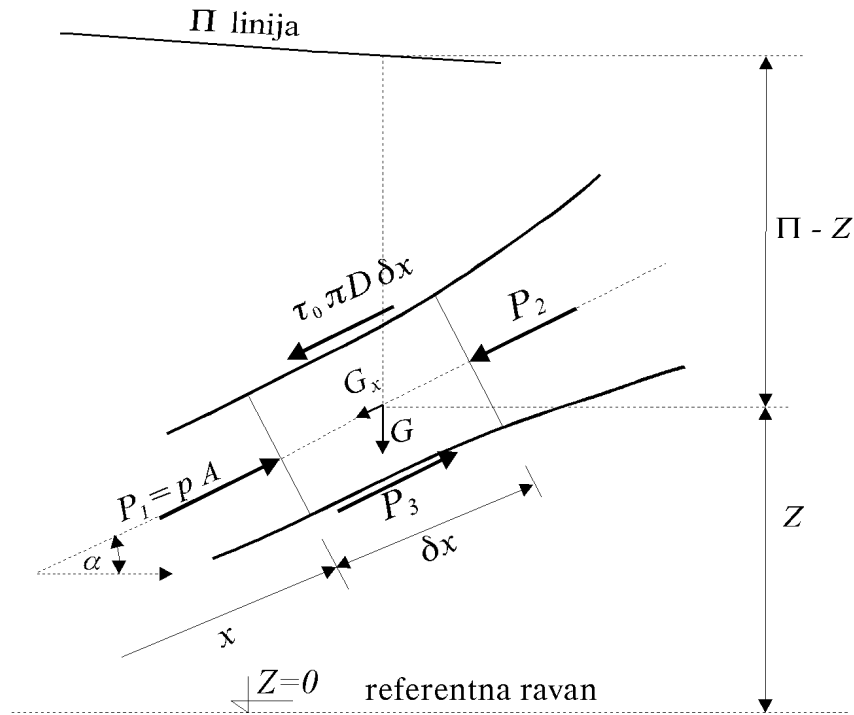
$$P_1 - P_2 = pA - \left[pA + \frac{\partial(pA)}{\partial x} \delta x \right] \quad (6.2)$$

i sile kojom kontura (cev) deluje na elementarnu masu fluida u pravcu osovine cevi

$$P_3 = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \frac{\partial A}{\partial x} \delta x . \quad (6.3)$$

U opštem slučaju površina poprečnog preseka nije konstantna. Uz zanezanje jako malih veličina, ukupna sila pritiska u pravcu strujanja iznosi

$$\Delta P = - \frac{\partial p}{\partial x} A \delta x \quad (6.4)$$



Slika 6.4: Sile koje deluju na elementarnu masu fluida

Komponenta sile težine u pravcu osovine cevi na elementarnu masu fluida jednaka je

$$G_x = -\rho g A \delta x \sin \alpha \quad (6.5)$$

Sila trenja deluje u suprotnom smeru od brzine i jednaka je prosečnom tangencijalnom naponu, τ_0 , pomnoženim unutrašnjom površinom cevi koja je u kontaktu sa fluidom, $O\delta x$,

$$T = -\tau_0 O \delta x = -C_\tau \frac{1}{2} \rho V |V| O \delta x$$

Kod neustaljenog tečenja, sile pritiska, težine i trenja, nisu u ravnoteži. Njihovo delovanje dovodi do promene količine kretanja mase fluida na koju deluju¹.

$$\begin{aligned} \text{masa} \times \text{ubrzanje} &= \Sigma \text{sila} \\ \text{masa (elementa)} &= \rho A \delta x \end{aligned}$$

¹ Drugi Njutnov zakon mehanike

$$\begin{aligned} \text{ubrzanje} &= \frac{DV}{Dt} \\ \rho A \delta x \frac{DV}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} A \delta x - \rho g A \delta x \sin \alpha - \tau_0 D \pi \delta x \end{aligned} \quad (6.6)$$

odakle se dobija opšti oblik dinamičke jednačine za neustaljeno tečenje u cevi

$$\frac{DV}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \alpha + \frac{4\tau_0}{\rho D} = 0 \quad (6.7)$$

Kod strujanja tečnosti, umesto pritiska koristi se piježometarska kota, $p = \rho g(\Pi - z)$, gde je z visina težišta poprečnog preseka cevi. Pod pretpostavkom da se gustina fluida menja znatno manje od piježometarske kote i kote položaja cevi dobija se

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \sin \alpha \right)$$

Dobija se jednačina koja se u suštini ne razlikuje od one za kruti udar:

$$\frac{DV}{Dt} = -g \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\tau_0 4}{\rho D} \quad (6.8)$$

odnosno,

$$\frac{DV}{Dt} = -g \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\lambda}{2D} V|V| \quad (6.9)$$

Umesto razlike piježometarskih kota na početku i na kraju cevi, $\Delta \Pi/L$, ovde stoji, $\partial \Pi/\partial x$, odnosno, to isto, ali za elementarnu deonicu cevi. I brzina se menja duž cevi, pa se umesto totalnog izvoda brzine (tj. materijalnog izvoda) piše:

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}$$

Na kraju se dolazi do dinamičke jednačine u sledećem obliku:

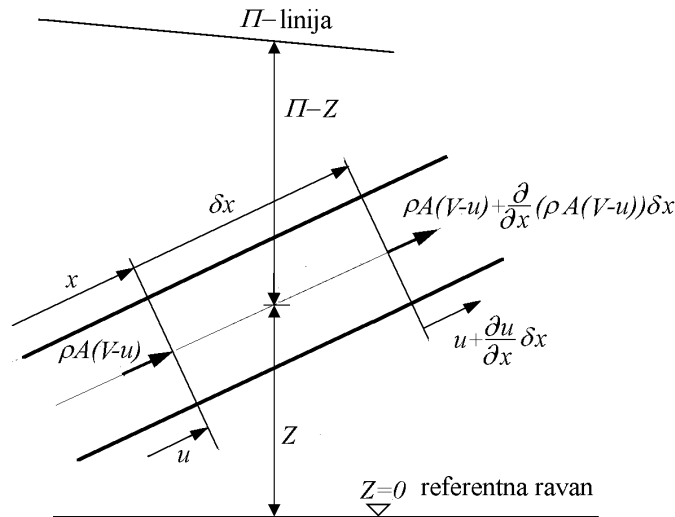
$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\lambda}{2D} V|V| = 0 \quad (6.10)$$

Član $V \partial V/\partial x$, obično se zanemaruje u odnosu na $\partial V/\partial t$, pa se jednačina koristi u obliku:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\lambda}{2D} V|V| = 0 \quad (6.11)$$

6.2.2 Jednačina kontinuiteta

Kod primene uslova održanja mase fluida na elementarnoj deonici cevi vodi se računa o brzini kretanja fluida, V , i o brzini pomeranja zida cevi, u , kao i o odgovarajućim totalnim izvodima, D/Dt , koji prati kretanje fluida i D'/Dt , koji prati pomeranje zida cevi. Pretpostavlja se da se zid cevi pomera brzinom u u pravcu ose cevi, i da kontrolna zapremina prati to pomeranje.² Brzina fluida, V , i brzina pomeranja cevi, u , definisane su u spoljnom, nepokretnom, koordinatnom sistemu (Wylie, Streeter, 1978).



Slika 6.5: Kontrolna zapremina za primenu zakona održanja mase

Razlika izlaza i ulaza mase u kontrolnu zapreminu (slika 6.5):

$$Q_{m,izlaz} - Q_{m,ulaz} = \frac{\partial}{\partial x} [\rho A(V - u)] \delta x \quad (6.12)$$

² Ovo nije jedino pomeranje cevi, koje se može desiti, ali jeste jedino koje se može lako uključiti u linijski model. Sledeći, znatno komplikovaniji nivo, predstavljaju tzv. FSI (fluid structure interaction) modeli kod kojih se identifikuje više elastičnih talasa, koji se kreću kroz cev. Dodatne jednačine su neophodne da bi se procenilo sadejstvo talasa i fluida u cevi.

odgovara promeni mase kontrolne zapremine:

$$\frac{D'}{Dt}(\rho A \delta x) \quad , \quad (6.13)$$

gde D'/Dt označava totalni izvod u odnosu na podužno pomeranje cevi, koji glasi

$$\frac{D'}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \quad .$$

Izjednačavanjem izraza (6.12) i (6.13), i njihovim delimičnim diferenciranjem dobija se:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho AV) - \frac{\partial}{\partial x}(\rho Au) \right] \delta x + \frac{D'}{Dt}(\rho A) \delta x + \rho A \frac{D' \delta x}{Dt} = 0 \quad . \quad (6.14)$$

Sa slike (6.5) se vidi da je promena dužine kontrolne zapremine, (δx) , jednaka:

$$\frac{D' \delta x}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \quad .$$

Daljim pojednostavljenjem izraza (6.14) dolazi se do:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho AV) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) = 0 \quad . \quad (6.15)$$

Parcijalnim diferenciranjem prvog člana u jednačini (6.15), dolazi se do

$$\rho A \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial(\rho A)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) = 0 \quad (6.16)$$

Poslednja dva člana predstavljaju konvektivni i lokalni izvod (ρA) , a zajedno, čine materijalni izvod koji prati fluidni element:

$$\frac{1}{\rho A} \frac{D}{Dt}(\rho A) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (6.17)$$

Totalni izvod se može razdvojiti na deo koji pokazuje promenu gustine fluida, i deo koji pokazuje deformisanje cevi:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (6.18)$$

Ovo je opšti oblik jednačine koja važi, kako za cilindrične, tako i za cevi proizvoljnog oblika i promenljivog poprečnog preseka. Da bi se utvrdila veza između deformacija i napona, u prvom redu, pritiska, potrebno je uvesti dodatne pretpostavke i ograničenja. Posmatraju se samo elastične prizmatične cevi, kružnog preseka.

Po definiciji zapreminskog modula stišljivosti za tečnosti i za izotermno stanje (Hajdin, 1977)

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta \rho / \rho} = - \frac{\Delta p}{\Delta V / V}$$

odnosno, preko izraza

$$\frac{1}{\rho} \Delta \rho = \frac{1}{K} \Delta p,$$

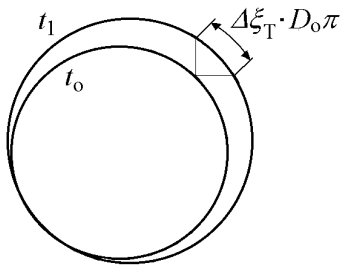
dolazi se do:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{K} \frac{Dp}{Dt} \quad (6.19)$$

Pretpostavka da se cev ponaša kao elastično Hukovo (*Hook*) telo, važi čak i za cevi od mekih materijala kao što je PVC, PE itd., u oblasti radnih pritisaka. Postupak izvođenja jednačine kontinuiteta svodi se na definisanje dilatacija i njihovo linearno povezivanje sa naponima.

Promena površine poprečnog preseka može se dovesti u vezu sa poprečnom dilatacijom, ξ_T (slika 6.6):

Povećanje obima kruga iznosi $\Delta \xi_T D_0 \pi$



$$\pi D_1 = \pi D_0 + \Delta \xi_T D_0 \pi$$

$$D_1 = D_0 + \Delta \xi_T D_0$$

$$A_0 = \frac{D_0^2 \pi}{4} \quad A_1 = \frac{D_1^2 \pi}{4} \approx \frac{D_0^2 \pi}{4} (1 + 2\Delta \xi_T)$$

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A_1 - A_0}{A_0} = 2\Delta \xi_T$$

Slika 6.6: Veza promene površine poprečnog preseka cevi i poprečne dilatacije

$$\frac{\Delta A}{A} = 2\Delta \xi_T \quad (6.20)$$

Materijalni izvod promene površine poprečnog preseka jednak je

$$\frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} = 2 \frac{D\xi_T}{Dt} \quad (6.21)$$

Poprečna dilatacija ξ_T izražava se na sledeći način

$$\xi_T = \xi_2 - \mu\xi_1 \quad (6.22)$$

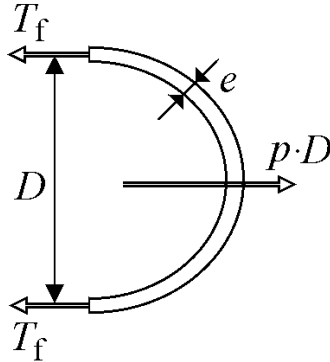
gde je, (μ) , Poasonov (*Poisson*) koeficijent, koji vezuje dilatacije u glavnim pravcima, ξ_1 i ξ_2 . ξ_1 i ξ_2 su dilatacije u pravcima glavnih napona, σ_1 , i, σ_2 . Oni su povezani Jangovim (*Young*) modulom elastičnosti:

$$\xi_2 = \frac{\sigma_2}{E} \quad \xi_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad (6.23)$$

Na osnovu (6.21) dolazi se do

$$2\frac{D\xi_T}{Dt} = \frac{2}{E} \left(\frac{D\sigma_2}{Dt} - \mu \frac{D\sigma_1}{Dt} \right) \quad (6.24)$$

Do poprečnog napona u cevi dolazi se primenom kotlovske formule (slika 6.7). Presečne sile T_f , su u ravnoteži sa silom pritiska na površinu jedinične dužine i širine D :



Slika 6.7: Sile koje deluju na polovinu cevi

$$\sigma_2 = \frac{T_f}{e} = \frac{pD}{2e} \quad (6.25)$$

Odnosno,

$$\frac{D\sigma_2}{Dt} = \frac{D}{2e} \frac{Dp}{Dt} \quad (6.26)$$

Napon σ_1 zavisi od načina oslanjanja cevi, odnosno, od mogućnosti podužnog pomeranja cevi. Postoje tri osnovna načina oslanjanja cevi:

1. Cev uklještena samo na uzvodnom kraju:

$$\sigma_1 = \frac{pA}{D\pi e} \quad \frac{D\sigma_1}{Dt} = \frac{A}{D\pi e} \frac{Dp}{Dt} . \quad (6.27)$$

2. Cev uklještena u osloncima bez aksijalnog pomeranja:

$$\sigma_1 = \mu\sigma_2 \quad \frac{D\sigma_1}{Dt} = \mu \frac{D\sigma_2}{Dt} . \quad (6.28)$$

3. Cev je na osloncima, koji se mogu slobodno podužno pomerati,

$$\sigma_1 = 0 \quad \frac{D\sigma_1}{Dt} = 0 . \quad (6.29)$$

Kada se izrazi (6.24) i (6.19) uvrste u jednačinu (6.18), a za cev oslonjenu na način (1), dobija se,

$$\frac{2}{E} \left(\frac{D}{2e} \frac{Dp}{Dt} - \mu \frac{D^2\pi}{4D\pi e} \frac{Dp}{Dt} \right) + \frac{1}{K} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 . \quad (6.30)$$

Konačno, posle sredjivanja prethodnog izraza, dolazi se do opšteg oblika jednačine kontinuiteta za neustaljeno strujanje elastičnog fluida u elastičnoj cevi

$$\frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 , \quad (6.31)$$

gde je, a^2 , kvadrat brzine propagacije talasa hidrauličkog udara, već određeno u Poglavlju 3,

$$a^2 = \frac{K/\rho}{1 + \frac{K}{E} \frac{D}{e} c_1} . \quad (6.32)$$

Koeficijent c_1 zavisi od načina oslanjanja cevi, i za gore pomenute načine oslanjanja, jednak je:

1. $c_1 = 1 - \mu/2$,
2. $c_1 = 1 - \mu^2$,
3. $c_1 = 1$.

Za tečnosti se umesto pritiska, obično koristi potencijalna energija po jedinici težine - pijezometarska kota, Π ,

$$p = \rho g(\Pi - Z) \quad (6.33)$$

$$\frac{Dp}{Dt} = \rho g \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + V \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial t} - V \frac{\partial Z}{\partial x} \right) . \quad (6.34)$$

Pretpostavlja se da je pomeranje cevi beznačajno u odnosu na promenu pijezometarske kote, i da je $\partial Z/\partial t = 0$, a umesto $\partial Z/\partial x$ uvodi se nagib cevi, $-\sin \alpha$. U prethodnom izrazu, kao uostalom i kod dinamičke jednačine, pretpostavljeno je da se gustina fluida menja mnogo manje od pijezometarske kote, pa je kod diferenciranja ρ posmatrano kao konstanta. To je uobičajena pretpostavka mada nije u skladu sa polaznim pretpostavkama. Kao rezultat dobija se jednačina kontinuiteta u sledećem obliku:

$$V \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} - V \sin \alpha + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 . \quad (6.35)$$

U jednačini (6.35), član $\partial \Pi/\partial t$, je mnogo veći od članova $V \partial \Pi/\partial x$ i $V \sin \alpha$, pa se ova dva obično zanemaruju. Jednačina kontinuiteta se obično koristi u sledećem obliku:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (6.36)$$

6.2.3 Osobine jednačina matematičkog modela

Jednačine (6.10) i (6.35) su parcijalne diferencijalne jednačine. U njima se javljaju dve zavisno promenljive veličine, pijezometarska kota, Π , i srednja brzina fluida, V , u funkciji od dve nezavisno promenljive, x i t . I u nelinearnim članovima javljaju se parcijalni izvodi na prvi stepen, pa se radi o kvazi-linearnim jednačinama.

Jednačine ovog tipa mogu se razvrstati u tri grupe: hiperboličke, paraboličke i eliptičke, od čega zavisi način na koji će se rešavati (Press et al., 1989).

Jednačine se mogu napisati u matricnoj formi (Chaudhry, 1979)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{array}{c} V \\ \Pi \end{array} \right\} + [\mathbf{B}] \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{array}{c} V \\ \Pi \end{array} \right\} + \{\mathbf{C}\} = 0 , \quad (6.37)$$

gde je \mathbf{B} matrica koeficijenata i \mathbf{C} matrica slobodnih članova:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} V & g \\ a^2/g & V \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{Bmatrix} \frac{\lambda}{2D}V|V| \\ -V \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

Sopstvene vrednosti matrice \mathbf{B} određuju tip jednačina.

$$\begin{vmatrix} V - \lambda & g \\ a^2/g & V - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (V - \lambda)^2 &= 0, \\ \lambda_{1,2} &= V \pm a. \end{aligned}$$

Ako su sopstvene vrednosti, λ_1 i λ_2 , realne i međusobno različite, sistem jednačina je hiperbolički, ako su realne i međusobno jednake, sistem je parabolčki, a ako su imaginarne, sistem je eliptički. Pošto je brzina propagacije a različita od nule, jednačine su hiperboličke.

U odnosu na matematičke modele kvazi-ustaljenog tečenja i krutog udara, ove jednačine su znatno komplikovanije.

Od jednačina matematičkog modela hidrauličkog udara očekuje se da budu zadovoljene i za slučaj ustaljenog tečenja. Međutim, ovde treba biti oprezan. Dinamička jednačina se ne svodi na Darsi-Vajsbahovu jednačinu, $\partial\Pi/\partial x = (\lambda V^2)/(D2g)$, jer zbog pretpostavke o deformisanju cevi, osnovna pretpostavka o konstantnoj brzini duž cevi nije zadovoljena. Korišćenjem pi-jezometarske kote umesto pritiska uticaj promene gustine zadržan je samo u brzini propagacije talasa, ali promena poprečnog preseka postoji. Jednačine se u ustaljenom tečenju svode na sledeći oblik

$$V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\lambda}{2D} V|V| = 0, \quad (6.38)$$

$$V \frac{\partial \Pi}{\partial x} - V \sin \alpha + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (6.39)$$

Lako se može pokazati da prva jednačina predstavlja Bernulijevu jednačinu za deonicu cevi elementarne dužine

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\lambda V^2}{D2g} = 0, \quad (6.40)$$

gde je, $E = \Pi + V^2/2g$, energija fluidne struje, po jedinici težine, a da druga daje promenu brzine usled promene pritiska, koja važi i u ustaljenom strujanju

$$V \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (6.41)$$

6.3 Pojednostavljene jednačine

Jednačine matematičkog modela hidrauličkog udara mogu se daljim pojednostavljenjem dovesti do oblika koji se može analitički rešiti. Ukoliko se u dinamičkoj jednačini (6.11), zanemari član sa trenjem dolazi se do para linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (6.42)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad (6.43)$$

koje se, eliminacijom jedne promenljive, mogu transformisati u jednu jednačinu:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}, \quad (6.44)$$

ili, u ekvivalentnu jednačinu u kojoj se pojavljuje brzina, V :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (6.45)$$

Rešenje ovih jednačina je:

$$\Pi = \Pi_0 + F\left(t + \frac{x}{a}\right) + f\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad (6.46)$$

$$V = V_0 - \frac{g}{a} \left[F\left(t + \frac{x}{a}\right) - f\left(t - \frac{x}{a}\right) \right] \quad (6.47)$$

gde, F i f , koje imaju iste dimenzije kao pijeometarska kota, predstavljaju proizvoljne funkcije veličina u zgradama. Funkcije F i f predstavljaju dve familije poremećaja pijeometarske kote, koji se kreću u negativnom (funkcija F) i pozitivnom (funkcija f) smeru x ose. Umesto nezavisnih promenljivih, x i t , uvedene su nove, $(t + x/a)$ i $(t - x/a)$. Interesantno je to da su, $t + x/a = \text{const}$, i $t - x/a = \text{const}$, jednačine dve familije pravih linija, duž kojih se prostiru poremećaji u negativnom i u pozitivnom smeru x ose. Funkcije F i f se određuju na osnovu graničnih uslova i ne menjaju se duž tih linija.

Promena pijeometarske kote u proizvoljnom preseku predstavlja zbir doprinosa putujućih poremećaja, sadržanih u funkcijama, F i f .

Ova rešenja (zovu se Rimanova (*Riemann*)), koristio je Alijevi (*Allievi*) u definisanju čuvenih "Alijevijevih jednačina", koje su, od početka ovog veka

pa sve do šezdesetih godina bile glavno orudje za analizu hidrauličkog udara. Ta rešenja su takodje i osnov za većinu grafičkih metoda analize hidrauličkog udara, kao, na primer, metoda Šnider-Beržerona (*Schnyder-Bergeron*) (Fox, 1977; Schnyder, 1937).

Zajednička karakteristika svih ovih metoda je da su jednostavne kod primene na pojedinačne cevi sa jednostavnim graničnim uslovima, ali da praktično postaju neupotrebljive kada su u pitanju distribucione mreže, i složeniji granični uslovi. One se neće ovde analizirati, a zainteresovani čitalac može naći više o njima u knjigama, koje se posebno bave problematikom hidrauličkog udara (Fox, 1977; Wylie & Streeter, 1978).

U nastavku će se objasniti metoda karakteristika, koja uz malo više truda, pruža neuporedivo više mogućnosti za analizu. ³

Bibliografija

- [1] Chaudhry, M. H., 1979, *Applied Hydraulic Transients*, Van Nostrand Reinhold Company.
- [2] Fox, J. A., 1977, *Hydraulic analysis of unsteady flow in pipe networks*, The Macmillan Press Ltd.
- [3] Hajdin, G., 1977, *Mehanika fluida*, Gradjevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu.
- [4] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., 1989, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press.
- [5] Schnyder O., 1937, Comparisons between calculated and test results on water hammer in pumping plants, Transactions of ASME, Nov. 1937.
- [6] Wylie, E. B., Streeter, V. L., 1978, *Fluid Transients*, McGraw-Hill.

³ U krajnjoj liniji, i Alijevijeva metoda je jedan oblik metode karakteristika, jer se koristi osobina hiperboličkih jednačina da imaju dve realne, međjusobno različite karakteristike.

Poglavlje 7

Metoda karakteristika

Kompletne jednačine hidrauličkog udara primenjene na složene probleme iz prakse, ne mogu se analitički rešiti. Za dobijanje rešenja moraju se koristiti približne metode.

U inženjerskoj praksi dugo su korišćene grafičke metode, i metode zasnovane na rešenjima pojednostavljenih jednačina, (6.42) i (6.43). Uvodjenjem računara u širu upotrebu postalo je sasvim normalno korišćenje numeričkih metoda za približno rešavanje diferencijalnih jednačina matematičkog modela hidrauličkog udara, (6.11) i (6.35).

U prethodnim poglavljima, gde su matematički modeli bili obične diferencijalne jednačine, videlo se da se do numeričkog modela dolazi aproksimacijom izvoda konačnim razlikama. Takodje, skoro generalno važi pravilo, da se kraćim korakom integracije postiže i veća tačnost numeričkog rešenja (Poglavlje 1).

Situacija se značajno komplikuje kod parcijalnih diferencijalnih jednačina. Pored stabilnosti i konsistentnosti numeričkog postupka, mora se voditi računa i o numeričkoj difuziji, koja kao posledicu ima rasplinjavanje približnog rešenja i mogućnost greške u proceni ekstremnih vrednosti pritisaka. Iako ima usamljenih pokušaja da se osnovne jednačine diskretizuju u osnovnom obliku (Chaudhry, 1979; Watt et al., 1980; Verwey & Yu, 1993), mnogo je više onih koji smatraju, da treba iskoristiti činjenicu da se radi o hiperboličkim jednačinama i da jednačine treba prethodno prevesti u poseban oblik običnih diferencijalnih jednačina, karakterističan oblik, pa ih tek onda aproksimirati konačnim razlikama, kao što je to uradjeno u ovom poglavlju.

7.1 Osnovne jednačine u formi karakteristika

Kod hiperboličkih parcijalnih diferencijalnih jednačina, postoji mogućnost svodjenja parcijalnih diferencijalnih jednačina na obične, koje važe duž određenih linija u ravni (x, t) . U tom slučaju postoje dve realne sopstvene vrednosti matrice koeficijenata (Poglavlje 6) i dve familije linija, koje se zovu karakteristike.

Osnovne jednačine, (6.11) i (6.35), označavaju se kao L_1 i L_2

$$L_1 = g \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\lambda}{2D} V |V| = 0 \quad , \quad (7.1)$$

$$L_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial t} + V \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} - V \sin \alpha = 0 \quad . \quad (7.2)$$

One se mogu linearno kombinovati na sledeći način:

$$\begin{aligned} L &= L_1 + \chi L_2 = \\ &\chi \left[\left(V + \frac{g}{\chi} \right) \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right] + \left[\left(V + \chi \frac{a^2}{g} \right) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \right] + \\ &\frac{\lambda V |V|}{2D} - \chi V \sin \alpha = 0 \quad . \end{aligned} \quad (7.3)$$

Bilo koje dve realne vrednosti parametra χ daće sistem od dve jednačine, koji je ekvivalentan jednačinama $L_1 = 0$ i $L_2 = 0$. Interesantne su samo one vrednosti za koje veličine u uglastim zgradama postaju totalni izvodi.

Obe zavisno promenljive, V i Π , funkcije su položaja i vremena, odnosno, x i t . Ako se dozvoli da je nezavisno promenljiva, x , funkcija vremena t , onda totalni izvodi Π i V glase:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \quad , \quad (7.4)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \quad . \quad (7.5)$$

Ako je

$$\frac{dx}{dt} = V + \frac{g}{\chi} = V + \frac{\chi a^2}{g} \quad , \quad (7.6)$$

onda jednačina $L = 0$ postaje obična diferencijalna jednačina

$$\chi \frac{d\Pi}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{\lambda V |V|}{2D} - \chi V \sin \alpha = 0 \quad . \quad (7.7)$$

Rešenje jednačine (7.6) glasi

$$\chi = \pm \frac{g}{a} , \quad (7.8)$$

odnosno,

$$\frac{dx}{dt} = V \pm a . \quad (7.9)$$

Radi se o dvema familijama krivih, koje su praktično prave linije, jer je brzina propagacije talasa, a , konstantna i obično mnogostruko veća od brzine tečenja, V . Da se krenulo od pojednostavljenih jednačina (7.1) i (7.2), bez članova, $V\partial\Pi/\partial x$ i $V\partial V/\partial x$, umesto (7.9), rezultat bi bio

$$\frac{dx}{dt} = \pm a , \quad (7.10)$$

što se u najvećem broju slučajeva i koristi.

Zamena χ u jednačini (7.7) mora da bude uskladjena po znaku sa jednačinom (7.9), tako da postoje dva para običnih diferencijalnih jednačina koje će se označiti sa C^+ i C^- .

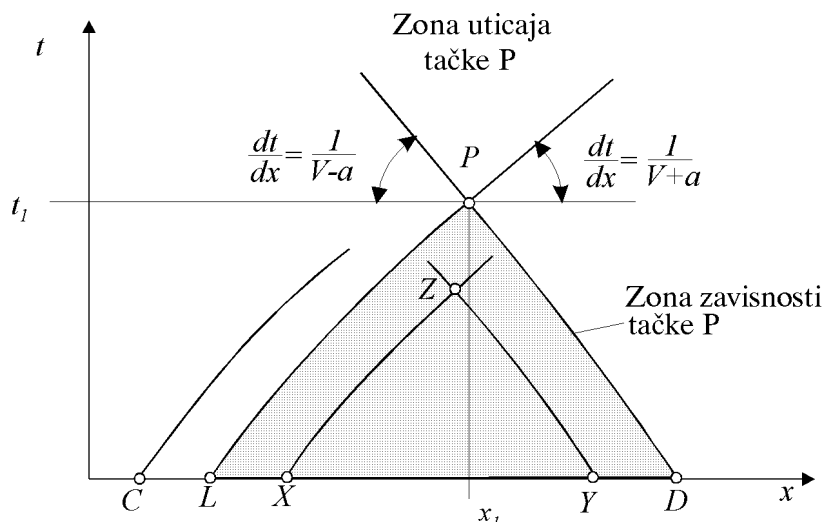
$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt} + \frac{a}{g} \frac{dV}{dt} + \frac{\lambda a V|V|}{2g D} - V \sin \alpha = 0 \\ \frac{dx}{dt} = V + a \end{aligned} \right\} C^+ \quad (7.11)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\Pi}{dt} + \frac{a}{g} \frac{dV}{dt} + \frac{\lambda a V|V|}{2g D} + V \sin \alpha = 0 \\ \frac{dx}{dt} = V - a \end{aligned} \right\} C^- \quad (7.12)$$

Jednačine u okviru vitičastih zagrada moraju se posmatrati zajedno jer je transformacija izvedena pod uslovom da se posmatra promena duž odredjenih linija, definisanih izrazima (7.9), odnosno, (7.10).

Posmatra se tačka $P(x_1, t_1)$, u ravni (x, t) (slika 7.1). Ako su poznate, brzina propagacije talasa, a , i brzina, V , kroz tu tačku mogu se povući dve linije sa nagibima, $dt/dx = 1/(V + a)$ i $dt/dx = 1/(V - a)$, koje se zovu pozitivna i negativna karakteristika. Karakteristike odstupaju od prave linije u onoj meri u kojoj je brzina fluida, V , funkcija, x i t , i, naravno, kolika je njena veličina u odnosu na a .

Ako se u tački P , odnosno, u preseku, x_1 , na cevi, u trenutku, t_1 , generiše nekakav poremećaj onda se on prostire nizvodno brzinom, $V + a$, odnosno,

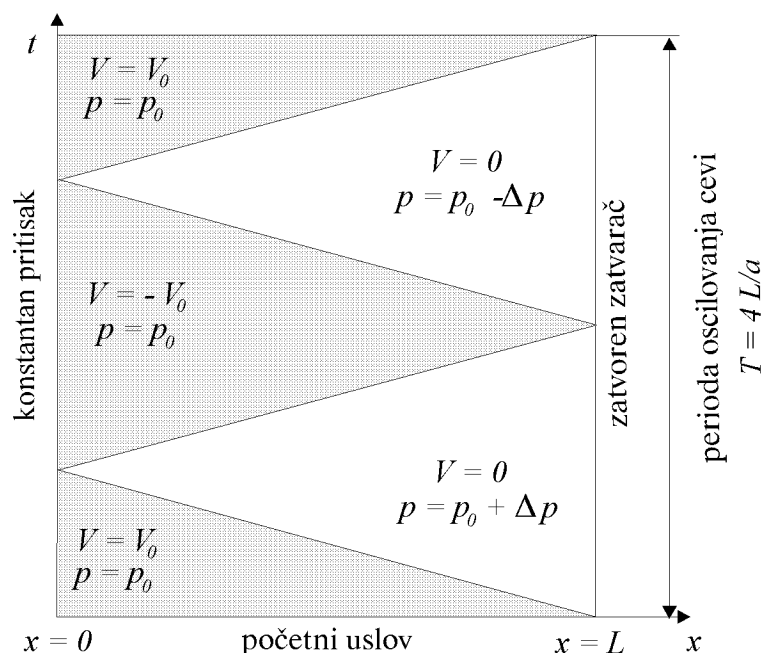
Slika 7.1: Linije karakteristika u ravni (x, t) .

$+a$, i uzvodno, brzinom, $V - a$, odnosno, $-a$. Linije po kojima se prostiru poremećaji u ravni (x, t) , su karakteristike. Karakteristike označavaju maksimalni domet poremećaja stvorenog u tački P . U svakoj tački, koja se nalazi između C^+ i C^- , za $t > t_1$, na slici (7.1), osetiće se posledice poremećaja u tački P , pa se zato ta zona zove *zona uticaja tačke P* .

Karakteristike seku liniju, $t = t_0$, u tačkama, L i D . Posmatra se šta se dešava sa poremećajima, koji se generišu u presecima cevi koji leže između tačaka L i D . Ako su to tačke X i Y , karakteristike koje polaze iz tih tačaka seku se u tački Z i u njoj određuju stanje. Tačka P se nalazi u zoni uticaja tačke Z .

Stanje u tački P , određeno je jednačinama koje važe duž linija, LP i DP . Poremećaji koji se dese između tačaka L i D , u početnom trenutku, uticaće na stanje u tački P , dok ono što se dešava van tog intervala (recimo, tačka C) ne može da dodje do preseka x_1 za $t < t_1$. Prostor između tačaka P , L i D zove se *zona zavisnosti tačke P* .

Primer naglog zatvaranja zatvarača na kraju cevi, koji je razmatran u prethodnom poglavlju (slike 6.1 – 6.3), koristi se i ovde da bi se pokazalo prostiranje poremećaja u (x, t) ravni, (slika 7.2). Šrafirana površina u levom donjem uglu predstavlja neporemećenu zonu. Ostale šrafirane površine predstavljaju oblasti u kojima je pritisak jednak početnom. Deo ravni (x, t) u kojoj se traži rešenje ograničen je linijama: $t = 0$, početni uslov, $x = 0$,



Slika 7.2: Putovanje poremećaja kod naglog zatvaranja zatvarača

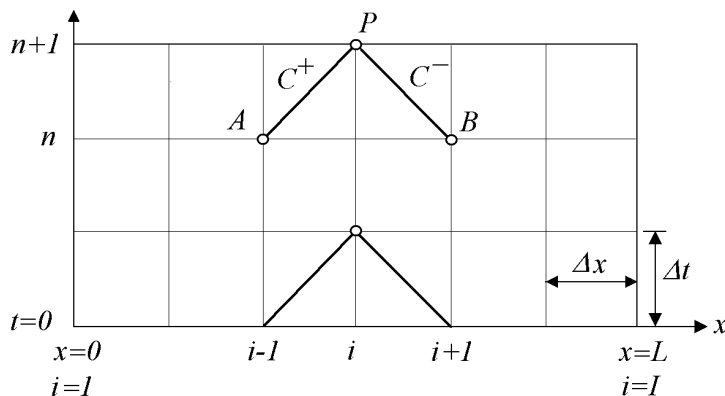
granični uslov - konstantan pritisak i $x = L$, granični uslov - zatvoren zatvarač. Linije koje dele ovu polugraničenu traku su karakteristike duž kojih se prostire početni poremećaj izazvan zatvaranjem zatvarača.

7.2 Numerički model

Na slici (7.3), u ravni (x, t) , data je numerička mreža, na kojoj će se definisati standardni numerički model hidrauličkog udara. Osa x se poklapa sa osom cevi, a celokupna dužina cevi, L , podeljena je na $(I - 1)$ deonica jednake dužine, Δx . Osa t je izdvojena na jednake priraštaje Δt , koji su izabrani tako da je, $\Delta t = \Delta x/a$. Iz čisto praktičnih razloga, da bi se obezbedilo da karakteristike povezuju tačke numeričke mreže, zanemaruje se brzina, V , u jednačinama pravca karakteristika, sa obrazloženjem da je, $V \ll a$.

Jednačine C^+ i C^- , odnosno, (7.11) i (7.12) mogu se napisati na sledeći način

$$\frac{d}{dt} \left(\pm \Pi + \frac{a}{g} V \right) + \lambda \frac{a}{D} \frac{V|V|}{2g} \mp V \sin \alpha = 0 \quad (7.13)$$



Slika 7.3: Numerička mreža za metodu karakteristika

i integraliti duž pozitivnih i negativnih karakteristika, odnosno, duž linija AP i BP . Duž pozitivne karakteristike, čiji pravac je jednak, $(x_P - x_A)/(t_P - t_A) = a$, integral od tačke A do tačke P , glasi

$$\int_{t_A}^{t_P} \frac{d}{dt} \left(\Pi + \frac{a}{g} V \right) dt + \int_{t_A}^{t_P} \left(\lambda \frac{a}{D} \frac{V|V|}{2g} - V \sin \alpha \right) dt = 0 \quad (7.14)$$

Prvi član se može rešiti direktno pa se može napisati

$$\left[\Pi + \frac{a}{g} V \right]_A^P \frac{1}{\Delta t} = - \int_{t_A}^{t_P} \left(\lambda \frac{a}{D} \frac{V|V|}{2g} - V \sin \alpha \right) dt \quad (7.15)$$

gde uglasta zagrada označava razliku veličina u tačkama P i A , na primer, $[\phi]_A^P = \phi_P - \phi_A$. Daje se primer približne integracije Ojlerovom metodom člana na desnoj strani jednačine (7.15) duž linije AP ,

$$\left[\Pi + \frac{a}{g} V \right]_A^P \frac{1}{\Delta t} = - \lambda \frac{a}{D} \frac{V_A |V_A|}{2g} + V_A \sin \alpha . \quad (7.16)$$

Na isti način može se diskretizovati jednačina C^- duž linije BP .

$$\left[\Pi - \frac{a}{g} V \right]_B^P \frac{1}{\Delta t} = + \lambda \frac{a}{D} \frac{V_B |V_B|}{2g} + V_B \sin \alpha \quad (7.17)$$

Jednačina (7.16) može se napisati i na sledeći način

$$\frac{\Pi_P - \Pi_A}{\Delta t} + \frac{a}{g} \frac{V_P - V_A}{\Delta t} + \frac{\lambda a}{2gD} V_A |V_A| - V_A \sin \alpha = 0 . \quad (7.18)$$

Formalno, ovo je aproksimacija prvog reda tačnosti, ali u većini slučajeva ona sasvim zadovoljava, jer se aproksimira samo član sa trenjem, dok je ostatak tačno prikazan. Kada je član sa trenjem značajan, greška aproksimacije dolazi do izražaja i to će se posebno analizirati na kraju poglavlja. Ako je cev horizontalna i trenje zanemarljivo, onda jednačina (7.18) daje tačno rešenje diferencijalne jednačine (7.11).

$$\left[\Pi + \frac{a}{g} V \right]_A^P = 0 \quad \text{duž } C^+ \text{ linije} \quad (7.19)$$

$$\left[\Pi - \frac{a}{g} V \right]_B^P = 0 \quad \text{duž } C^- \text{ linije} \quad (7.20)$$

Iz jednačina (7.19) i (7.20) sledi da duž karakteristika postoje dve nepromenljive veličine, Rimanove invarijante

$$\Pi + \frac{a}{g} V = \text{const}_1 = I_+ \quad \Pi - \frac{a}{g} V = \text{const}_2 = I_- \quad (7.21)$$

Lako se može pokazati da se jednačine (7.19) i (7.20) svode na relaciju Žukovskog, ovde primenjenu mnogo opštije nego u prethodnom poglavlju.

Smisao diskretizacije jednačina (7.11) i (7.12) je određivanje promena proticaja i pijeziometarskih kota u izabranim preseccima duž cevi, i u izabranim vremenskim trenucima, polazeći od poznatog stanja u početnom trenutku. Iako je srednja brzina, $V = Q/A$, u direktnoj vezi sa promenom pritiska i u ustaljenom i u neustaljenom tečenju, u inženjerskim analizama češće se koriste proticaj i pijeziometarska kota. Time se uvode dodatne aproksimacije (kao na primer, $A = \text{const}$), o čemu će biti reči u nastavku.

Ako se sve posmatra u okviru mreže na slici (7.3), može se uvesti drugačije obeležavanje,

$$\begin{aligned} & \Pi_i^{n+1} - \Pi_{i-1}^n + \frac{a}{gA} (Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^n) + \\ & \frac{\lambda \Delta x}{2gDA^2} Q_{i-1}^n |Q_{i-1}^n| - \frac{\Delta t}{A} Q_{i-1}^n \sin \alpha = 0 \quad , \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} & \Pi_i^{n+1} - \Pi_{i+1}^n - \frac{a}{gA} (Q_i^{n+1} - Q_{i+1}^n) - \\ & \frac{\lambda \Delta x}{2gDA^2} Q_{i+1}^n |Q_{i+1}^n| - \frac{\Delta t}{A} Q_{i+1}^n \sin \alpha = 0 \quad , \end{aligned} \quad (7.23)$$

gde indeksi, $i - 1$, i i $i + 1$, označavaju preseke na cevi, eksponenti, n i $n + 1$, tekući i naredni vremenski nivo, a u članu sa trenjem, $a\Delta t$ zamenjeno je sa Δx . Nepoznata piježometarska kota, Π_i^{n+1} , može se napisati eksplicitno:

$$\Pi_i^{n+1} = \Pi_{i-1}^n - B(Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^n) - MQ_{i-1}^n |Q_{i-1}^n| + \frac{\Delta t}{A} Q_{i-1}^n \sin \alpha \quad , \quad (7.24)$$

$$\Pi_i^{n+1} = \Pi_{i+1}^n + B(Q_i^{n+1} - Q_{i+1}^n) + MQ_{i+1}^n |Q_{i+1}^n| + \frac{\Delta t}{A} Q_{i+1}^n \sin \alpha \quad , \quad (7.25)$$

gde je skraćeno napisano, $B = a/(gA)$ i $M = \lambda\Delta x/(2gDA^2)$.

Ako se poznate veličine na tekućem vremenskom nivou, (n) , grupišu, dobija se:

$$\Pi_i^{n+1} = CP - BQ_i^{n+1} \quad , \quad (7.26)$$

$$\Pi_i^{n+1} = CM + BQ_i^{n+1} \quad , \quad (7.27)$$

gde je

$$CP = \Pi_{i-1}^n + BQ_{i-1}^n - MQ_{i-1}^n |Q_{i-1}^n| + \frac{\Delta t}{A} Q_{i-1}^n \sin \alpha \quad , \quad (7.28)$$

$$CM = \Pi_{i+1}^n - BQ_{i+1}^n + MQ_{i+1}^n |Q_{i+1}^n| + \frac{\Delta t}{A} Q_{i+1}^n \sin \alpha \quad . \quad (7.29)$$

Iz jednačina (7.26) i (7.27), eliminisanjem Q_i^{n+1} , dolazi se do:

$$\Pi_i^{n+1} = (CP + CM)/2 \quad , \quad (7.30)$$

dok se proticaj može odrediti iz bilo koje od jednačina (7.26) i (7.27).

7.3 Tačnost

Jednačine numeričkog modela napisaće se u bezdimenzionalnom obliku da bi se procenio značaj pojedinih članova

$$(h_i^{n+1} - h_{i-1}^n) + (q_i^{n+1} - q_{i-1}^n) + \frac{\Delta E_{tr,0}}{H_0} q_{i-1}^n |q_{i-1}^n| - K_c q_{i-1}^n = 0 \quad , \quad (7.31)$$

$$-(h_i^{n+1} - h_{i+1}^n) + (q_i^{n+1} - q_{i+1}^n) + \frac{\Delta E_{tr,0}}{H_0} q_{i+1}^n |q_{i+1}^n| + K_c q_{i+1}^n = 0 \quad , \quad (7.32)$$

gde su $q = Q/Q_0$ i $h = \Pi/H_0$, proticaj i pijezometarska kota u bezdimenzionalnom obliku. Proticaj Q_0 je referentni proticaj (obično proticaj u ustaljenom tečenju), H_0 , povećanje pijezometarske kote usled trenutnog zaustavljanja fluidne struje po Žukovskom,

$$H_0 = aQ_0/Ag = BQ_0,$$

$\Delta E_{tr,0}$, gubitak energije na delu cevi dužine Δx ,

$$\Delta E_{tr,0} = (\lambda \Delta x / D) (V_0^2 / 2g),$$

i jedno i drugo, pri proticaju Q_0 . K_c je parametar nagiba cevi,

$$K_c = Q_0 \Delta t \sin \alpha / A_c H_0 = g \Delta t \sin \alpha / a$$

Jednačine (7.31) i (7.32) mogu se napisati u sledećem obliku

$$q_i + h_i - cp = 0 \quad , \quad (7.33)$$

$$q_i - h_i + cm = 0 \quad , \quad (7.34)$$

gde su izostavljeni eksponenti koji označavaju vremenski nivo ($n + 1$), a cp i cm predstavljaju poznate veličine sa prethodnog vremenskog nivoa

$$cp = h_{i-1}^n + q_{i-1}^n \left(1 - \frac{\Delta E_{tr,0}}{H_0} |q_{i-1}^n| + K_c \right) \quad , \quad (7.35)$$

$$cm = h_{i+1}^n - q_{i+1}^n \left(1 - \frac{\Delta E_{tr,0}}{H_0} |q_{i+1}^n| - K_c \right) \quad . \quad (7.36)$$

Članovi u zagradi svojom veličinom određuju relativni uticaj trenja, odnosno nagiba cevi. Ako je $\lambda \approx 0.02$, $\Delta x / D \approx 1000.$, $a \approx 1000$ m/s, $V_0 \approx 1$ m/s, $\Delta t \approx 1$ s, nagib cevi $\sin \alpha = O(0.01)$, a samo izuzetno, $O(0.1)$, onda je

$$\frac{\Delta E_{tr,0}}{H_0} = O(0.01), \quad K_c = O(0.0001), \quad \text{odnosno, } O(0.001).$$

Pažljivom analizom jednačina numeričkog modela (7.24) i (7.25) vidi se da one nisu zadovoljene za slučaj ustaljenog tečenja. Naime, razlika pijezometarskih kota, $\Pi_{i-1} - \Pi_i$, nije jednaka gubitku energije usled trenja, $MQ|Q|$. "Smetnja" tome je član sa nagibom cevi, koji je preostao posle

raznih pojednostavljenja tokom definisanja matematičkog i numeričkog modela. Rigoroznijom diskretizacijom osnovnih jednačina iz prethodnog poglavlja, (6.7) i (6.32), može se doći do konsistentnog oblika numeričkog modela, koji je mnogo komplikovaniji od jednačina (7.24) i (7.25) (Wylie, 1984).

Takva analiza ovde nije sprovedena, jer nema nikakav praktični značaj zbog veličine tog člana, koji je u najnepovoljnijem slučaju, istog reda kao neki već zanemareni članovi (konvektivne promene pijezometarske kote i proticaja, zbog, $V/a = O(0.001)$). Da bi se izbeglo menjanje pijezometarske kote u proračunima ustaljenog tečenja, taj član se jednostavno izostavlja.

7.3.1 Uticaj trenja

Zbog eksplicitne aproksimacije člana sa trenjem, numerički model (7.31) i (7.32) je uslovno stabilan. Uslov stabilnosti je, $\Delta E_{tr,0}/H_0 < 1$. Uslov je vrlo komotan, jer je zbilja teško zamisliti proračune gde je gubitak energije na trenje, na jednoj računskoj deonici, istog reda veličine kao H_0 . Medjutim, mnogo pre tog zahteva, tačnije, već za $\Delta E_{tr,0}/H_0 > 0.05$, javljaju se problemi zbog tačnosti proračuna (Ivetić, 1982). Naime, odstupanja sračunate promene pritiska od tačne vrednosti, prelaze 10 %.¹ Najjednostavniji izlaz je smanjenje dužine deonice cevi, a može se razmišljati i o boljoj aproksimaciji člana sa trenjem. Moguće alternative su:

1. $\frac{\Delta E_{tr,0}}{H_0} q_i^{n+1} |q_{i-1}^n|$,
2. $0.25 \frac{\Delta E_{tr,0}}{H_0} (q_i^{n+1} + q_{i-1}^n) |q_i^{n+1} + q_{i-1}^n|$,
3. $0.5 \frac{\Delta E_{tr,0}}{H_0} (q_i^{n+1} |q_i^{n+1}| + q_{i-1}^n |q_{i-1}^n|)$.

Sve tri aproksimacije su bezuslovno stabilne, a verovatno najbolji izbor predstavlja aproksimacija 1, jer se zadržava linearnost algoritma, a greška aproksimacije je tek neznatno veća nego kod preostale dve aproksimacije. U Poglavlju 1, na isti način je linearizovan član na desnoj strani jednačine (1.29).

Odgovarajući numerički model glasi

$$(h_i^{n+1} - h_{i-1}^n) + (q_i^{n+1} - q_{i-1}^n) + \frac{\Delta E_{tr,0}}{H_0} q_i^{n+1} |q_{i-1}^n| = 0 \quad , \quad (7.37)$$

¹ Pojam "tačna vrednost" treba shvatiti uslovno, jer je dobijena jako finom diskretizacijom cevi. Možda bi više odgovarao termin "dovoljno tačna vrednost".

$$-(h_i^{n+1} - h_{i+1}^n) + (q_i^{n+1} - q_{i+1}^n) + \frac{\Delta E_{tr,0}}{H_0} q_i^{n+1} |q_{i+1}^n| = 0 \quad , \quad (7.38)$$

odnosno,

$$h_i^{n+1} + q_i^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta E_{tr,0}}{H_0} |q_{i-1}^n| \right) - cp = 0 \quad , \quad (7.39)$$

$$-h_i^{n+1} + q_i^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta E_{tr,0}}{H_0} |q_{i+1}^n| \right) + cm = 0 \quad , \quad (7.40)$$

gde je

$$cp = h_{i-1}^n + q_{i-1}^n \quad , \quad (7.41)$$

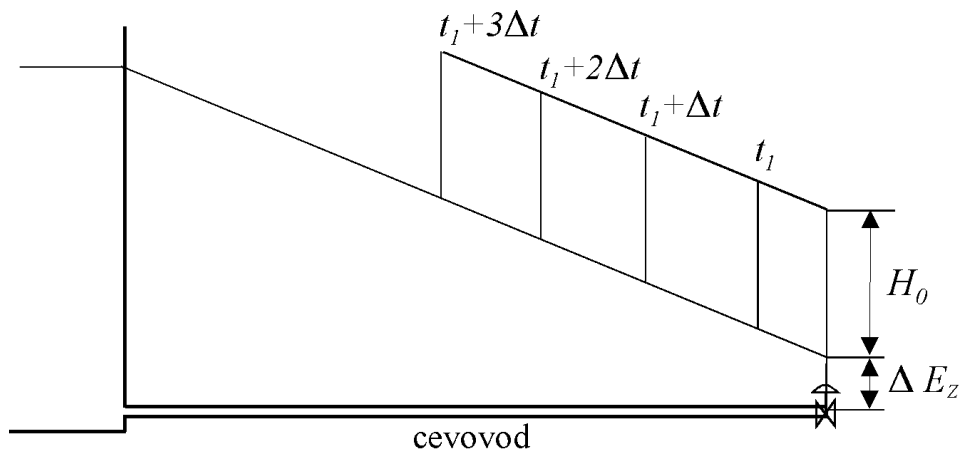
$$cm = h_{i+1}^n - q_{i+1}^n \quad . \quad (7.42)$$

U nekim analizama član sa trenjem se zanemaruje uz objašnjenje da je to na strani sigurnosti. Veoma su retki slučajevi kada je to opravdano. Medjutim, o tome se može razmišljati tek kada se sagleda kakav je uticaj trenja na prelazne režime.

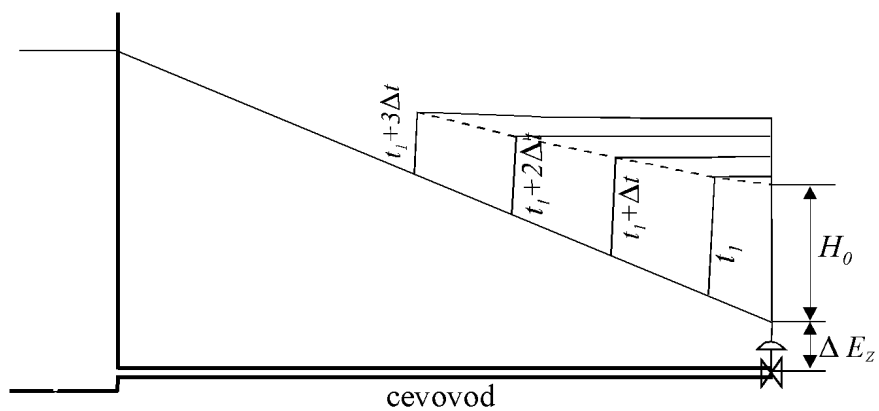
Sila trenja deluje u smeru suprotnom od smera strujanja, dovodi do disipacije energije elastičnih oscilacija, ublažava oscilacije i na kraju dovodi do ustaljenog tečenja. To ipak ne znači da je njeno zanemarenje na strani sigurnosti. Kod dugačkih cevovoda sa značajnim gubitkom energije na trenje, maksimalni pritisci mogu višestruko prevazići pritiske koji bi se dobili pojednostavljenom teorijom Žukovskog. Objašnjenje za to dato je na slikama (7.4) i (7.5).

Usled zatvaranja zatvarača dolazi do zaustavljanja fluida i povećanja pijezometarske kote za H_0 . Talas povećanog pritiska putuje uzvodno i u određenim vremenskim trenucima, $t_0 + \Delta t$, $t_0 + 2\Delta t$, $t_0 + 3\Delta t$, zauzeo bi položaje prikazane na slici (7.4). Medjutim, na delu cevi iza fronta talasa, zbog nepromenjenog nagiba pijezometarske linije, koja je samo translirana za H_0 , i nepromenjenih sila pritiska (i težine), fluid bi nastavio da se kreće, jer zaustavljanje podrazumeva da je sila trenja jednaka nuli. Zbog toga, ne može doći do potpunog zaustavljanja fluidne struje. Promena brzine nije $(-V_0)$, a povećanje pijezometarske kote na mestu fronta manje je od H_0 . Front talasa se smanjuje, a pijezometarska kota kod zatvarača nastavlja da raste (slika 7.5). Pod uticajem povećanja pritiska, cev se dalje širi i stvara se prostor za smeštanje još izvesne količine fluida.

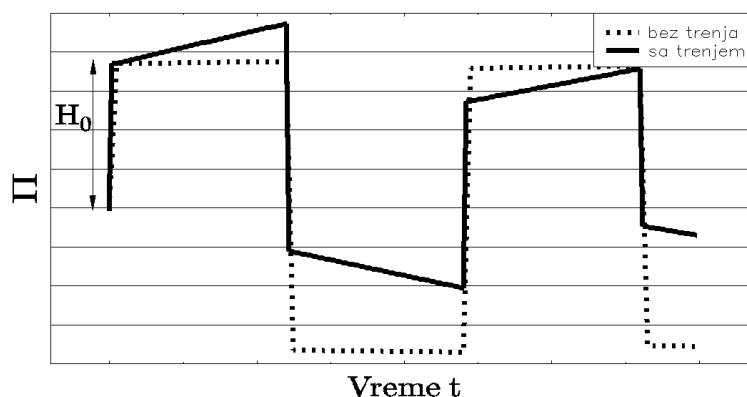
Na slici (7.6) data je promena pijezometarske kote uzvodno od zatvarača koji se naglo zatvorio. Isprekidanom linijom data je promena za slučaj zanemarenja trenja, dok je punom linijom data promena za slučaj kada se uzima u



Slika 7.4: Idealizovano putovanje talasa povečanja pritiska



Slika 7.5: Putovanje talasa povečanja pritiska od zatvarača ka rezervoaru

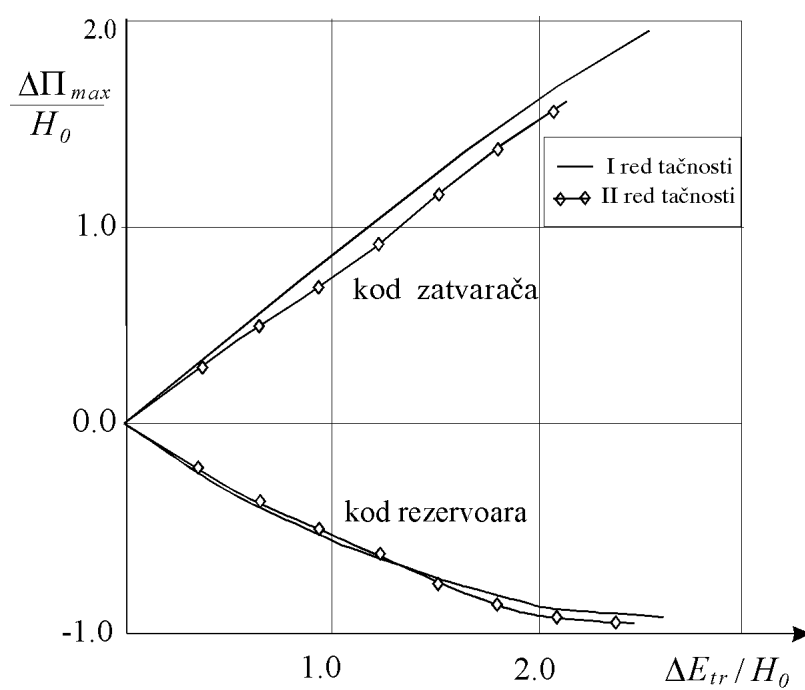


Slika 7.6: Uticaj trenja na promenu piježometarske kote uzvodno od zatvarača

obzir trenje. Ublaženje oscilacija je očigledno, ali se isto tako može primetiti da piježometarska koda nastavlja da raste sve do dolaska odbijenog talasa od rezervoara.

Uticaj trenja na ekstremne vrednosti pritiska, za različite granične uslove na uzvodnom kraju, detaljno je analiziran numeričkom simulacijom trenutnog zatvaranja zatvarača na nizvodnom kraju cevovoda (Ivetić, 1982). Na slici (7.7) prikazan je dijagram odstupanja registrovanog maksimalnog povećanja piježometarske kote $\Delta\Pi_{max}$ u odnosu na H_0 , odnosno, $(\Delta\Pi_{max} - H_0)/H_0$, za dva karakteristična preseka na cevovodu, uzvodno od zatvarača i u blizini rezervoara. Na apscisi se nalazi $\Delta E_{tr,0}/H_0$, gde je $\Delta E_{tr,0}$, ukupni linijski gubitak energije na cevovodu pri početnom proticaju. Može se videti da za $\Delta E_{tr,0}/H_0 = 1.0$, ublaženje fronta talasa dok stigne do rezervoara iznosi 50 %, a da pritisak kod zatvarača dostigne $1.8H_0$. Integracija člana sa trenjem uradjena je Ojlerovom metodom i metodom drugog reda tačnosti (puna linija sa markerima).

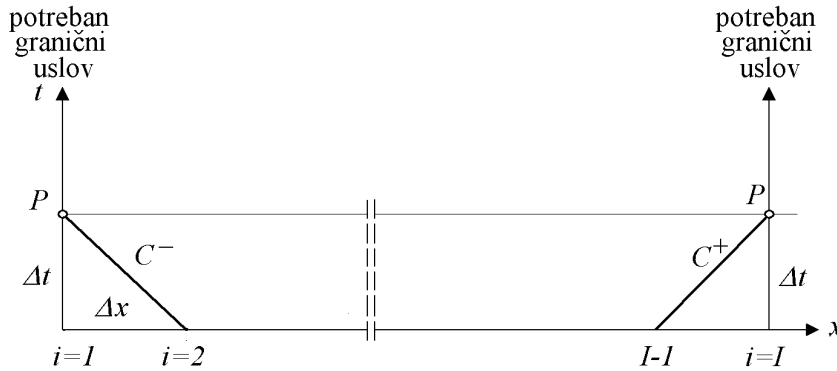
Pojava promene pritiska u cevovodu i posle prolaska fronta talasa od izuzetnog je značaja za dugačke cevovode (naftovodi, hidraulički transport, regionalni vodovodni sistemi itd). Kod cevovoda sa zatvaračima na nizvodnom kraju i pumpama sa klapnama (nepovratnim ventilima) na uzvodnom kraju, može doći do značajnog povećanja pritiska, koji ostaje "zaključan" u cevi još dugo posle zaustavljanja tečenja u cevi.



Slika 7.7: Uticaj trenja na ekstremne vrednosti pritiska

7.4 Osnovni granični uslovi

Na krajevima cevi na raspolaganju je samo po jedna od jednačina karakteristika, a broj nepoznatih je dva. Na uzvodnom kraju, važi jednačina (7.27), duž negativne karakteristike C^- , a na nizvodnom kraju, važi jednačina (7.26), duž pozitivne karakteristike (slika 7.8). Za određivanje druge nepoznate



Slika 7.8: Karakteristike na granicama

potrebna je još jedna jednačina, odnosno, još jedan uslov. Taj dodatni uslov mora opisati šta se dešava na granici (cevi), i kakav to ima uticaj na tečenje u cevi. Izborom metode i dužine vremenskog koraka (radi se o eksplicitnoj shemi), omogućeno je da se svaki granični uslov razmatra nezavisno od ostalih, kao i nezavisno od računanja Π i Q u unutrašnjim tačkama cevi.

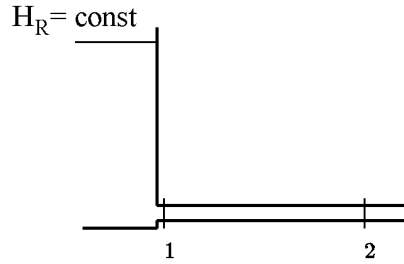
7.4.1 Rezervoar, odnosno, zadat nivo na kraju cevi

U velikom rezervoaru u distribucionoj mreži, obično se može pretpostaviti da je pijezometarska kota približno konstantna tokom kratkotrajnih prelaznih režima. Ako je rezervoar na uzvodnom kraju cevi (slika 7.9), dodatna jednačina, odnosno, uzvodni granični uslov glasi

$$\Pi_1^{n+1} = \Pi_R \quad . \quad (7.43)$$

Ako se uzima u obzir lokalni gubitak energije na ulazu u cev i brzinska visina u cevi, onda se za smer tečenja od rezervoara ka cevi može napisati

$$\Pi_1^{n+1} = \Pi_R - (1 + \xi_{ul}) \frac{Q_1^2}{2gA^2} \quad . \quad (7.44)$$



Slika 7.9: Rezervoar

Ako je smer tečenja suprotan, važi jednačina (7.43). Takođe, može se zadati i poznata promena nivoa u toj tački. Ako se radi o periodičnom poremećaju usled površinskih talasa u rezervoaru, prethodni uslov bi glasio:

$$\Pi_1^{n+1} = \Pi_R + \Delta\Pi \sin \omega t \quad , \quad (7.45)$$

gde je ω ugaona frekvencija, a, $\Delta\Pi$, amplituda periodične promene. Proticaj u istom preseku dobija se iz jednačine (7.27), za poznato Π_1^{n+1} ,

$$Q_1^{n+1} = (\Pi_1^{n+1} - CM)/B \quad . \quad (7.46)$$

7.4.2 Zadati proticaj

Izgleda logično da, ako se može zadati piježometarska kota na kraju cevi, to važi i za proticaj. Međutim, ovakav granični uslov se u građevinskoj hidrotehnici znatno redje javlja. Izuzetak je slepi kraj cevi, ili, potpuno zatvoren zatvarač. Ako se radi o nizvodnom kraju cevi, onda su oznake sledeće,

$$Q_N^{n+1} = 0 \quad , \quad \Pi_N^{n+1} = CP \quad . \quad (7.47)$$

Drugi primer su zapreminske pumpe, koje u jednom radnom ciklusu ubacuju uvek istu količinu fluida. Tada je proticaj zadat kao:

$$Q_1^{n+1} = Q_0 + \Delta Q |\sin \omega t| \quad (7.48)$$

Granični uslov sa zadatim proticajem ponekad se koristi za krajeve cevi gde se nalaze zatvarači, pumpe i slično, što je veoma gruba aproksimacija.

Sa druge strane, ovo je prirodan granični uslov za rezervoar iz koga se voda crpi po utvrđenoj šemi u deo sistema koji se ne analizira, ali za model

hidrauličkog udara u cevi to se prenosi posredno, preko promene nivoa u rezervoaru.

Analizama hidrauličkog udara u distribucionim vodovodnim mrežama prethode analize kontinualnog rada simulacijom modelom kvazi-ustaljenog tečenja. Ako se želi potpuna kompatibilnost modela distribucione mreže za kontinualnu simulaciju rada (Poglavlje 3) i modela za hidraulički udar, tada treba uključiti i zadatu *čvornu potrošnju*, što je na odredjeni način u suprotnosti sa prethodno rečenim. Čvorna potrošnja je aproksimacija, koja ima smisla samo kod analize ustaljenog tečenja, jer daje približno isto pijezometarsko stanje u mreži, kao da se radi o priključcima raspoređenim duž cevi. Medjutim, kod neustaljenog tečenja ne može se čvorna potrošnja smatrati konstantnom i nezavisnom od lokalnih promena pijezometarske kote. Takodje, to se ne može prikazati ni kao koncentrisano isticanje kroz hidrant na kraju cevi. Srećom, za analizu hidrauličkog udara, merodavni su slučajevi kada je usputna potrošnja minimalna pa se taj neodredjeni uslov može elegantno izbeći.

7.4.3 Zatvarač na (nizvodnom) kraju cevi

Zatvarač na slobodnom kraju cevi posmatra se kao lokalni otpor, sa poznatom pijezometarskom kotom na jednoj strani (slika 7.10). Ako se telo zatvarača pomera, dolazi do promene proticaja, ali se ne može direktno reći, kakve. Ono što se zna je promena položaja tela zatvarača i odgovarajućeg koeficijenta proticaja, C_Q , ili, koeficijenta lokalnog gubitka energije, ξ'_Z . Za ustaljeno tečenje koristi se relacija dobijena iz Bernulijeve jednačine (2.40):

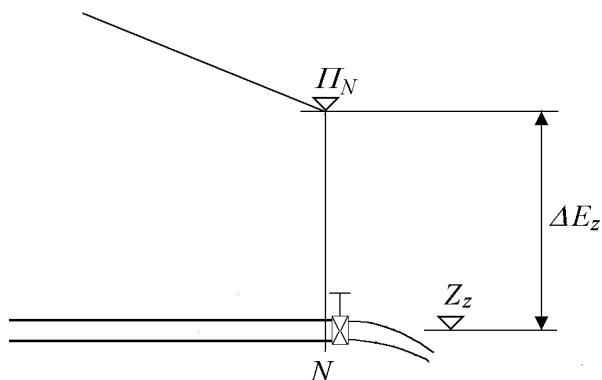
$$\Pi_N = Z_Z + \xi'_Z \frac{Q_N |Q_N|}{2gA_C^2} , \quad (7.49)$$

gde je, $\xi'_Z = (1 + \xi_Z) \cdot (A_Z/A_C)^2$, funkcija tipa, veličine i stepena otvorenosti zatvarača, a, A_C i A_Z , su površine poprečnih preseka cevi i zatvarača, a indeks N označava presek na kraju cevi, uzvodno od zatvarača. Ista relacija važi i u neustaljenom tečenju. Treba je kombinovati sa jednačinom pozitivne karakteristike, ako je zatvarač na nizvodnom kraju cevi (slika 7.10),

$$\Pi_N^{n+1} = CP - B \cdot Q_N^{n+1} .$$

odnosno, sa negativnom, ako je zatvarač na uzvodnom kraju cevi. Proticaj kroz zatvarač je jednak

$$Q_N^{n+1} = -B \cdot C_1 + \sqrt{(B \cdot C_1)^2 + 2C_1 \cdot (CP - Z_Z)} , \quad (7.50)$$



Slika 7.10: Zatvarač na kraju cevi

gde je $C_1 = g \cdot A_C^2 / \xi'_Z$. Iz jednačine (7.49) se vidi da je pijezometarska kota ispred zatvarača u direktnoj vezi sa proticajem. Daje se samo jedno rešenje kvadratne jednačine, jer ukoliko je isticanje slobodno u atmosferu, pijezometarska kota praktično ne može da padne ispod kote zatvarača sve dok je zatvarač i najmanje otvoren. Kada se stvore uslovi za negativan proticaj (uslovi da voda ulazi u cev), vazduh ulazi u cev uz mnogo manje gubitke energije, a pijezometarska kota ostaje jednaka koti zatvarača.

Ukoliko je isticanje potopljeno, lako može doći i do značajnijeg pada pijezometarske kote, čim se stvore uslovi za negativan proticaj.

U preliminarnum analizama, kada još nisu definisani tipovi zatvarača, može se koristiti i alternativni način (Wylie & Streeter, 1978), preko C_Q , koeficijenta proticaja. U ustaljenom tečenju važi relacija

$$Q_0 = (C_Q A_Z)_0 \sqrt{2g \Delta \Pi_0} \quad , \quad (7.51)$$

gde je $\Delta \Pi_0$ početna razlika pijezometarskih kota ispred i iza zatvarača, $(\Pi_Z - Z_Z)_0$, a $(C_Q A_Z)_0$, koeficijent proticaja i površina otvora zatvarača u početnom trenutku. U bilo kom trenutku važi slična relacija

$$Q_N^{n+1} = C_Q A_Z \sqrt{2g \Delta \Pi^{n+1}} \quad . \quad (7.52)$$

Uvodi se bezdimenzionalni pokazatelj položaja zatvarača

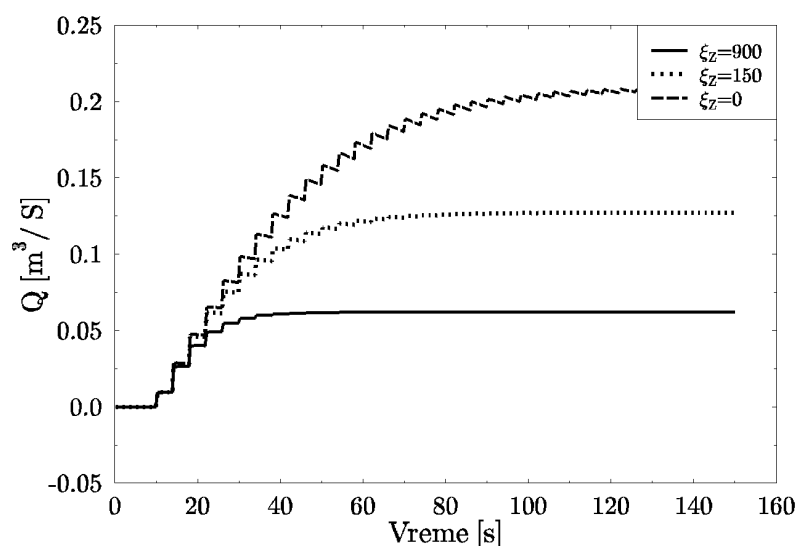
$$\tau = \frac{C_Q \cdot A_Z}{(C_Q \cdot A_Z)_0} \quad ,$$

koji se menja od 0 do 1. Za određivanje proticaja koristi se ista jednačina (7.50), samo što je sada $C_1 = (Q_0 \cdot \tau)^2 / (2 \Delta \Pi_0)$.

Primer 1

Na kraju horizontalne cevi, dužine $L = 2000$ m, prečnika, $D = 0.5$ m, nalazi se zatvarač koji je u početnom trenutku zatvoren. Posmatraju se tri slučaja naglog otvaranja zatvarača: potpuno, kada je koeficijent lokalnog gubitka na zatvaraču jednak, $\xi_Z \approx 0$, i delimično, kada je koeficijent lokalnog gubitka na kraju manevra jednak, $\xi_Z = 150$, odnosno, $\xi_Z = 900$. Koeficijent trenja je jednak $\lambda = 0.021$, a brzina propagacije talasa $a = 1000$ m/s. Visinska razlika između kote nivoa vode u rezervoaru i kote izlaznog preseka cevi je, $\Pi_R - Z_Z = 100. - 95. = 5$. m. Odrediti promenu proticaja na mestu zatvarača i pijezometarskih kota u karakterističnim presecima.

Rešenje na slici (7.11) je dobijeno matematičkim modelom hidrauličkog udara.



Slika 7.11: Promena proticaja na izlazu iz cevi u zavisnosti od koeficijenta lokalnog gubitka energije na kraju manevra otvaranja zatvarača

Ovaj problem se može analizirati i matematičkim modelom krutog udara, kao što je to pokazano u Poglavlju 4. Način promene proticaja i vreme uspostavljanja ustaljenog tečenja, mogu se dosta dobro proceniti modelom krutog udara. Različitim vrednostima gubitka energije na zatvaraču odgovaraju različita vremena ubrzavanja fluida u cevi, $T_0 = 44; 26; 13$ s. U sva tri slučaja, početni nagib promene proticaja, kao i same promene proticaja, su

iste, jer zavise od denivelacije, $\Delta\Pi$.

Model hidrauličkog udara je znatno složeniji i logično je očekivati da on daje realnije rezultate i da bude referentan. Linija promene proticaja nije glatka zbog toga što se naglim otvaranjem zatvarača stvara talas hidrauličkog udara, koji putuje između zatvarača i rezervoara.

Skokovite promene se dešavaju u intervalima koji odgovaraju polovini periode oscilovanja cevovoda, $2L/a = 4$ s. Početne promene su iste za sva tri slučaja. Sa povećanjem vremena ubrzanja fluida, T_0 , u odnosu na periodu elastičnih oscilacija fluida u cevovodu, $4L/a$, poboljšava se i slaganje rezultata koje daju dva modela. Zbog toga, može se postaviti pitanje da li je podjednako opravdano svodjenje na bezdimenzionalni oblik jednačine (4.12) korišćenjem, T_0 i Q_∞ , kao karakterističnih veličina za sva tri analizirana slučaja.

Na slici (7.12) prikazane su promene pijezometarske kote na ulazu u cev (ne menja se), na polovini cevi i uzvodno od zatvarača. Oscilacije pijezometarske kote na polovini cevi kreću se između 95.00 i 100.00, odnosno, između kote otvora zatvarača i kote nivoa vode u rezervoaru. Prigušenje oscilacija je funkcija ukupnih gubitaka energije u cevovodu. Iako se radi o relativno malom opsegu oscilacija pijezometarske kote, kod dužih gravitacionih cevovoda, postoji mogućnost pojave vakuuma na isturenim tačkama cevovoda i oštećenja cevovoda (Tullis & Watkins, 1992).

7.4.4 Čvorovi - spojevi dve ili više cevi

Promena prečnika (hrapavosti, debljine zida cevi itd.)

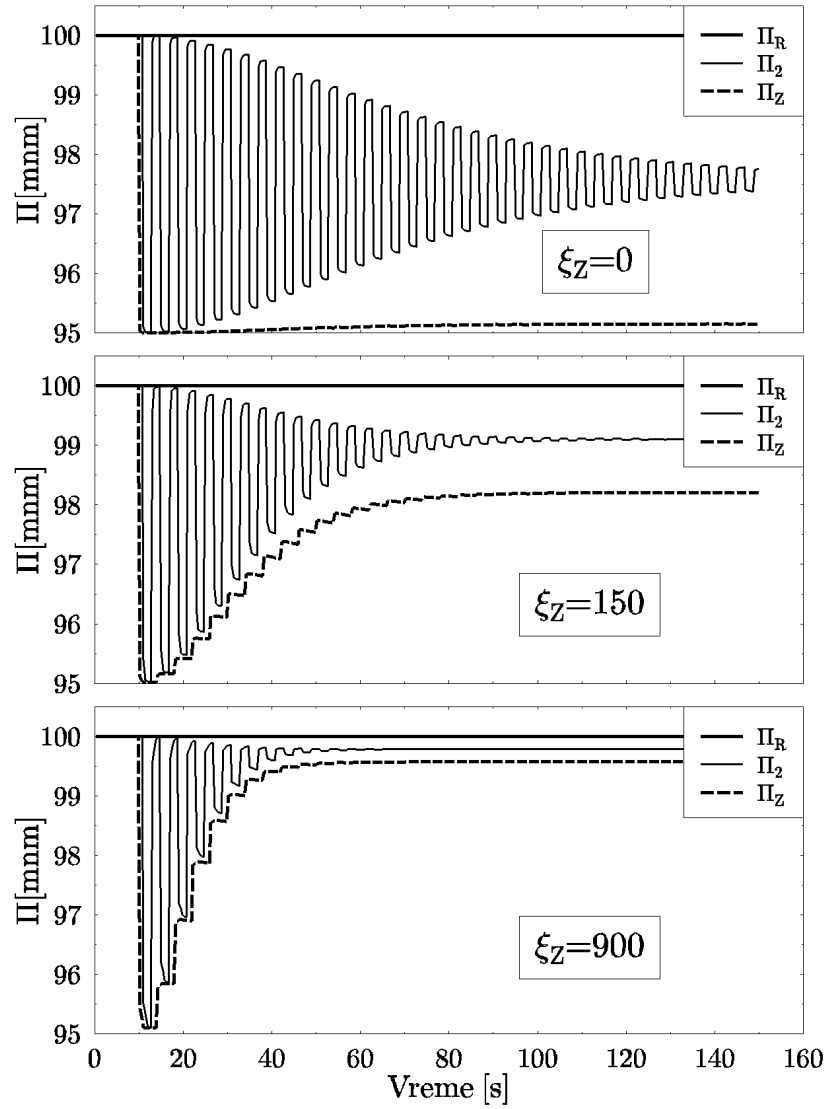
U čvoru se spajaju dve cevi, $\boxed{1}$ i $\boxed{2}$, odnosno, presek N cevi $\boxed{1}$ i presek 1 cevi $\boxed{2}$ (slika 7.13). U svakom preseku definisane su po dve promenljive veličine, pa su potrebna četiri uslova za njihovo određivanje. Iz jednakosti pijezometarskih kota, zbog zanemarenja gubitka energije i brzinskih visina, i iz jednačine kontinuiteta za čvor, sledi:

$$\Pi_{1,N}^{n+1} = \Pi_{2,1}^{n+1} = \Pi^{n+1} , \quad (7.53)$$

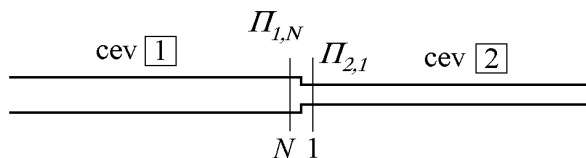
$$Q_{1,N}^{n+1} = Q_{2,1}^{n+1} = Q^{n+1} . \quad (7.54)$$

Iz jednačina pozitivne i negativne karakteristike eliminiše se pijezometarska kota i dobija se:

$$Q^{n+1} = \frac{CP_1 - CM_2}{B_1 + B_2} , \quad (7.55)$$



Slika 7.12: Promena piježometarskih kota u karakterističnim preseccima cevi



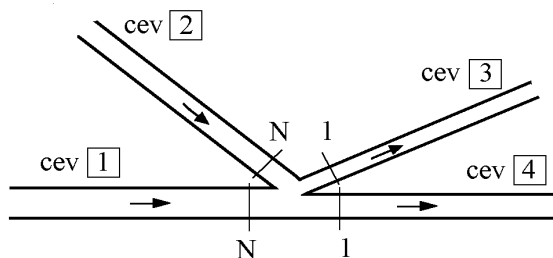
Slika 7.13: Spoj dve cevi

gde indeksi, 1 i 2, označavaju veličine vezane za cevi $\boxed{1}$ i $\boxed{2}$.

Spoj više cevi - račva

Uslov jednakosti pijeometarskih kota na krajevima cevi, koje se susstiču u račvu sa slike (7.14), daje

$$\Pi^{n+1} = \Pi_{1,N}^{n+1} = \Pi_{2,N}^{n+1} = \Pi_{3,1}^{n+1} = \Pi_{4,1}^{n+1} . \quad (7.56)$$



Slika 7.14: Spoj više cevi u jednom čvoru

Proticaji kroz pojedine cevi mogu se izraziti preko jednačina pozitivne karakteristike za cevi za koje je posmatrani čvor nizvodni (na slici, cevi $\boxed{1}$ i $\boxed{2}$), odnosno, jednačina negativne karakteristike, za cevi za koje je posmatrani čvor uzvodni (cevi $\boxed{3}$ i $\boxed{4}$):

$$\begin{aligned} -Q_{1,N}^{n+1} &= \frac{\Pi^{n+1}}{B_1} - \frac{CP_1}{B_1} ; & -Q_{2,N}^{n+1} &= \frac{\Pi^{n+1}}{B_2} - \frac{CP_2}{B_2} ; \\ Q_{3,1}^{n+1} &= \frac{\Pi^{n+1}}{B_3} - \frac{CM_3}{B_3} ; & Q_{4,1}^{n+1} &= \frac{\Pi^{n+1}}{B_4} - \frac{CM_4}{B_4} . \end{aligned}$$

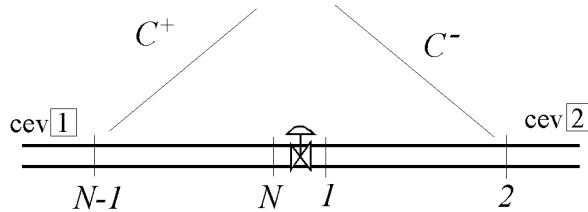
Iz jednačine kontinuiteta sledi:

$$\Pi^{n+1} \sum_j \frac{1}{B_j} - \frac{CP_1}{B_1} - \frac{CP_2}{B_2} - \frac{CM_3}{B_3} - \frac{CM_4}{B_4} = 0 , \quad (7.57)$$

odnosno,

$$\Pi^{n+1} = \frac{CP_1/B_1 + CP_2/B_2 + CM_3/B_3 + CM_4/B_4}{\sum_j(1/B_j)}. \quad (7.58)$$

7.4.5 Zatvarač u čvoru



Slika 7.15: Zatvarač na spoju dve cevi

U ovom slučaju ne postoji jednakost pijezometarskih kota na krajevima dve cevi zbog gubitka energije kroz zatvarač (slika 7.15). Pod pretpostavkom da su u obe cevi brzinske visine relativno male, vez između pijezometarskih kota može se uspostaviti sledećom jednačinom

$$\Pi_{1,N}^{n+1} = \Pi_{2,1}^{n+1} + \xi_z \frac{Q^{n+1}|Q^{n+1}|}{A_z^2 2g}, \quad (7.59)$$

gde (ξ_z) predstavlja koeficijent lokalnog gubitka energije. Pijezometarske kote se određuju iz jednačina pozitivne i negativne karakteristike, $\Pi_{1,N}^{n+1} = CP_1 - B_1 Q_{1,N}^{n+1}$ i $\Pi_{2,1}^{n+1} = CM_2 + B_2 Q_{2,1}^{n+1}$. Iz jednačine (7.59) eliminišu se pijezometarske kote i dobija se:

$$CP_1 - B_1 Q^{n+1} - CM_2 - B_2 Q^{n+1} - C_1 Q^{n+1}|Q^{n+1}| = 0, \quad (7.60)$$

gde je $C_1 = \xi_z/A_z^2 2g$.

Smer tečenja, odnosno, znak proticaja, nije unapred poznat ali se lako određuje iz jednačine (7.60). Ako je $CP_1 - CM_2 > 0$, proticaj je pozitivan (od 1 ka 2) i jednak:

$$Q^{n+1} = \frac{-(B_1 + B_2) + \sqrt{(B_1 + B_2)^2 + 4C_1(CP_1 - CM_2)}}{2C_1}. \quad (7.61)$$

Ako je $CP_1 - CM_2 < 0$, proticaj je negativan i jednak:

$$Q^{n+1} = \frac{(B_1 + B_2) - \sqrt{(B_1 + B_2)^2 - 4C_1(CP_1 - CM_2)}}{2C_1} . \quad (7.62)$$

Može se koristiti i manje poznati oblik rešenja kvadratne jednačine (Press et al., 1989), kod koga se otklanja dilema izbora znaka pravog rešenja jednačine²

$$q_0 = \frac{1}{2} \left[(B_1 + B_2) + \sqrt{(B_1 + B_2)^2 + C_1 |CP_1 - CM_2|} \right] , \quad (7.63)$$

$$Q^{n+1} = \frac{CP_1 - CM_2}{q_0} . \quad (7.64)$$

Primer 2

Na kraju cevovoda, kroz koji u ustaljenom tečenju protiče, $Q_0 = 4.11$ l/s, nalazi se zatvarač, koji se naglo zatvara. Cevovod se sastoji od dve cevi sledećih karakteristika:

$$L_1 = 2000 \text{ m}, D_1 = 0.2 \text{ m}, k_1 = 0.2 \text{ mm}, a_1 = 1000 \text{ m/s},$$

$L_2 = 1000 \text{ m}, D_2 = 0.1 \text{ m}, k_2 = 0.2 \text{ mm}, a_2 = 1000 \text{ m/s}$. Odrediti uticaj interpolacija po prostoru na tačnost rešenja.

Rezultati proračuna prikazani su na slikama (7.16) i (7.17). Rastojanja između računskih tačaka na cevima su $\Delta x = 100$ m, a vremenski priraštaj je $\Delta t = 0.1$ s. Na slici (7.16) prikazane su promene pijezometarske kote i proticaja u tri preseka cevi, na polovini prve cevi (A), na spoju dve cevi (B) i u preseku uzvodno od zatvarača (Z). Zatvaranje zatvarača je nastupilo u $t_0 = 5$ s. Osim osnovne periodičnosti oscilacija sa periodom $4L/a$, mogu se uočiti i druge, što je karakteristika prostiranja talasa hidrauličkog udara u složenim cevovodima. Na spoju dve cevi, gde se menja poprečni presek

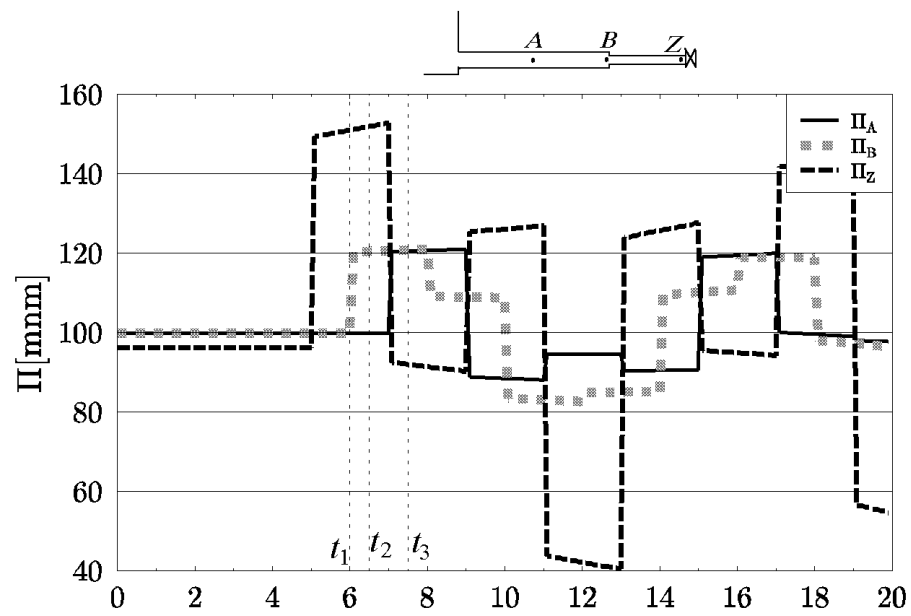
² Kvadratna jednačina u obliku

$$aQ^2 + bQ + c = 0 ,$$

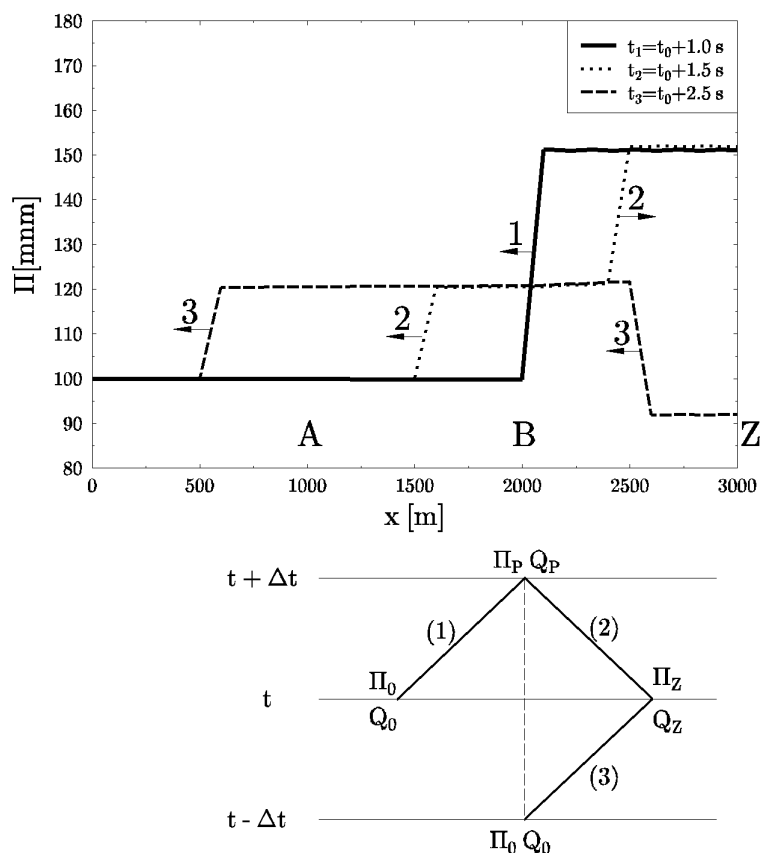
ima rešenja:

$$q_0 = -\frac{1}{2} \left[b + \text{sgn}(b) \sqrt{b^2 - 4ac} \right] ,$$

$$Q_1 = q_0/a , \quad Q_2 = c/q_0 .$$



Slika 7.16: Promena pijezometarskih kota i proticaja u karakterističnim presecima cevi; Primer 2



Slika 7.17: Odbijanje i prelamanje talasa hidrauličkog udara u složenom cevovodu; Primer 2

cevovoda, dolazi do delimičnog odbijanja talasa, dok jedan deo inicijalnog talasa nastavlja put.

Izdvojena su tri vremenska trenutka, $t_1 = 6\text{ s}$, $t_2 = 6.5\text{ s}$ i $t_3 = 7.5\text{ s}$, (označeni su isprekidanim linijama na dijagramima na slici 7.16), u kojima je prikazano stanje pijezometarskih kote duž cevovoda. U trenutku t_1 , front talasa je došao do spoja dve cevi, u t_2 , mogu se uočiti dva fronta, jedan, inicijalnog talasa koji nastavlja put ka rezervoaru, i drugi, odbijenog talasa, koji putuje ka zatvaraču. U trenutku t_3 , došlo je do odbijanja talasa od zatvarača.

Povećanje pijezometarske kote izazvano naglim zatvaranjem zatvarača,

odnosno, veličina inicijalnog talasa, iznosi

$$\Delta\Pi_0 = -\frac{a}{gA_1}Q_0 = 53.4\text{m} .$$

Proširenje cevovoda dovelo je do određenog rasterećenja pritiska u nizvodnoj cevi, ali zbog ograničenih dimenzija uzvodne cevi, rasterećenje nije potpuno (jedan deo talasa, $\Delta\Pi = 21.0\text{m}$, nastavio je put ka rezervoaru).

U klasicima hidrauličkog udara (Parmakian, 1963), posebno se razmatraju uslovi prostiranja i odbijanja talasa za razne granične uslove u cevovodima i daju se relacije za računanje odgovarajućih veličina. U savremenim knjigama to se smatra suvišnim, jer numerički model, zasnovan na metodi karakteristika, omogućava simulaciju mnogo komplikovanijih slučajeva bez posebnih problema. Istina je verovatno na sredini. Za razumevanje pojave, a i za kontrolu rezultata proračuna, korisno je znati i te "klasične" relacije.

Ovaj primer će se iskoristiti za malu digresiju i za izvodjenje izraza za računanje veličine odbijenog talasa na spoju dve cevi različitih karakteristika. Gubici energije, lokalni i linijski, zanemaruju se. U ovom primeru to je opravdano jer brzinska visina u cevi 1 iznosi 0.0017m , a u cevi 2, 0.014m .

Stanje u tački P (donji deo slike 7.17), koja se nalazi na spoju dve cevi u trenutku kada je talas došao do spoja, određuju karakteristike (1) i (2), od kojih je (1), pozitivna karakteristika koja dolazi iz neporemećene sredine, gde su Π_0 i Q_0 , a (2) je negativna, koja polazi iz tačke gde su, Π_Z i Q_Z . Stanje u tački (Z) određuje pozitivna karakteristika (3), koja dolazi iz neporemećene sredine i poznata promena jedne veličine (kod potpunog zatvaranja zatvarača poznato je, $Q_Z = 0$).

$$C_1 : \Pi_P - \Pi_0 = B_1(Q_0 - Q_P) , \quad (7.65)$$

$$C_2 : \Pi_P - \Pi_Z = B_2(Q_P - Q_Z) , \quad (7.66)$$

$$C_3 : \Pi_Z - \Pi_0 = B_2(Q_0 - Q_Z) . \quad (7.67)$$

Odavde se jednostavno dolazi do sledećih izraza

$$\frac{\Pi_P - \Pi_0}{\Pi_Z - \Pi_0} = \frac{2B_1}{B_1 + B_2} = \frac{2}{1 + \frac{a_2 A_1}{a_1 A_2}} , \quad (7.68)$$

$$\frac{Q_P - Q_0}{Q_Z - Q_0} = \frac{2B_2}{B_1 + B_2} = \frac{2}{1 + \frac{a_1 A_2}{a_2 A_1}} . \quad (7.69)$$

Ako se jednačine (7.68) i (7.69) primene na ovaj primer, za koji važi, $B_2 = 4B_1$, dobiće se

$$\Pi_P - \Pi_0 = \frac{2}{5}(\Pi_Z - \Pi_0) ,$$

odnosno, da oko 40 % ($21.0/53.4 = 0.39$) dolaznog talasa nastavlja put ka rezervoaru. Kod potpunog zatvaranja zatvarača proticaj, Q_Z , jednak je nuli, a proticaj, $Q_P = -0.6Q_0$.

Slaganje sa rezultatima numeričke simulacije je dosta dobro, jer je gubitak na trenje na ovom relativno kratkom cevovodu vrlo mali.

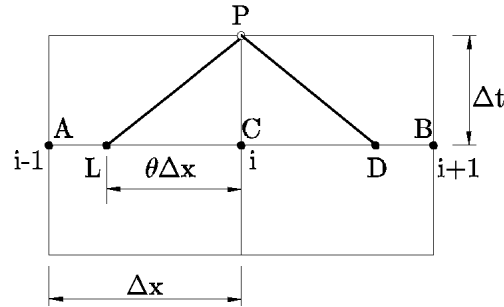
Relacija (7.68) može se iskoristiti za objašnjenje još nekih slučajeva koji mogu biti interesantni za vizuelnu kontrolu rezultata proračuna. Povećanjem površine preseka cevi A_1 , dalje se smanjuje vrednost pijezometarske kote na spoju, kao i veličina talasa koji nastavlja put prema rezervoaru. Isti efekat ima smanjenje brzine prostiranja talasa u cevi 1.

Ako je $A_1 < A_2$, dolazi do povećanja pijezometarske kote na spoju. U graničnom slučaju, $A_1 = 0$, dolazi do dupliranja promene pijezometarske kote, što odgovara graničnom uslovu zatvorene cevi. Ovih nekoliko napomena ima i praktični značaj, što se može ilustrovati na dva primera. Kod sonde za merenje pritiska ne dozvoljava se prisustvo mehurića vazduha na kontaktu sonde i vode, jer može doći do ublaženja oštih pikova promene pritiska zbog mnogo manje brzine prostiranja talasa kroz vazduh nego kroz vodu. Takodje, od velikih i kratkotrajnih promena pritiska cevovod se može štititi ubacivanjem deformabilnih deonica (gumeno-armirane cevi) na mestima gde se očekuje nagla promena proticaja.

7.5 Varijante metode karakteristika

7.5.1 Metoda karakteristika sa interpolacijama po prostoru

Kada se u cevnoj mreži koju treba analizirati, nalazi više cevi različitih dužina i karakteristika, ili kada je brzina propagacije promenljiva (jako deformabilne cevi, tečenje mešavine tečnosti i gasa itd.), nije jednostavno zadovoljiti uslov, $\Delta t = \Delta x/a$, za svaku cev. Tada je neophodno odabrati i vremenski priraštaj i rastojanje između računskih tačaka na cevi. Numerička mreža je određena unapred, a jednačine numeričkog modela (7.22) i (7.23) treba modifikovati. U njima ne figurišu vrednosti u presecima $(i - 1)$ i $(i + 1)$, sa poznatog vre-



Slika 7.18: Numerička mreža za metodu karakteristika sa interpolacijama po prostoru

menskog nivoa, nego vrednosti u tačkama u koje dolaze pozitivna i negativna karakteristika povučene iz tačke P (slika 7.18).

$$\Pi_P - \Pi_L + \frac{a_L}{gA}(Q_P - Q_L) + \frac{\lambda a_L \Delta t}{2gDA^2} Q_L |Q_L| = 0 \quad , \quad (7.70)$$

$$x_P - x_L = (V_L + a_L)\Delta t \quad , \quad (7.71)$$

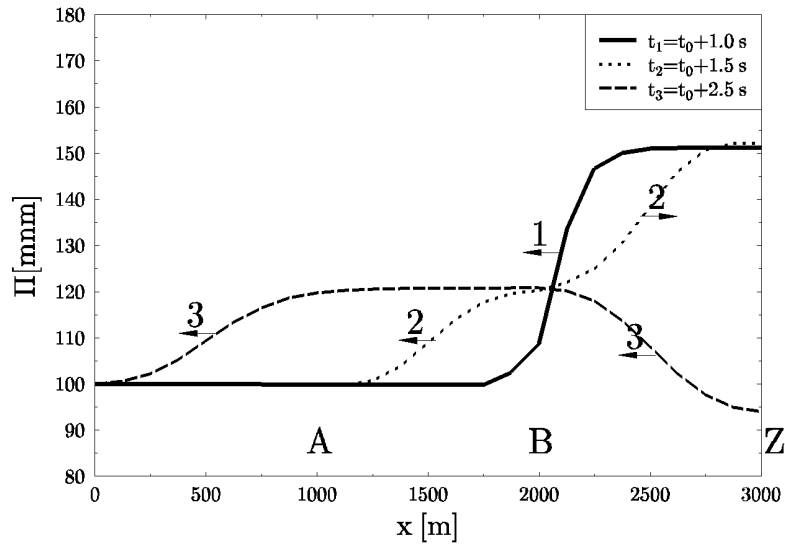
$$\Pi_P - \Pi_D - \frac{a_D}{gA}(Q_P - Q_D) - \frac{\lambda a_D \Delta t}{2gDA^2} Q_D |Q_D| = 0 \quad , \quad (7.72)$$

$$x_P - x_D = (V_D + a_D)\Delta t \quad . \quad (7.73)$$

Vrednosti pijezometarske kote i proticaja u tačkama L i D dobijaju se linearnom interpolacijom. Poznato je da interpolacija dovodi do određenih problema, medju kojima su disperzija i ublaženje oscilacija, koji nemaju fizičko opravdanje.

Na slici (7.19) prikazane su pijezometarske linije duž cevovoda analiziranog u primeru 2, u tri vremenska preseka, dobijene numeričkim modelom sa interpolacijama ($\Delta t = 0.1$ s, $\Delta x = 125$ m, $a \cdot \Delta t / \Delta x = \theta = 0.8$). Za razliku od rezultata proračuna prikazanih na slici (7.17), gde nije bilo interpolacija, frontovi su rasplinuti. Sa povećanjem stepena interpolacije, kao i u narednim oscilacijama, dolazi i do ublaženja ekstremnih vrednosti. Neophodno je, dakle, utvrditi greške koje se javljaju prilikom interpolacija da bi se mogla oceniti granica primenljivosti interpolacija.

Kao što je već vidjeno ranije, efekat ublažavanja oscilacija ima i trenje,



Slika 7.19: Uticaj interpolacije na rezultate proračuna prostiranja talasa hidrauličkog udara u složenom cevovodu; Primer 2

pa će se nadalje ono zanemariti. Takođe, koristiće se jednačine u bezdimenzionalnom obliku

$$(q_P - q_L) + (h_P - h_L) = 0, \quad (7.74)$$

$$(q_P - q_D) - (h_P - h_D) = 0, \quad (7.75)$$

odakle se dobija

$$q_P - \frac{1}{2}(q_D + q_L) + \frac{1}{2}(h_D - h_L) = 0, \quad (7.76)$$

$$h_P - \frac{1}{2}(h_D + h_L) + \frac{1}{2}(q_D - q_L) = 0. \quad (7.77)$$

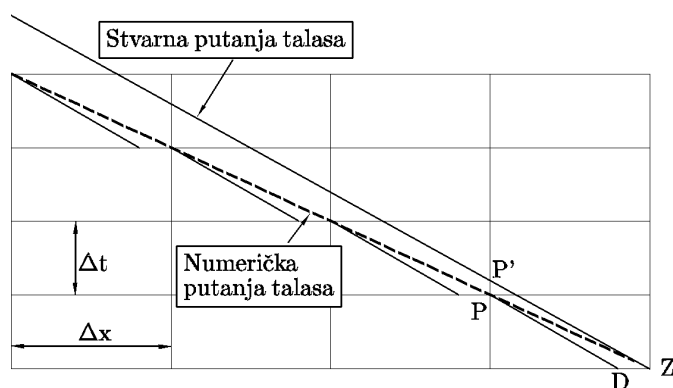
Veličine u tačkama L i D dobijaju se linearnom interpolacijom

$$\Phi_L = \Phi_{i-1}^n \theta + \Phi_i^n (1 - \theta), \quad (7.78)$$

gde je $\theta = a\Delta t / \Delta x$.

Pogodnost slobodnog izbora i vremenskog i prostornog priraštaja ima svoju cenu. Zbog interpolacije, numerička brzina prostiranja poremećaja veća je od stvarne, a zbog numeričke difuzije dolazi do rasplinjavanja frontova talasa i znatno bržeg ublažavanja oscilacija pritiska.

Posmatra se izolovani poremećaj izazvan zatvaranjem zatvarača na nizvodnom kraju cevovoda, koji putuje od zatvarača ka rezervoaru, brzinom, a . Na slici (7.20) data je numerička mreža za metodu karakteristika sa interpolacijama, koja ima po 4 priraštaja, Δx i Δt . Prikazana je stvarna brzina propagacije i pogrešna, koja je posledica interpolacija. Odnos numeričke i stvarne brzine propagacije zove se *faktor disperzije numeričkog modela*, $R_2 = \tilde{a}/a$.



Slika 7.20: Uticaj interpolacije na prostiranje talasa hidrauličkog udara u cevi

Umesto za L/a informacija putuje od zatvarača do rezervoara za $\theta L/a$. Povećanje pijezometarske kote, koje iznosi, $\Delta h_0 = 1$, odnosno, $\Delta \Pi_0 = aV_0/g$, stiže u naredni presek, tačka P' , u trenutku, $(\Delta t + (1 - \theta)\Delta x/a)$, dok u numeričkom modelu, talas kreće iz tačke D , i stiže u tačku P za Δt . Zbog interpolacije, *lažni* poremećaj, koji stigne u naredni presek je umanjen i iznosi, $\Delta \tilde{h} = \theta$. Veličina poremećaja zavisi od, m , broja predjenih intervala Δx , pa iznosi

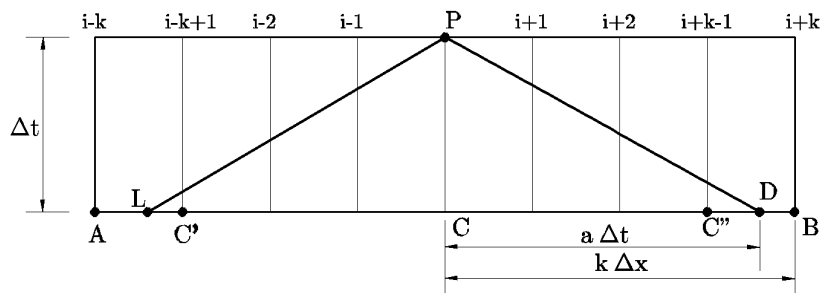
$$\Delta \tilde{h} = \theta^m \quad \left(\Delta \tilde{\Pi} = \frac{\theta^m a V_0}{g} \right) . \quad (7.79)$$

Pošto se radi o "lažnom" poremećaju koji nema fizičku podlogu, interes je da on bude što manji.

Najvažnije što se može zaključiti je da se kod interpolacija treba truditi da θ bude što bliže 1, i da se cevi dele na što veći broj deonica, m . Mnogo rigoroznija analiza tačnosti metode karakteristika sa interpolacijama može se naći u stručnoj literaturi (Wiggert, Sundquist, 1977).

Sa jasnom idejom da se uzimaju vrednosti u tačkama u kojima pozitivna, odnosno, negativna karakteristika seku vremenski nivo (n), moguće

je proširenje važnosti ovog postupka i na slučajeve kada karakteristike izlaze van intervala $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, odnosno, kada je $a\Delta t > \Delta x$ (slika 7.21). U oblasti hidrauličkog udara ova varijanta se pripisuje Vardiju (Vardy, 1977), dok se standardna interpolacija po prostoru u intervalu $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ zove Hartrijeva metoda (Hartee, 1958)



Slika 7.21: Vardijeva varijanta interpolacije po prostoru

Ako se i dalje zadrži da je $0 < \theta \leq 1$ interpolacija se vrši izmedju vrednosti u preseku C'' i preseku B , odnosno, izmedju vrednosti u presecima, A i C' (slika 7.21).

$$\phi_L = \phi_{i-k+1} - \theta(\phi_{i-k+1} - \phi_{i-k}) , \quad (7.80)$$

$$\phi_D = \phi_{i+k-1} - \theta(\phi_{i+k-1} - \phi_{i+k}) . \quad (7.81)$$

Uvodi se broj l koji pokazuje broj intervala Δx izmedju preseka (i) i tačke B

$$a\Delta t = (\theta + k - 1)\Delta x , \quad (7.82)$$

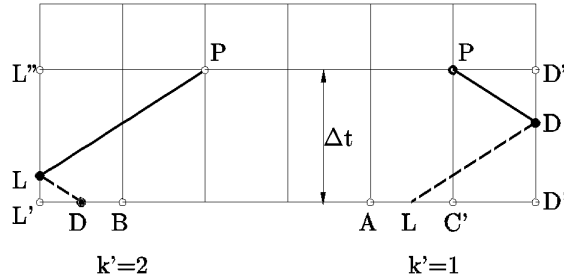
ili, koristeći funkciju FORTRAN-a IFIX(y), koja daje celobrojnu vrednost argumenta, y

$$k = \text{IFIX} \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} \right) + 1 , \quad (7.83)$$

$$\theta = \frac{a\Delta t}{\Delta x} - \text{IFIX} \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} \right) . \quad (7.84)$$

Kada je $k = 1$, radi se o Hartrijevoj metodi.

Granični uslovi se mogu računati na dva načina, koji su prikazani na slici (7.22):



Slika 7.22: Granični uslovi za Vardijevu metodu karakteristika

- Linearnom interpolacijom po vremenu sračunatih vrednosti u tačkama, L' i L'' , odnosno, D' i D'' ,

$$\phi_L = \phi_{L''} - \frac{k' \Delta x}{a \Delta t} (\phi_{L''} - \phi_{L'}) , \quad (7.85)$$

$$\phi_D = \phi_{D''} - \frac{k' \Delta x}{a \Delta t} (\phi_{D''} - \phi_{D'}) , \quad (7.86)$$

gde, k' , predstavlja broj deonica cevi, Δx , između tačke P i granice.

- Produžavanjem karakteristika do preseka sa x osom (isprekidane linije), i korišćenje negativne karakteristike na uzvodnom kraju cevi (pozitivne na nizvodnom) i jednog graničnog uslova da bi se odredile obe veličine u tački L (odnosno, u tački D , na nizvodnom kraju cevi).

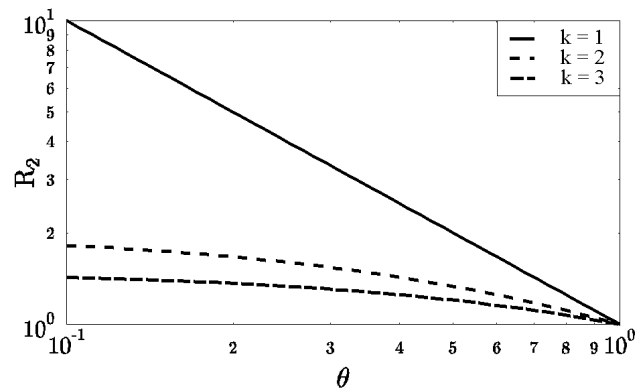
Mada se rezultati ne razlikuju mnogo, drugi način se smatra boljim.

Pored značajne prednosti u povećanju vremenskog koraka, Vardijeva metoda ima i manju numeričku disperziju od standardne (slika 7.23). Lako se dolazi do izraza za faktor disperzije

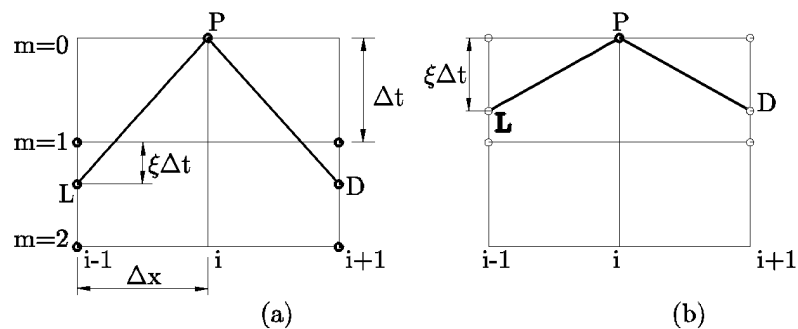
$$R_2 = \frac{\tilde{a}}{a} = \frac{k}{\theta + k - 1} . \quad (7.87)$$

7.5.2 Metoda karakteristika sa interpolacijama po vremenu

Na slici (7.24) prikazana je alternativa interpolaciji po prostoru. Polazne tačke pozitivne i negativne karakteristike nalaze se uvek u istom preseku



Slika 7.23: Faktor disperzije Vardijeve metode karakteristika



Slika 7.24: Metoda karakteristika sa interpolacijama po vremenu, (a) eksplicitna i (b) implicitna

cevi, a interpolacijom po vremenu (*timeline interpolation*) traže se vrednosti u tačkama L i D . Razlika je na prvi pogled nebitna, ali su prednosti u odnosu na Hartijevu metodu značajne. Jedini, uslovno rečeno, nedostatak ovog postupka je potreba za čuvanjem vrednosti u većem broju prethodnih vremenskih nivoa.

Na istoj slici prikazan je slučaj interpolacije u okviru tekućeg vremenskog priraštaja, Δt , koji odgovara implicitnoj formulaciji. Implicitna formulacija numeričkog modela prelaznih režima u cevima formalno nema ograničenja za dužinu vremenskog koraka. Ona zahteva jednovremeno rešavanje svih jednačina karakteristika i zbog većeg broja aritmetičkih operacija, ona ima smisla samo kod jako sporih promena, gde opet prednost može imati i jednostavniji matematički model (model krutog udara, na primer). Vrednosti nepoznatih

u tački P određuju se preko izraza

$$(q_P - q_L) + (h_P - h_L) = 0 \quad , \quad (7.88)$$

$$(q_P - q_D) - (h_P - h_D) = 0 \quad . \quad (7.89)$$

Ovi izrazi su identični izrazima (7.74) i (7.75) pa se mogu iskoristiti i naredne dve jednačine.

Na slici (7.24) označene su pomoćne promenljive, m , celobrojna veličina, koja se meri od vremenskog nivoa na kojem je tačka P , unazad, i ξ , koje daje relativno rastojanje tačaka L i D , $\xi\Delta t$, od susednog vremenskog nivoa, označenog sa m ,

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{m + \xi} \quad , \quad (7.90)$$

$$\Phi_L = \Phi_{i-1}^m (1 - \xi) + \Phi_{i-1}^{m+1} \xi \quad . \quad (7.91)$$

Osobine dve varijante metode karakteristika sa interpolacijama mogu se oceniti linearnom analizom grešaka o čemu se može više naći u literaturi (Abbott & Basco, 1991; Goldberg & Wylie, 1983). Ovde će se samo komentarisati rezultati jedne takve analize.

Analiza greške numeričke metode daje dva pokazatelja, R_1 i R_2 , koja se lako mogu ilustrovati. Posmatra se prostiranje periodičnih poremećaja, sinusnih talasa, uz zanemarenje gubitaka energije. Talasi se aproksimiraju konačnim razlikama i prati se njihovo prostiranje kroz cev na dužini koja odgovara jednoj talasnoj dužini, ili u jednom preseku, tokom jedne periode talasa. Amplituda i brzina propagacije talasa sračunatog numeričkim modelom mogu se razlikovati od onih koje odgovaraju fizičkom talasu. Mera tog odstupanja su faktori, R_1 i R_2 , do kojih se može doći analitički, linearnom analizom stabilnosti, ali i jednostavnim numeričkim eksperimentima. Faktor prigušenja, R_1 , predstavlja odnos amplitude talasa dobijenog numeričkim modelom i stvarnog, a R_2 , je faktor disperzije, koji predstavlja odnos numeričke i stvarne brzine propagacije talasa.

Rezultati jednog numeričkog eksperimenta sa interpolacijom po prostoru, prikazani su na slici (7.25). Granični uslovi su, $\Pi(0, t) = 10$, na uzvodnom kraju cevi, i, $Q(L, t) = 0$, na nizvodnom kraju cevi. Početni uslovi, za $t = 0$, su, $Q(x, 0) = 0$, i $\Pi(x, 0) = 10.0 + \sin(\pi x / (2L))$, odnosno, četvrtina talasa na dužini cevi L . Cev je podeljena na 5 deonica, odnosno, $\Delta x = 1/20$ talasne dužine, L_T . Posle jedne fizičke periode oscilovanja, $T = 4L/a$, za $\theta = 0.5$, amplituda talasa je smanjena na 55 % početne vrednosti. Promenom

vremenskog priraštaja Δt mogu se jednostavno dobiti vrednosti prigušenja za različite vrednosti θ .

Na slici (7.26) upoređeni su faktori prigušenja, R_1 , za obe metode a za isti slučaj ($L_T/\Delta x = 20$). Između stepena interpolacije po prostoru θ i stepena interpolacije po vremenu, $m + \xi$, postoji sledeća veza,

$$m + \xi = \frac{1}{\theta} \quad (7.92)$$

Može se videti da, do otprilike, $m + \xi = 1.3$, nema razlike, a da je, za veće vrednosti, prednost na strani interpolacija po vremenu. Za manje vrednosti $L_T/\Delta x$, razlika je još ubedljivija (Goldberg, Wylie, 1983).

7.6 Druge metode za analizu hidrauličkog udara

Različite varijante metode karakteristika koriste se kao osnova u većini komercijalnih matematičkih modela za simulaciju prelaznih pojava u sistemima pod pritiskom. U otvorenim tokovima, prednost su dobile druge metode, koje se mogu lakše prilagoditi nelinearnim problemima. Jednačine matematičkog modela neustaljenog tečenja u otvorenim tokovima vrlo su slične jednačinama (6.11) i (6.36), pa se isti algoritam može koristiti za rešavanje i jednih i drugih jednačina. Postoji dosta primera simulacije prelaznih pojava u otvorenim tokovima metodom karakteristika (Wylie & Streeter, 1978; Ivetić i dr., 1983; Petreski, Ivetić, 1994).

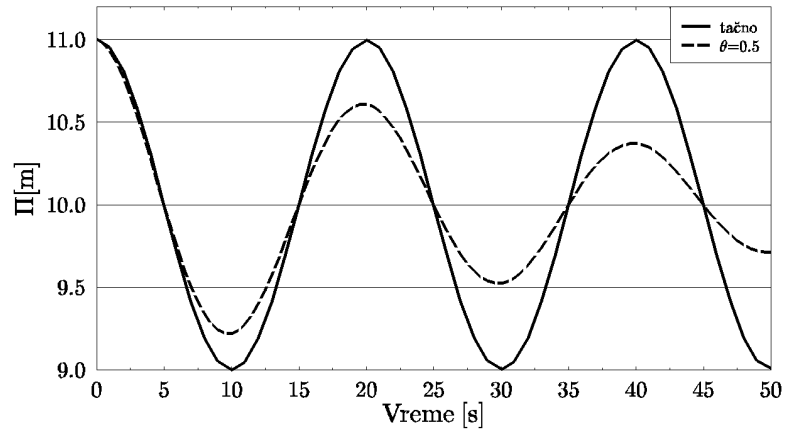
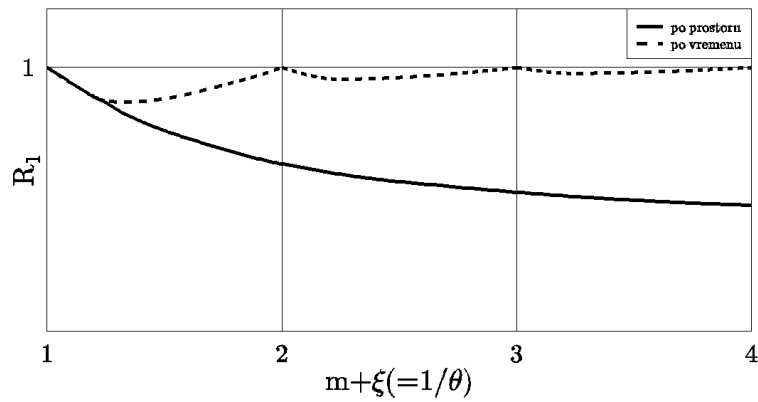
Takodje, ima uspešnih pokušaja korišćenja metoda razvijenih u oblasti tečenja u otvorenim tokovima za proračun prelaznih režima u cevima. Posebno će se istaći metoda koja je razvijena u IHE Delft (Verwey & Yu, 1993) i koja će biti objašnjena u nastavku.

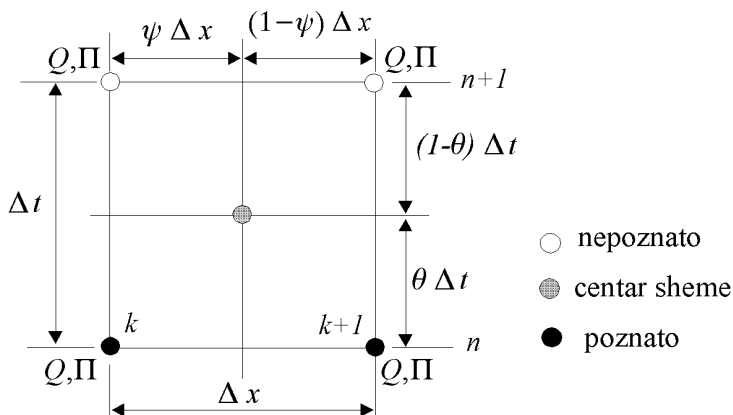
7.6.1 Kompaktna implicitna metoda visoke tačnosti

Polazi se od jednačina (6.11) i (6.36)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\lambda}{2D} V|V| = 0 \quad (7.93)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (7.94)$$

Slika 7.25: Poredjenje približnog rešenja sa tačnim, $\theta = 0.5$, $L_T/\Delta x = 20$ Slika 7.26: Faktor prigušenja, R_1 , metode karakteristika sa interpolacijama po prostoru i po vremenu, $L_T/\Delta x = 20$



Slika 7.27: Aproximacija izvoda kod kompaktne implicitne metode (Verwey & Yu, 1993)

Izvodi u jednačinama se aproksimiraju na intervalu Δt i rastojanju Δx , između vremenskih nivoa (n) i ($n+1$), i preseka (k) i ($k+1$). Koriste se poznate vrednosti Π i Q na vremenskom nivou (n), ali i nepoznate u oba preseka (k) i ($k+1$) na vremenskom nivou ($n+1$).

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx (1 - \Psi) \frac{f_k^{n+1} - f_k^n}{\Delta t} + \Psi \frac{f_{k+1}^{n+1} - f_{k+1}^n}{\Delta t}, \quad (7.95)$$

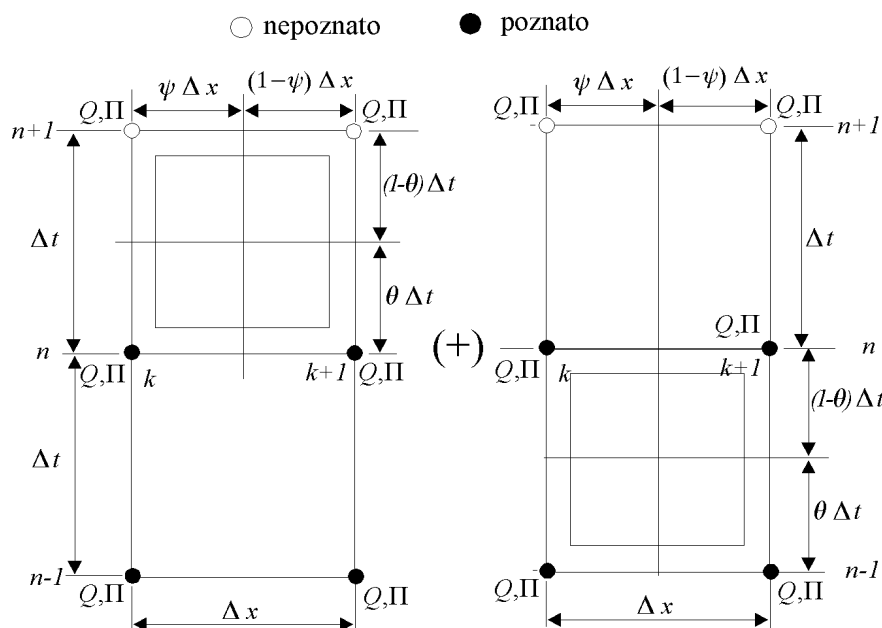
$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx (1 - \theta) \frac{f_{k+1}^n - f_k^n}{\Delta x} + \theta \frac{f_{k+1}^{n+1} - f_k^{n+1}}{\Delta x}, \quad (7.96)$$

gde f može da predstavlja Q ili Π , a Ψ i θ su težinski koeficijenti koji se kreću između 0 i 1. Zamenom izraza (7.95) i (7.96) u jednačine (7.93) i (7.94) dolazi se do sistema linearnih jednačina, za svaku deonicu cevi po jedan par jednačina oblika

$$A1_k Q_k^{n+1} + B1_k \Pi_k^{n+1} + C1_k Q_{k+1}^{n+1} + D1_k \Pi_{k+1}^{n+1} = E1_k, \quad (7.97)$$

$$A2_k Q_k^{n+1} + B2_k \Pi_k^{n+1} + C2_k Q_{k+1}^{n+1} + D2_k \Pi_{k+1}^{n+1} = E2_k. \quad (7.98)$$

Na krajevima cevi treba obezbediti po jedan granični uslov da bi se obezbedio dovoljan broj jednačina. Za $\Psi = 1/2$ i $\theta = 1/2$ metoda je drugog reda tačnosti. Za neustaljeno tečenje u otvorenim tokovima uspešno se koristi Prajsmanova (*Preissmann*) metoda, koja je slična prethodno napisanom (izuzev, $0.5 \geq \theta \geq 1.0$) Kod hidrauličkog udara, gde postoje značajne varijacije brzine i pritiska, Prajsmanova metoda ne daje zadovoljavajuće rezultate. Detaljna



Slika 7.28: Operator za implicitnu metodu visoke tačnosti (Verwey & Yu, 1993)

analiza (Verwey & Yu, 1993) ukazuje da je to zbog uticaja članova trećeg reda $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right)$ i $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \right)$ u modifikovanoj jednačini, koje treba odstraniti iz greške zaokruženja. Ti članovi se diskretizuju i oduzimaju od originalne numeričke sheme. Za diskretizaciju izvoda trećeg reda neophodno je najmanje 6 tačaka numeričke mreže (slika 7.28). Članovi trećeg reda aproksimiraju se na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right) \approx \frac{(Q_{k+1}^{n+1} - 2Q_{k+1}^n + Q_{k+1}^{n-1}) - (Q_k^{n+1} - 2Q_k^n + Q_k^{n-1})}{\Delta x \Delta t^2} \quad (7.99)$$

Ovi članovi se oduzimaju od numeričke metode Praismanovog tipa (slika 7.27) i to, između vremenskih nivoa (n) i $(n+1)$ centrirano unazad a između nivoa $(n-1)$ i (n) , centrirano unapred, tako da se kao rezultat implicitna metoda na tri vremenska nivoa centrirana po vremenu. Koeficijenti u jednačini (7.97) određuju se na sledeći način

$$a_{11} = \frac{\Delta x^2}{6a^2 \Delta t} \left[2(6\Psi^2 - 6\Psi + 1) + Cr^2(-12\theta^2 + 6\theta + 1) \right]$$

$$\begin{aligned}
A1_k &= -\theta\Delta t + a_{11} \\
B1_k &= \frac{gA}{a^2}(1 - \Psi)\Delta x \\
C1_k &= \theta\Delta t - a_{11} \\
D1_k &= \frac{gA}{a^2}\Psi\Delta x \\
E1_k &= (1 - \theta)\Delta t(Q_k^n + Q_k^{n-1} - Q_{k+1}^n - Q_{k+1}^{n-1}) + \theta\Delta t(Q_k^n - Q_{k+1}^{n-1}) + \\
&\quad \frac{gA}{a^2}\Delta x(1 - \Psi)\Pi_k^{n-1} + \frac{gA}{a^2}\Delta x\Psi\Pi_{k+1}^{n-1} \\
&\quad + a_{11}(Q_{k+1}^{n-1} - 2Q_{k+1}^n - Q_k^{n-1} + 2Q_k^n)
\end{aligned}$$

a u jednačini (7.98)

$$\begin{aligned}
a_{22} &= \frac{gA\Delta x^2}{6a^2\Delta t} \left[2(6\Psi^2 - 6\Psi + 1) + Cr^2(-12\theta^2 + 6\theta + 1) \right] \\
A2_k &= (1 - \Psi)\Delta x + \frac{\lambda\Delta x\Delta t|Q_k^n|}{4DA} \\
B2_k &= -gA\Delta t\theta + a_{22} \\
C2_k &= \Psi\Delta x + \frac{\lambda\Delta x\Delta t|Q_{k+1}^n|}{4DA} \\
D2_k &= gA\theta\Delta t - a_{22} \\
E2_k &= (1 - \Psi)\Delta xQ_k^{n-1} + \Psi\Delta xQ_{k+1}^{n-1} + \\
&\quad gA(1 - \theta)\Delta t(\Pi_k^n - \Pi_{k+1}^n + \Pi_k^{n-1} - \Pi_{k+1}^{n-1}) \\
&\quad + gA\theta\Delta t(\Pi_k^n - \Pi_{k+1}^n) + a_{22}(\Pi_{k+1}^{n-1} - 2\Pi_{k+1}^n - \Pi_k^{n-1} + 2\Pi_k^n)
\end{aligned}$$

Sistem jednačina (7.97) i (7.98) za jednu cev, može se efikasno rešiti algoritmom dvostrukog prolaza (*double sweep*) (Abbott & Basco, 1989). Za sistem cevi u distribucionoj mreži to je malo teže ali izvodljivo.

Kao što se može videti metoda je neuporedivo komplikovanija od metode karakteristika. Komplikovanost još više dolazi do izražaja kod uključivanja graničnih uslova.

Autori ističu kao glavne prednosti ove metode u odnosu na metodu karakteristika, mogućnost menjanja intervala Δx na cevi bez uticaja na tačnost i bezuslovnu stabilnost zbog implicitne formulacije, što omogućava korišćenje iste metode i za kvazi ustaljeno tečenje i kruti udar. Međutim, te prednosti kod hidrauličkog udara nemaju toliku težinu jer je zbog ograničenja numeričke difuzije neophodno Kurantov (*Courant*) broj Cr ($= \frac{a\Delta t}{\Delta x}$) držati blizu 1, a nema ni potrebe da se duž cevi menja Δx . Mogućnost da se istim

algoritmom rešava hidraulički udar, kvazi ustaljeno tečenje i kruti udar, gde se mogu koristiti znatno duži vremenski koraci, nije praktično upotrebljiva (Ingeduld et al., 1994).

Sa druge strane, ovo je jedna od retkih metoda koja po tačnosti daje uporedive rezultate sa metodom karakteristika.

Bibliografija

- [1] Abbott, M. B., Basco, D. R., 1989, *Computational Fluid Dynamics - An Introduction for Engineers*, Longman Scientific & Technical.
- [2] Chaudhry, M. H., 1979, *Applied Hydraulic Transients*, Van Nostrand Reinhold Company.
- [3] Goldberg D.E., & Wylie, E. B., 1983, Characteristic method using time-line interpolations, J.Hydraul.Div., ASCE, Vol.109, No.HY1.
- [4] Hartree D.R., 1958, *Numerical Analysis*, Oxford University Press, London, England.
- [5] Ingeduld P., Zeman E., Verwey A., 1994, Object-oriented tools for transient flow analysis, NATO ASI "New technologies for large water supply systems", Albena.
- [6] Ivetić, M., 1982, Neka zapažanja proizašla iz rešavanja praktičnih zadataka iz neustaljenog tečenja u cevovodu, VIII savetovanje JDHI, Portorož.
- [7] Ivetić M., Radojković M., Maksimović Č., 1983, Primer primene matematičkog modela neustaljenog tečenja u mreži sastavljenoj od kanala sa slobodnom površinom i cevi pod pritiskom, Simpozijum o nelinearnim problemima mehanike, Arandjelovac.
- [8] Parmakian J., 1963, *Water-Hammer Analysis*, Dover Publications Inc., New York.
- [9] Petreski B., Ivetić M., 1994, Primena metode karakteristika sa interpolacijom po vremenu za proračun tečenja u otvorenim tokovima, 11. savetovanje hidrauličara i hidrologa, Beograd.

- [10] Tullis J.P., Watkins R.K., 1992, Pipe collapse caused by a pipe rupture - a case study, *Hydraulic Transients with Water Column Separation*, IAHR Working group, Valencia.
- [11] Vardy A.E., 1977, On the use of the method of characteristics for the solution of unsteady flows in networks, Proc. 2nd Int. Conf. Pressure Surges, BHRA Fluid Engineering, Cranfield, England.
- [12] Verwey A. & Yu J.H., 1993, A space-compact high-order implicit scheme for water hammer simulations, Proc. XXVth IAHR Conference, Tokyo, Japan.
- [13] Watt C.S., Boldy A.P., Hobbs J.M., 1980, Combination of finite difference and finite element techniques in hydraulic transient problems, 3rd Int. Conf. Pressure Surges, BHRA Fluid Engineering, Canterbury, England.
- [14] Wiggert D.C., & Sundquist M.J., 1977, Fixed-grid characteristics for pipeline transients, J.Hydraul.Div., ASCE, Vol.103, No.HY12.
- [15] Wylie E. B., 1984, Fundamental equations of waterhammer, J. Hydraul. Div., ASCE, Vol.110, No. HY4.

Poglavlje 8

Pumpe i prelazni režimi

8.1 Opšte o pumpama

Hidrogradjevinski (hidrotehnički) inženjeri, kojima je prvenstveno namenjena ova knjiga, ne bave se projektovanjem pumpi, ali neka znanja o njihovom funkcionisanju su im neophodna da bi mogli izabrati odgovarajuću pumpu i uklopiti je u hidrotehnički sistem. Više o pumpama i crpnim stanicama može se naći u specijalizovanim knjigama iz te oblasti (Protić i Nedeljković, 1992; Radojković i dr., 1989).

8.1.1 Vrste pumpi

Pumpe su hidrauličke mašine koje svojim radom povećavaju mehaničku energiju fluidne struje. Prema načinu na koji to rade one se dele u dve grupe:

- dinamičke, koje hidrodinamičkim silama deluju na fluid koji kontinualno prolazi kroz radni prostor, i
- zapreminske, koje menjajući zapreminu radnog prostora, naizmenično usisavaju i potiskuju fluid.

U zapreminske pumpe spadaju klipne, membranske, zupčaste itd, i obično su manjih dimenzija.

Dinamičke pumpe, koje se mnogo više koriste u hidrotehničkoj praksi, dele se na četiri grupe, prema dominantnim silama:

- pumpe sa lopaticama, kod kojih dominiraju centrifugalne sile i sile pritiska,

- frikzione pumpe, odnosno, pumpe koje rade na principu unutrašnjeg trenja,
- strujne pumpe, koje rade na principu inercijalnih sila,
- pneumatske pumpe, koje rade na principu uzgonskih sila.

Pumpe sa lopaticama su najrasprostranjenije. One imaju radno kolo sa lopaticama koje se obrće, čime se predaje energija fluidu dejstvom centrifugalnih sila i sila pritiska.

Frikzione pumpe imaju radno kolo bez lopatica. Malog su stepena korisnog dejstva i retko se koriste u hidrotehnici.

Pumpe koje rade na principu inercijalnih sila nemaju pokretnih delova. Voda se lokalno ubrzava u mlaznici, čime se smanjuje pritisak fluidne struje i usisava okolni fluid. Izmešani pogonski i usisani fluid ulaze u difuzor, gde se smanjuje brzina i povećava pritisak. To su pumpe posebnih namena, kao što su vakuum pumpe, pumpe za crpenje vode sa velikih dubina itd.

Pneumatske pumpe rade na principu uzgonskih sila koje deluju na mehuriće vazduha. Vazduh se ispušta u zoni usisa pumpe, mehurići se kao lakši penju gore i povlače za sobom okolni fluid, a često i čvrste čestice različite krupnoće. Koriste se za vadjenje peska, kao i za poboljšavanje razmene vode po vertikali u stratifikovanim jezerima i rezervoarima. Malog su stepena korisnosti i malih visina dizanja.

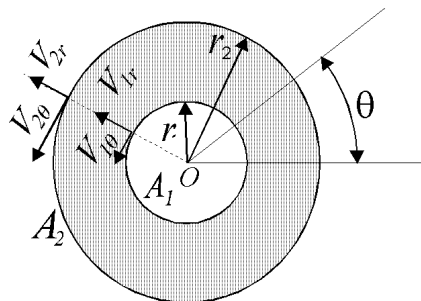
Prema obliku trajektorije fluidnih delića *pumpe sa lopaticama* se obično dele na:

- Radijalne (centrifugalne)
- Radijalno-aksijalne (poluaksijalne, dijagonalne)
- Aksijalne (propelerne, osne)

8.2 Teorijske osnove turbomašina

8.2.1 Jednačina održanja momenta količine kretanja

Razmena energije između konture i fluidne struje kod pumpi sa lopaticama obavlja se u kontrolnoj zapremini shematski prikazanoj na slici (8.1). Pretpostavlja se da je strujanje u ravni (r, θ) , ravni crteža, što bi odgovaralo obrtnom kolu radijalne pumpe. Kontrolna zapremina se obrće konstantnom



Slika 8.1: Oblast strujanja u kojoj se vrši razmena energije izmedju obrtnog kola i fluida

ugaonom brzinom ω , a osa obrtanja, ujedno i osovina vratila, je tačka O . Fluid ulazi u kontrolnu zapreminu (šrafirano na slici) kroz površinu A_1 , a napušta je kroz površinu A_2 . Označene su komponente brzine, V_r , meridijanska, i V_θ , tangencijalna ili obimska.

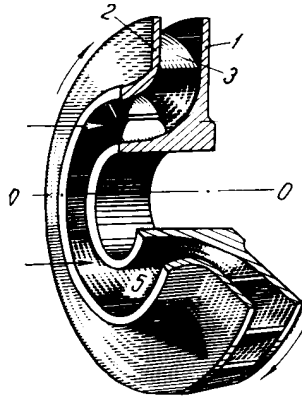
Posmatra se promena momenta količine kretanja fluidne struje, \mathbf{T} , u odnosu na obrtnu tačku, O , pri prolasku fluida kroz kontrolnu zapreminu, \mathcal{V} ,

$$\mathbf{T} = \int_{\mathcal{V}} \frac{D}{Dt} (\rho \mathbf{r} \times \mathbf{V}) dV, \quad (8.1)$$

$\mathbf{r} \times \mathbf{V}$ je vektorski proizvod vektora položaja bilo koje tačke u oblasti strujanja u odnosu na tačku O , i vektora brzine, \mathbf{V} , u toj tački. Iz Mehanike fluida je poznato da je brzina promene momenta količine kretanja konačne mase jednaka zbiru momenata (u odnosu na tačku O) svih sila koje deluju na fluid u kontrolnoj zapremini. Sile koje deluju na fluid prenose se lopaticama radnog kola. Veličina \mathbf{T} je vektor u pravcu osovine vratila i upravna je na ravan koju čine vektori položaja i brzine. Po dimenziji odgovara momentu sile, pa se koristi naziv hidraulički obrtni moment. Promenu momenta količine kretanja u kontrolnoj zapremini omogućava obrtni moment motora pumpe, koji se prenosi preko vratila pumpe i koji je jednak hidrauličkom momentu uvećanom za momente sila trenja u fluidu, ležajevima i zaptivačima.

Vrednost integrala predstavlja meru dejstva radnog kola na fluidnu struju pa se može zaključiti sledeće: ukoliko je integral jednak nuli, ne obavlja se nikakav rad i nema razmene energije u kontrolnoj zapremini. Ukoliko je integral veći od nule, fluidna struja je obogaćena energijom radom lopatica obrtnog kola, i u pitanju je pumpa. U obrnutom slučaju, ako je integral negativan, energija fluidne struje se smanjuje i radi se o turbini.

Na slici (8.2) prikazan je izgled radnog kola, a na slici (8.3) radno kolo radijalne pumpe sa osnovnim elementima i karakterističnim preseccima. Na slici (8.3) brojem 1 označen je zadnji disk, a brojem 2 prednji disk. U delu kola u kom se vrši razmena energije izmedju konture i fluidne struje nalaze se lopatice (označeno sa 3). Vratilo je označeno sa 4, 5 predstavlja usisni deo kola, a 6 je spirala, kod koje se povećava presek da bi se obezbedila ravnomerna brzina na izlazu iz radnog kola. U teorijskim razmatranjima pretpostavlja se da fluid idealno prati površinu lopatica, da nema trenja, da je broj lopatica veliki i da su brzine ravnomerne po celom obimu kola, po površinama A_1 i A_2 .



Slika 8.2: Radno kolo radijalne pumpe

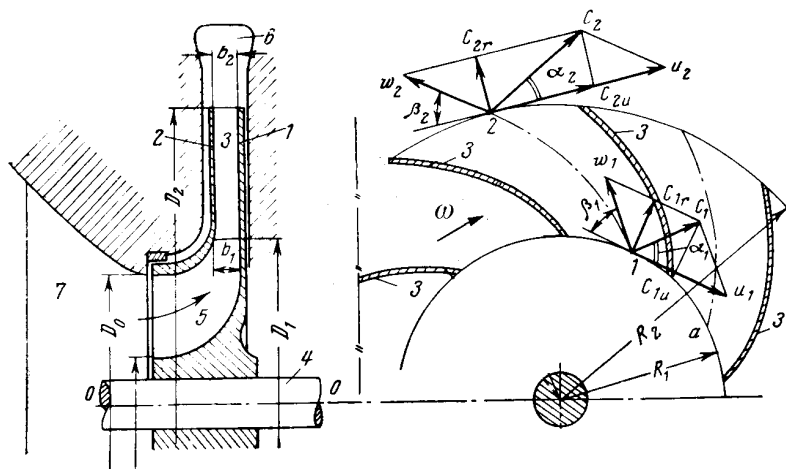
Ako se usvoji tenzorsko obeležavanje, vektorski proizvod brzine, V_i , i vektora položaja, r_i , može se prikazati kao,

$$T_k = \int_{\mathcal{V}} \frac{D}{Dt} (\varepsilon_{ijk} r_i V_j) dV, \quad (8.2)$$

gde indeks k predstavlja pravac vektora \mathbf{T} . U cilindričnom koordinatnom sistemu, gde je $i = R$ i $j = \theta$, izraz za promenu momenta količine kretanja u pravcu $k = z$ glasi

$$T_z = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho R V_\theta dV + \int_A \rho R V_\theta n_i V_i dA, \quad (8.3)$$

gde je materijalni izvod razdvojen na lokalnu i konvektivnu komponentu, a konvektivna komponenta izražena površinskim integralom. Za ustaljeno



Slika 8.3: Dijagram vektora brzina

strujanje prvi član je jednak nuli. Kako se uz to, ortovi normala površina A_1 i A_2 poklapaju sa koordinatnim pravcem r , može se napisati

$$T_z = \int_{A_2} \rho R V_\theta V_r dA_2 - \int_{A_1} \rho R V_\theta V_r dA_1 . \quad (8.4)$$

Dalje, ako su ρ , V_θ i V_r konstantni po površinama A_1 i A_2 , sledi

$$T_z = \rho Q [(RV_\theta)_2 - (RV_\theta)_1] , \quad (8.5)$$

jer je za obe površine, proticaj mase, $\rho Q = \int_A \rho V_r dA$.

Množenjem promene momenta količine kretanja sa ugaonom brzinom obrtanja radnog kola, ω , dobija se snaga radnog kola sa beskonačnim brojem lopatica

$$S_{th,\infty} = T_z \omega = \rho Q (u_2 V_{\theta 2} - u_1 V_{\theta 1}) , \quad (8.6)$$

gde su, u_1 i u_2 , obimske brzine na rastojanjima, R_1 i R_2 , odnosno, $u_1 = R_1 \omega$, $u_2 = R_2 \omega$.

Deljenjem sa ρQ (proticaj mase) dobija se jedinični rad kola sa beskonačnim brojem lopatica

$$Y_{th,\infty} = (u_2 V_{\theta 2} - u_1 V_{\theta 1}) , \quad (8.7)$$

gde indeks sadrži pretpostavke pod kojima to važi: *th* - teorijski, odnosno, strujanje bez gubitaka energije i ∞ - beskonačan broj lopatica. Jednačina (8.7) se zove Ojlerova jednačina za turbomašine.

U teoriji turbomašina uobičajen je određen način obeležavanja brzina, koji će se i ovde koristiti do kraja ove sekcije o teorijskim osnovama. Kao što je već rečeno, obimska brzina kola je u , relativna brzina fluida u odnosu na kolo je w , a apsolutna brzina fluida je c (umesto V). Obimske komponente apsolutne brzine su c_{1u} i c_{2u} , a meridijanske komponente, c_{1m} i c_{2m} .

Jedinični strujni rad je veličina preporučena SI sistemom jedinica, jer objašnjava šta se stvarno dešava u hidrauličkim mašinama, ali na žalost, nije u široj upotrebi, barem ne među gradjevincima. Koristi se veličina

$$H'_P = \frac{Y_{th,\infty}}{g} = \frac{u_2 V_{\theta 2} - u_1 V_{\theta 1}}{g} = \frac{u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u}}{g}, \quad (8.8)$$

koja se zove napor kola, i koja ima dimenziju dužine (visine).

Kod aksijalnih pumpi, na rastojanju r od ose kola, obimske brzine su iste, $u_2 = u_1 = u$, jer su površine (1) i (2) iste. Napor je jednak

$$H'_P = \frac{\omega}{g} r (c_{2u} - c_{1u}) \quad (8.9)$$

Brzine c_{1u} i c_{2u} menjaju se u zavisnosti od r , ali tako da $r(c_{2u} - c_{1u})$ ostaje konstantno.

Kod konačnog broja lopatica raspored brzina po izlaznoj površini nije ravnomeran, a ni sve strujnice nisu identične. Stvarni napor, Y_{th} , je manji od $Y_{th,\infty}$. Njihov odnos predstavlja koeficijent umanjenja napora kola (Protić, Nedeljković, 1992)

$$\epsilon = \frac{Y_{th}}{Y_{th,\infty}} \quad (8.10)$$

a u upotrebi je i termin stepen korisnosti lopatica. Drugi termin se ne preporučuje jer tu još uvek nije uključen gubitak energije (Stepanoff, 1957). Veličina Y_{th} je napor kola sa konačnim brojem lopatica, a veličina

$$S_{kn} = \rho Q Y_{th} \quad (8.11)$$

je neto snaga kola.

Ako se upoređuju energije u presecima neposredno uzvodno i nizvodno od pumpe, može se konstatovati priraštaj energije u jedinici vremena, (tj. snaga)

$$S_H = \rho g Q H_P, \quad (8.12)$$

gde je, $H_P = E_{niz} - E_{uzv}$, visina dizanja pumpe i predstavlja promenu energije fluidne struje po jedinici težine.

Odnos priraštaja energije fluidne struje u jedinici vremena, $\rho g Q H_P$, i neto snage kola, S_{kn} , je hidraulički stepen korisnosti pumpe

$$\eta_h = \frac{\rho g Q H_P}{S_{kn}} = \frac{Y}{Y_{th}} \quad (8.13)$$

Uobičajeno je da se kao karakteristika pumpe daje upravo hidraulički stepen korisnosti, η_h .

Snaga pogonskog motora pumpe treba da bude dovoljna da ostvari promenu momenta količine kretanja, T_z , pri brzini obrtanja, ω , kao i da nadoknadi sve gubitke koji se javljaju u prenosu energije od pogonskog motora do fluidne struje.

Ako je ΔS , snaga koja se troši na savladjivanje otpora trenja u ležajevima, zaptivačima itd., mehanički stepen korisnosti jednak je

$$\eta_m = \frac{S_P - \Delta S}{S_P} \quad (8.14)$$

Jedan deo vode beži iz oblasti visokog pritiska u oblast niskog pritiska kroz procepe i zaptivače. Ako je ta količina jednaka ΔQ , zapreminski stepen korisnosti jednak je

$$\eta_v = \frac{Q}{Q + \Delta Q} \quad (8.15)$$

Mehanički i zapreminski stepeni korisnosti dosta zavise od održavanja pumpe i za njih proizvođač pumpe ne preuzima obavezu. Kod dobro održavanih pumpi mogu se očekivati sledeće vrednosti: $\eta_m = 0.95 - 0.98$ i $\eta_v = 0.90 - 0.95$ (Radojković i dr., 1989).

Ukupni stepen korisnosti je jednak

$$\eta_P = \eta_h \eta_m \eta_v \quad (8.16)$$

i uvek je manji od 1.

8.2.2 Koeficijenti pumpe

Strujanje unutar hidrauličkih mašina izuzetno je složeno i do sada nije bilo teorijsko-analitičkih, niti numeričko-simulacionih metoda, koje bi sa prihvatljivom pouzdanošću dale veze između osnovnih veličina pumpe u svim oblastima rada. Zbog toga, kod proučavanja turbomašina veliku ulogu imaju

merjenja na hidrauličkom modelu ili prototipu i zakoni sličnosti kojima se uspostavlja veza između veličina na modelu i na prototipu. Ovde se radi o inercijalnoj sličnosti (Hajdin, 1993) i za korišćenje tih rezultata u projektovanju, normalno se zahteva geometrijska sličnost, kao i slična strujna slika, odnosno, sličnost trouglova brzina¹ na ulazu i izlazu iz radnog kola, ili kinematička sličnost. Time se ostvaruje i geometrijska sličnost strujnica. Dve mašine kod kojih su ti uslovi zadovoljeni, zovu se homologe mašine. Sličnost za viskozne i inercijalne uticaje zahteva jednakost Rejnoldsovih brojeva što se ne može postići sa istim fluidom.

Teorijske osnove strujanja u turbomašinama, izražene preko osrednjenih veličina, poznate su još iz radova Leonarda Ojlera (1707-1783). Moglo bi se pomisliti da je radom O.Rejnoldsa sa kraja prošlog veka i savremenim računarima kojima se danas raspolaže, stvorena osnova za detaljno izučavanje strujnog polja u svim režimima rada turbomašina. Međutim, to je još uvek daleko, a stvarne karakteristike se mogu odrediti samo merenjima, bilo u laboratoriji, bilo na mašinama u pogonu. Rezultati merjenja se uopštavaju prevođenjem na bezdimenzionalni oblik i kao takvi prenose se na slične mašine.

Izdvajaju se sledeće, međusobno nezavisne, veličine koje opisuju ponašanje pumpe:

- H_P – napor pumpe, odnosno, priraštaj mehaničke energije fluidne struje, po jedinici težine,
- Q – proticaj,
- ω – ugaona brzina obrtanja pumpe,
- T_z – hidraulički obrtni moment
- S_{MP} – snaga koju pumpa dobija od pogonskog motora

Umesto ugaone brzine obrtanja, ω , koja se izražava u [rad/s], koristi se i brzina obrtanja, N u [ob/min], koja se dobija iz relacije, $\omega = N 2\pi/60$. Takodje, umesto snage motora koristi se obrtni moment, $T_M = S/\omega$, a u upotrebi je i stepen korisnosti (koeficijent korisnog dejstva), koji je dat izrazom (8.16).

Hidraulički obrtni moment pumpe se u normalnim radnim uslovima ne daje posebno jer se podrazumeva da on zajedno sa otporima obrtanja uravnotežuje

¹ Ovo je uobičajen termin u mašinstvu za dijagram vektora brzina, koji zatvaraju obimska brzina kola, u , relativna brzina fluida u odnosu na kolo, c , i apsolutna brzina fluida, w .

obrotni moment motora. Međutim, u prelaznim režimima te dve veličine treba posmatrati odvojeno, naročito onda kada je ispad ili start pumpe uzrok prelaznih režima.

Kod ispada pumpe iz pogona obrtni moment motora brzo pada na nulu, ali ne i hidraulički moment, koji zavisi od proticaja, brzine obrtanja, kao i opreme na cevovodu.

Zbog potrebe da se pogonski elektromotor sačuva od preopterećenja kod starta pumpe postoji nekoliko načina da se snaga motora dovede do nominalne. Način promene broja obrtaja pumpe utiče na prelazne režime pa treba učiniti dodatni napor da se taj manevar odgovarajuće prikaže i u matematičkom modelu. U analizama hidrauličkog udara, promena snage motora obično se uzima kao poznata veličina.

Na osnovu sličnosti trougla brzina na ulazu i izlazu iz radnog kola (slika 8.3) definišu se uslovi sličnosti strujnica preko pogodno izabranih bezdimenzionalnih veličina koje će biti iste i na modelu i na prototipu. Sličnost strujnog polja u geometrijski sličnim oblastima strujanja omogućava prenos merenjima dobijenih podataka sa jedne pumpe na mnoštvo drugih. Ako je postignuta sličnost strujanja mogu se definisati bezdimenzionalne veličine, koje se zovu koeficijenti (ili značice) pumpe i koji su isti i na modelu i na prototipu.

Ugao lopatice, β , koji određuje pravac vektora relativne brzine w , je isti za sve mašine, ako je zadovoljena geometrijska sličnost. Uslov jednakosti ugla α , koji zaklapa apsolutna brzina c sa obimskom, u , može se izraziti kao bezdimenzionalna kombinacija nekoliko standardnih veličina, kao što su, N , broj obrtaja kola, Q , proticaj i D , prečnik kola (ili neka druga karakteristična dužina), od kojih su N i D osnovne. Kao rezultat takvih razmatranja dobija se koeficijent proticaja

$$\phi = \frac{Q}{Au} = \frac{Q}{K_\phi D^3 N} \quad , \quad (8.17)$$

gde je A karakteristična protočna površina, proporcionalna D^2 , a u obimska brzina radnog kola, proporcionalna DN . K_ϕ je bezdimenzionalna konstanta.

Koeficijent napora se definiše kao odnos napora i karakteristične brzinske visine

$$\psi = \frac{H_P}{u^2/2g} = \frac{H_P}{K_\psi (ND)^2} \quad . \quad (8.18)$$

K_ψ je dimenzionalna konstanta pa kod preračunavanja treba voditi računa o

jedinicama.

Pored ova dva koeficijenta u upotrebi su i drugi do kojih se dolazi direktno dimenzionalnom analizom, ili su kombinacija već izvedenih.

Koeficijent snage može se dobiti kao kombinacija izraza (8.17) i (8.18)

$$\lambda = \frac{\phi\psi}{\eta} = \frac{S}{N^3 D^5} . \quad (8.19)$$

U nastavku će se za bezdimenzionalno izražavanje hidrauličkog momenta koristiti izraz,

$$C_T = \frac{TN}{QH_P} , \quad (8.20)$$

koji predstavlja neku vrstu koeficijenta hidrauličkog momenta.

Ovi koeficijenti značajni su za prenos rezultata merenja sa jedne mašine na drugu, ali ne i za razvrstavanje pumpi po tipovima. Može se desiti da dve potpuno različite pumpe imaju iste koeficijente napora i slično.

Pumpe sa lopaticama razvrstavaju se u tri grupe preko parametra brzohodosti, odnosno specifične brzine, N_S ,

$$N_S = \frac{N\sqrt{Q}}{H_P^{3/4}} , \quad (8.21)$$

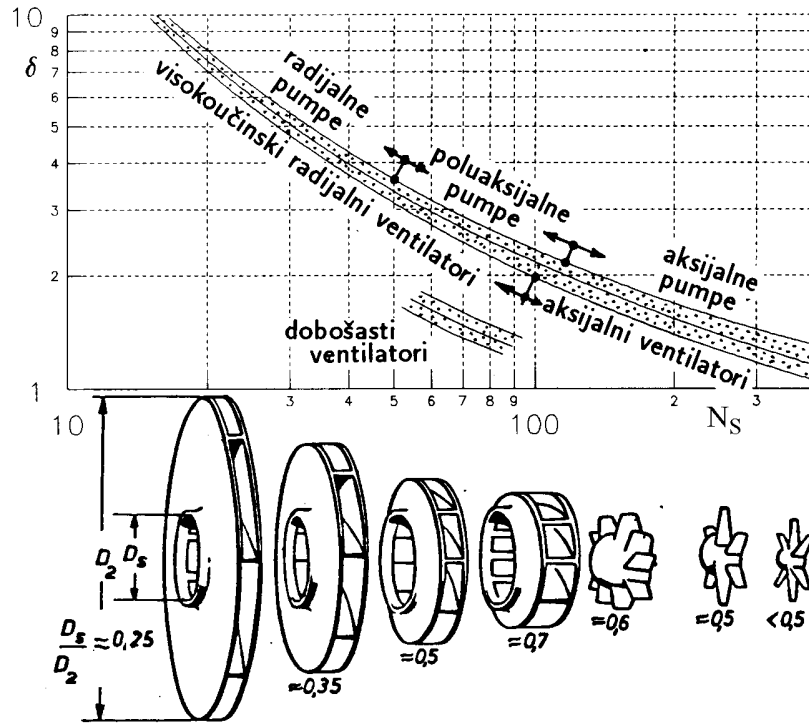
i koeficijenta prečnika

$$\delta_D = 1.865D \frac{H_P^{1/4}}{\sqrt{Q}} . \quad (8.22)$$

Umesto izraza (8.21) sve više se koristi ekvivalentna bezdimenzionalna veličina (takodje, saglasna SI sistemu jedinica), koeficijent brzine obrtanja σ

$$\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{30} \frac{N\sqrt{Q}}{(2g)^{3/4} H_P^{3/4}} = \frac{N_S}{157.8} . \quad (8.23)$$

Na slici (8.4), preuzetaj iz literature (Protić i Nedeljković, 1992), nanete su vrednosti specifične brzine i koeficijenta prečnika, za optimalne radne tačke, velikog broja pumpi sa lopaticama. Radijalne pumpe imaju koeficijent broja obrtaja manji od 50 (80), a koeficijent prečnika veći od 3.5, dok aksijalne pumpe imaju koeficijent broja obrtaja veći od 120 (160), a koeficijent prečnika manji od 2. Vrednosti u zagradama su preporučene od strane drugih autora (Wylie, Streeter, 1978; Stephenson, 1981). Treba napomenuti



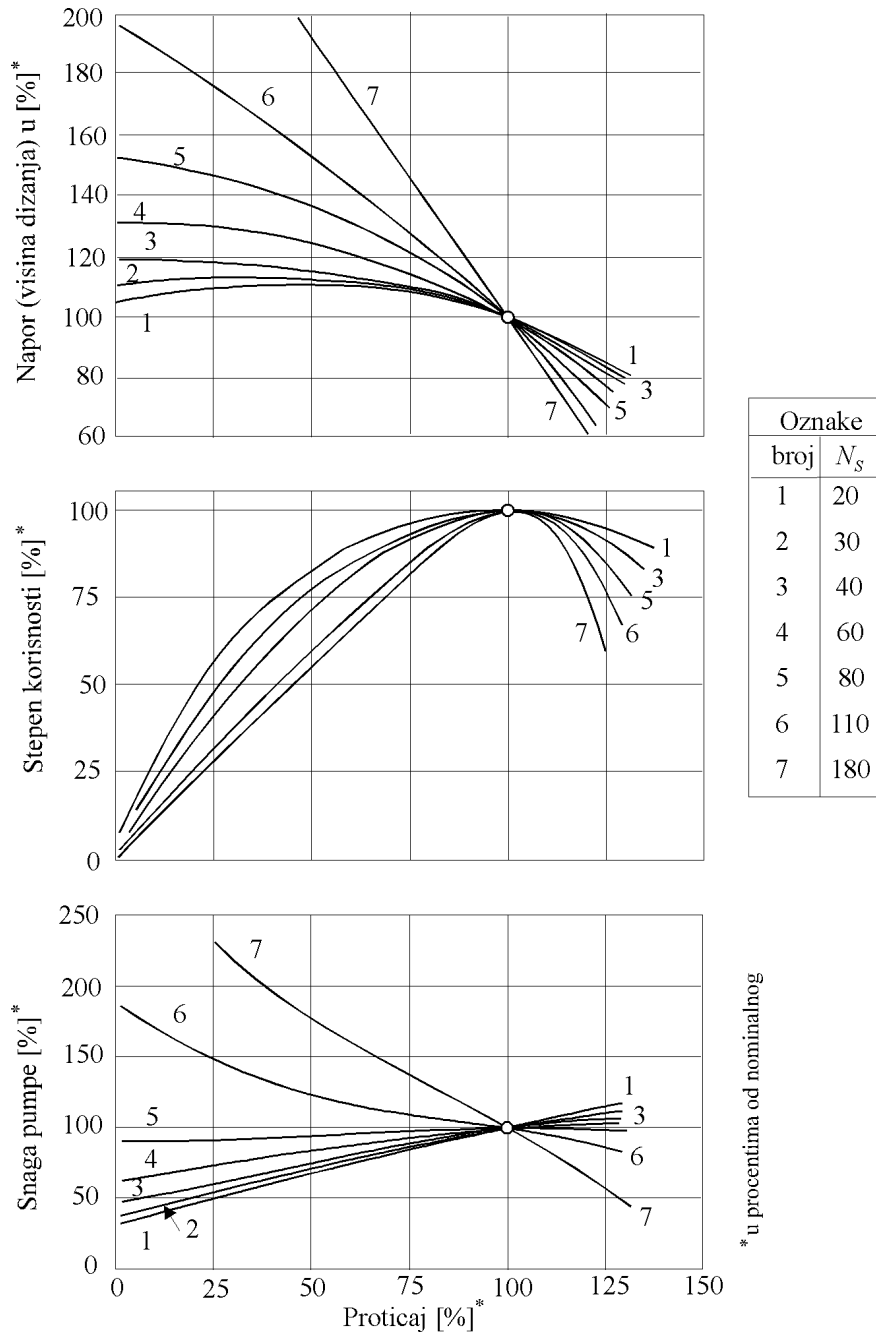
Slika 8.4: Kordijejev dijagram za određivanje tipa pumpe (i ventilatora)

da su ovo dimenzionalni parametri i da je potrebno voditi računa o dimenzijama veličina koje se koriste (prečnik D je u metrima, proticaj Q u m^3/s , broj obrtaja N u ob/min , visina dizanja pumpe H_P u m).

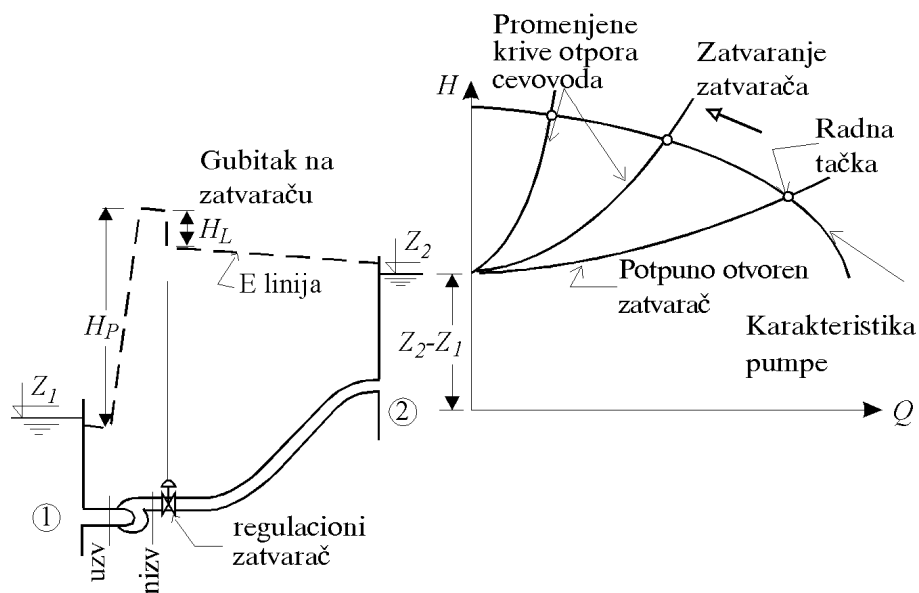
Sa praktične strane, ove pumpe se razlikuju u sledećem: Kod pumpi iste snage, jedna centrifugalna pumpa će ostvariti relativno veliku visinu dizanja uz mali proticaj, a aksijalna pumpa, relativno veliki proticaj uz malu visinu dizanja.

Karakteristike pojedinačnih pumpi daju se najčešće grafički (u funkciji zapreminskog proticaja fluida Q). Na slici (8.5), date su bezdimenzionalne karakteristike za ceo raspon specifičnih brzina osnovnih tipova pumpi sa lopaticama. Krive na dijagramu predstavljaju, H_P , priraštaj energije po jedinici težine (takodje, visina dizanja, odnosno, napor pumpe), η_P , stepen korisnosti (koeficijent korisnog dejstva), i S_P , snagu koju pumpa dobija od pogonskog motora.

Dijagrami na slici (8.5) mogu poslužiti za uporedjenje karateristika pumpi



Slika 8.5: Radne karakteristike pumpe



Slika 8.6: Karakteristike pumpe i cevovoda

različitih brzohodosti i za ukazivanje na oblasti njihove primene i specifičnosti u njihovom radu. Pumpe veće brzohodosti (veće N_S), kao što je pumpa označena brojem 7, pogodne su za rad u sistemima gde nema velikih varijacija u proticaju. Iako je zona visokog stepena korisnosti relativno uska, zahvaljujući strmoj $Q - H$ liniji, neizvesnosti u karakteristikama cevovoda nemaju mnogo uticaja.

Pumpe manje brzohodosti, kao što su pumpe 1, 2 i 3, imaju širu zonu visokog stepena korisnosti pa su bolje za regulaciju. Dijagram snage pokazuje da postupak starta pumpe ne može biti isti za sve prikazane pumpe. Pumpe manje brzohodosti uključuju se sa zatvorenim zatvaračem na potisu (proticaj $Q = 0$), dok to kod pumpi 6 i 7 nije preporučljivo jer bi angažovana snaga bila jako velika.

8.3 Izbor pumpi

Odredjivanje tipa, karakteristika i položaja pumpi (kao i njihovog broja) zavisi od uslova rada u sistemu. Najjednostavnije je prikazati pumpu u konfiguraciji kao na slici (8.6): usisni rezervoar - pumpa - regulacioni zatvarač - potisni cevovod - nizvodni rezervoar.

Izbor odgovarajućih pumpi i projektovanje cevovoda medjusobno su povezani. Pored visinske razlike nivoa vode u rezervoarima pumpa mora da savlada i gubitke energije u cevovodu, koji zavise od brzine, odnosno, od prečnika cevovoda. Pri istom proticaju, u cevovodu većeg prečnika, koji je skuplji, manje su brzine, manji su gubici energije, manja je opasnost od hidrauličkog udara itd. Obrnuto, kod cevovoda manjeg prečnika potrebna je pumpa sa većim naporom, a možda i ozbiljnija zaštita od hidrauličkog udara.

Radna tačka pumpe nalazi se u preseku karakteristike pumpe ($Q - H$ krive) i krive otpora sistema (slika 8.6). Razlika nivoa, $(Z_2 - Z_1)$, zove se geodetska, ili statička, visina dizanja. Napor pumpe, H_P , ili dinamička visina dizanja, veći je od $(Z_2 - Z_1)$ za iznos gubitaka energije u cevovodu. Ukoliko pumpa treba da radi sa konstantnim proticajem u uslovima gde se uzvodni i nizvodni pritisci ne menjaju, lako je izabrati odgovarajuću pumpu tako da radna tačka bude u oblasti najvišeg stepena korisnosti. U praksi to obično nije slučaj.

Nivoi u rezervoarima nisu konstantni, zahtevi za proticajem se menjaju, pumpe treba da rade u vrlo složenim distribucionim mrežama čije karakteristike se menjaju tokom radnog veka pumpi itd.

Veoma je teško karakteristiku realnog sistema prikazati samo jednom linijom kao krivom otpora sistema. Imajući to u vidu, izbor pumpi u složenim distribucionim sistemima zasniva se na numeričkim simulacijama kontinualnog rada sistema gde se rad pumpe simulira za sve očekivane režime rada. Za pumpu se, umesto geodetske visine dizanja, definiše referentna pijezometarska kota u nekoj tački mreže (to može biti neki rezervoar, ali i ne mora), a poredjenjem zahtevanog povećanja energije kod pumpe, da bi se nadoknadili gubici energije od pumpe do referentne tačke, i ostvarenog povećanja energije, proverava da li je izabrana odgovarajuća pumpa.

Javlja se potreba za radom sistema u širokom opsegu proticaja i visina dizanja. Neophodno je da se uvede regulacija rada sistema, odnosno, potrebno je na nekakav način dovesti do poklapanja karakteristike pumpe i krive otpora cevovoda. Jedan od najčešćih (ujedno i najneekonomičniji) načina prikazan je na slici (8.6). Zatvaranjem regulacionog zatvarača nizvodno od pumpe, menja se kriva otpora cevovoda, a razlika između nove radne tačke i krive otpora pri potpuno otvorenom zatvaraču predstavlja gubitak energije po jedinici težine. Izgubljena energija u realnim pokazateljima (recimo u [kWh]) dobija se množenjem te visine sa $(\rho g Q / \eta)$ i vremenom rada pumpe. Treba obratiti pažnju na to da stepen korisnosti, η , može značajno da varira u

radnoj oblasti pumpe.

Pored pumpi sa jednim radnim kolom (jednostepenim), rade se i kombinacije više radnih kola u jednom bloku. Ako su radna kola serijski vezana, radi se o dvostepenim, tro- i višestepenim pumpama. Ako su dva radna kola paralelno vezana, radi se o dvostrujnim pumpama.

8.3.1 Spregnuti rad više pumpi - crpne stanice

Zbog nemogućnosti da se jednom pumpom ekonomično pokriju sve neravnomernosti zahtevanog režima rada, više pumpi, istih ili različitih karakteristika, kombinuju se i čine crpnu stanicu. Za razliku od povezivanja više radnih kola u jedan blok, kada postoji samo jedan set karakteristika pumpe, za crpnu stanicu postoji više krivih u zavisnosti od toga koje su pumpe u pogonu. Glavna regulacija proticaja vrši se uključivanjem i isključivanjem pojedinih pumpi, dok se fino podešavanje može vršiti regulacionim zatvaračima ili pumpama sa promenljivim brojem obrtaja.

Paralelno vezane pumpe koriste se u sistemima sa relativno malim gubicima energije na trenje, a značajnim geodetskim razlikama. Njihova ekonomična primena zahteva da pri povećanju proticaja ne dodje do značajnog pomeranja po karakteristici pumpe i izlaska iz zone visokog stepena korisnosti. Na slici (8.7), dat je primer 4 paralelno vezane pumpe sa njihovim karakteristikama (slika 8.8). Kao prvo, može se primetiti da četiri pumpe u radu ne daju četiri puta veći proticaj od jedne. Uključivanjem dodatnih pumpi radna tačka jedne pumpe pomera se ka manjim proticajima. Na dijagramu (slika 8.8) obeležene su oblasti rada pojedinih pumpi: a - radna oblast, uslovno rečeno, prve pumpe, tj., one pumpe koja se prva uključi i poslednja isključi, b - druge, c - treće i d - radna tačka četvrte pumpe. Na istom dijagramu mogu se videti i angažovane snage i odgovarajući stepeni korisnosti. Prva pumpa, kada radi sama, dolazi u oblast nižeg stepena korisnosti a kao što će se videti u nastavku, postoji opasnost od kavitacije zbog povećanog *NPSH*. Verovatno je potrebno nekakvo prigušenje regulacionim zatvaračem da bi se popravili radni uslovi pumpe (tanke isprekidane linije).

Serijski vezane pumpe koriste se kod dugačkih cevovoda, kod kojih su značajni gubici energije. Energija se dodaje fluidu da bi se nadoknadili gubici energije usled trenja, koji su proporcionalni kvadratu proticaja. Ekvivalentna radna karakteristika dobija se sabiranjem ordinata napora pumpe za odgovarajuće proticaje (slika 8.9). Ovde je samo po sebi jasno da proticaj

dve pumpe u radu nije dvostruko veći od proticaja koji daje jedna pumpa u radu. Ukoliko bi se gubici energije u sistemu povećali dva puta, dve redno vezane pumpe imale bi dvostruko veću visinu dizanja pri istom proticaju.

Najefikasniji način regulacije proticaja u crpnoj stanici je menjanjem brzine obrtanja pumpi o čemu će biti reči kasnije. Ovakve pumpe su skuplje od standardnih, tako da se u crpnoj stanici obično ugradjuje samo jedna pumpa sa promenljivim brojem obrtaja.

Sve ovo dodatno komplikuje matematički opis pumpe, odnosno, crpne stanice u matematičkom modelu hidrauličkog udara.

8.3.2 Ograničenja sa usisne strane - kavitacija

Važan podatak za ugradjivanje pumpe je minimalni pritisak na usisnoj strani pumpe, koji ne dozvoljava pojavu kavitacije, odnosno, lokalno smanjenje pritiska do pritiska vodene pare, p_{vp} . Uticaj kavitacije na funkcionisanje pumpe je dvojak. Kao prvo, može doći do erozije površina lopatica i ostalih delova pumpe, smanjenja koeficijenta korisnog dejstva i mehaničkog oštećenja pumpi, a kao drugo, kod intenzivne kavitacije dolazi do značajnog smanjenja kapaciteta zbog velike količine vodene pare. Pumpa koja radi u kavitacionoj zoni može biti uzrok oscilatornih poremećaja, koji mogu dovesti do neprigušenih oscilacija u cevovodu. Osim toga, javlja se i buka visokog intenziteta.

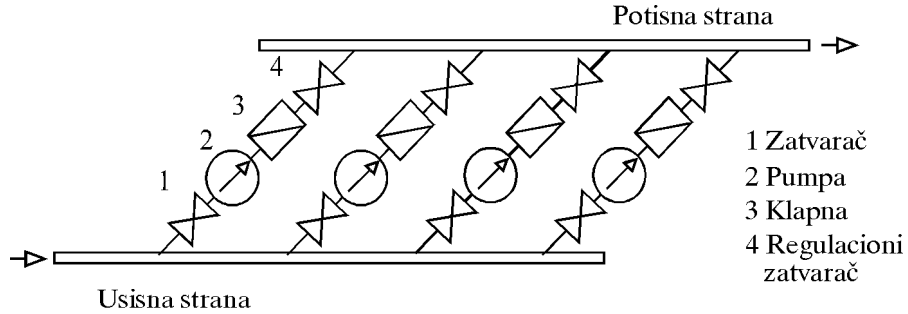
Visina apsolutnog pritiska na usisnoj strani pumpe, koja ne dozvoljava pojavu kavitacije zove se *zahtevana usisna visina pumpe*, $NPSH_R$ (*Net Positive Suction Head*). Neophodno je obezbediti da *raspoloživa usisna visina*, $NPSH_A$ ², koja zavisi od tehničkog rešenja sistema u koji se pumpa ugradjuje, bude veća od zahtevane, odnosno

$$NPSH_A > NPSH_R .$$

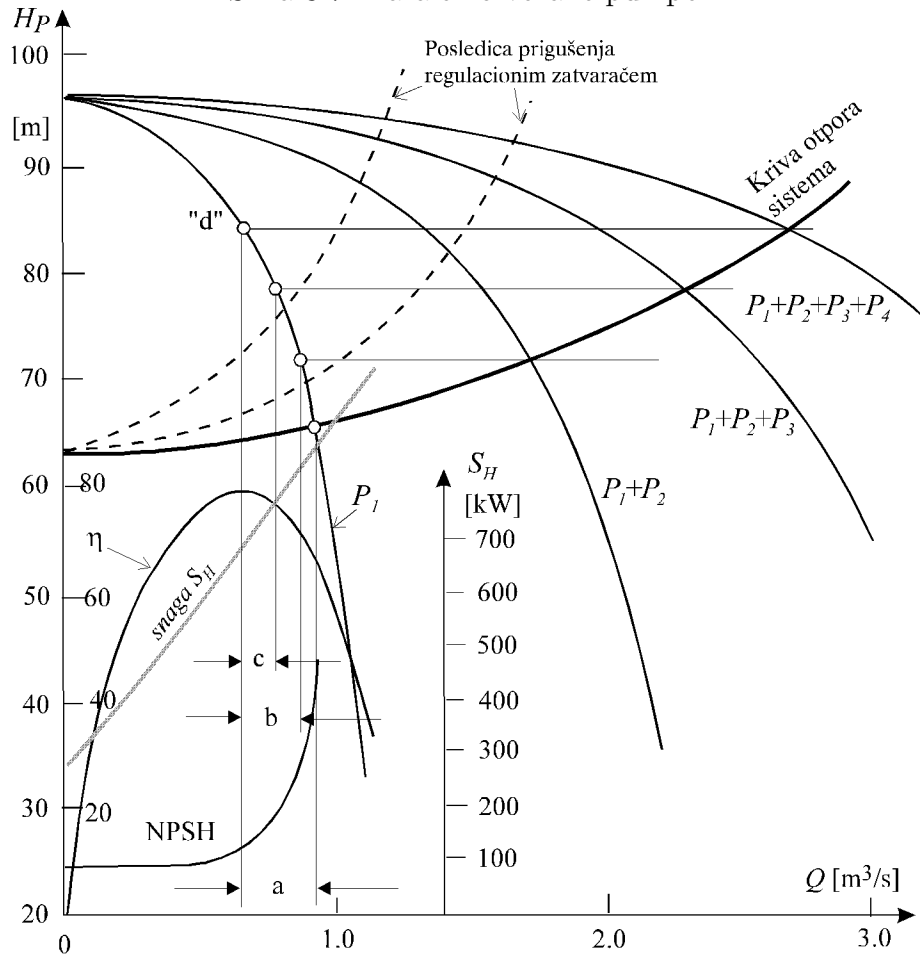
Na slici (8.10) naznačene su, kota usisa pumpe, Z_{us} , i piježometarska kota u tom preseku, Π_{us} , na osnovu čega se može sračunati apsolutni pritisak u tom preseku, p_{us} . Raspoloživa usisna visina pumpe, $NPSH_A$, jednaka je

$$NPSH_A = \frac{p_{us} - p_{vp}}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} + (\Pi_{us} - Z_{us}) - \frac{p_{vp}}{\rho g} . \quad (8.24)$$

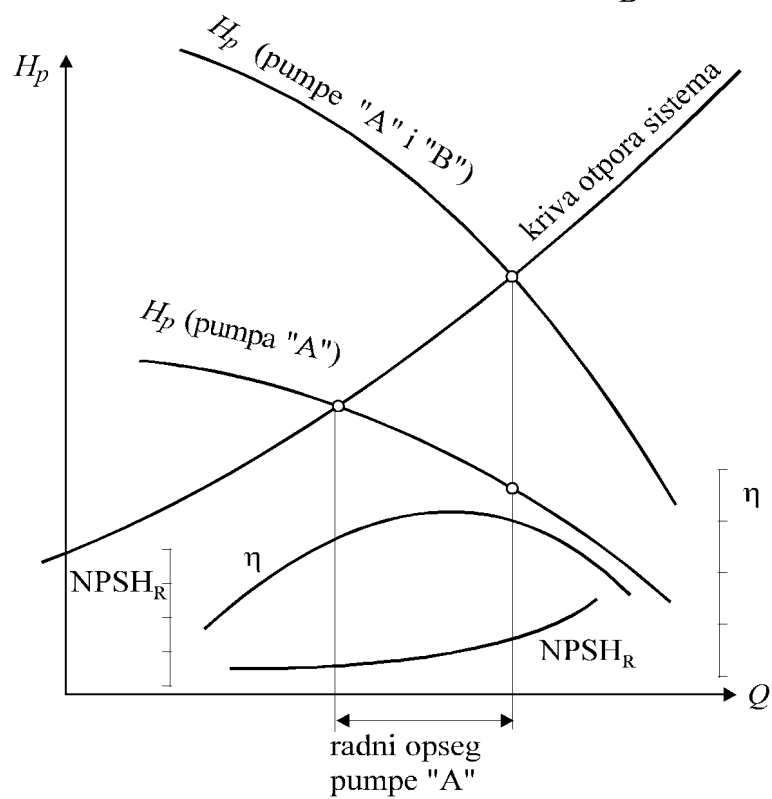
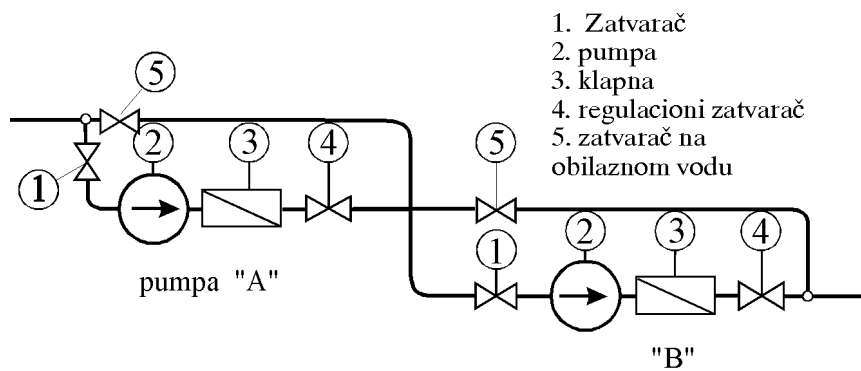
² Indeksi dolaze od skraćenica engleskih reči R - *Required* (zahtevano) i A - *Available* (raspoloživo)



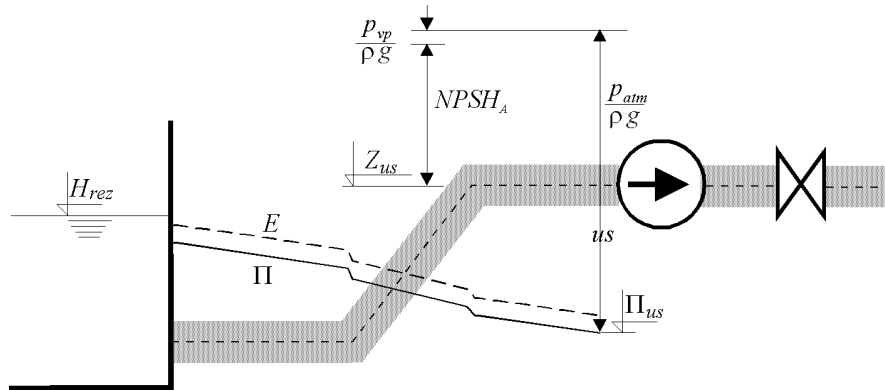
Slika 8.7: Paralelno vezane pumpe



Slika 8.8: Pojedinačne i zbirne karakteristike paralelno vezanih pumpi



Slika 8.9: Serijski vezane pumpe



Slika 8.10: Usisna strana pumpe

Zahtevana usisna visina pumpe, $NPSH_R$, zavisi od proticaja kroz pumpu, pa se i ta zavisnost, prikazuje grafički uz (Q, H_P) i ostale linije (slike 8.8 i 8.9).

U prelaznim režimima, pad pijezometarske kote na usisnoj strani ispod $Z_{us} + NPSH_R - (p_{atm} - p_{vp})/\rho g$, je indikacija da je moguć prekid fluidne struje, odnosno, da će se javiti problemi u funkcionisanju pumpe.

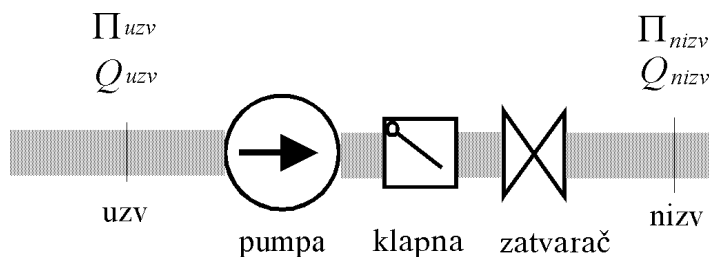
8.4 Pumpe kao granični uslovi

U prelaznim režimima menjaju se karakteristike sistema i uslovi rada pumpi, čemu se pumpe prilagodjavaju na njima svojstven način. Često je pumpa uzrok prelaznih režima (Ivetić, 1994). Svako uključenje ili isključenje jedne ili više pumpi u crpnoj stanici izaziva promenu proticaja i pritiska, koja se kao poremećaj prostire kroz sistem. Sve to mora biti predstavljeno u matematičkom modelu, kao odgovarajući granični uslov za pumpu.

Postoji nekoliko nivoa složenosti prikaza pumpi kao graničnih uslova u matematičkim modelima hidrauličkog udara u cevovodima. U preliminarnim analizama hidrauličkog udara u cevovodima i mrežama sa pumpama u pogonu, karakteristike pumpe se mogu aproksimirati parabolom u oblasti radnih proticaja

$$H_P = H_0 + AQ^2 + BQ, \quad (8.25)$$

Ovaj izraz se koristi dosta uspešno u matematičkim modelima ustaljenog i kvaziustaljenog tečenja u cevima, dok mu je primena u modelima hidrauličkog udara dosta ograničena.



Slika 8.11: Pumpe

Na krajevima cevi, uzvodno i nizvodno od pumpe, za koje se pumpa opisuje kao granični uslov, nepoznati su proticaji i pijeziometarske kote (slika 8.11). Iz uslova kontinuiteta i pretpostavke o malom rastojanju preseka u_{zv} i n_{izv} , proticaji, Q_{uzv} i Q_{nizv} se izjednačuju i nadalje vode kao Q . Za određivanje nepoznatih Π_{uzv} , Π_{nizv} i Q , koriste se jednačine pozitivne i negativne karakteristike i jednačina (8.25), gde je $H_P = \Pi_{nizv} - \Pi_{uzv} + (V_{nizv}^2 - V_{uzv}^2)/2g$.³

Ostale veličine koje karakterišu rad pumpe ne uzimaju se u obzir jer se implicitno pretpostavlja sledeće:

- broj obrtaja pumpe ne menja se tokom prelaznih režima, i
- motor radi neprekidno, a snaga koju daje pumpi, stalno je uravnotežena hidrauličkim momentom pumpe i otporima u pumpi.

Kod crpnih stanica sa istim pumpama može se uvesti pojam ekvivalentne pumpe. Karakteristike ekvivalentnih pumpi za crpne stanice na slikama (8.7) i (8.9), mogu se dobiti jednostavno. Ako bi se radilo o tri paralelno vezane iste pumpe, dobilo bi se

$$H_{eq} = H_0 + \frac{A_1}{9}Q^2 + \frac{B_1}{3}Q ,$$

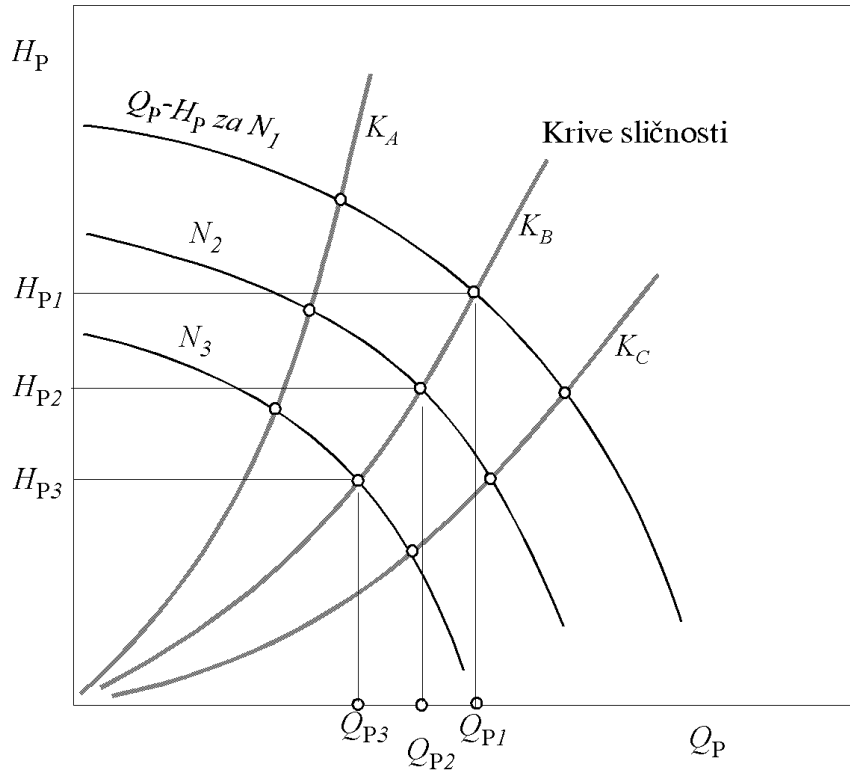
gde parametri parabole, H_0 , A_1 i B_1 , važe za jednu pumpu.

Za tri iste, serijski vezane pumpe, dobilo bi se

$$H_{eq} = 3 \cdot (H_0 + A_1Q^2 + B_1Q) .$$

Za pumpu sa promenljivom brzinom obrtanja (slika 8.12) veza izmedju karakteristika za dve brzine obrtanja (u ustaljenom tečenju) uspostavlja se uz

³ Brzinske visine se kod modela hidrauličkog udara obično zanemaruju.



Slika 8.12: Pumpe sa promenljivim brojem obrtaja

pomoć relacija, $Q_1 = Q_2 \frac{N_1}{N_2}$ i $H_1 = H_2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$, do kojih će se doći u nastavku.

$$H_2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = H_0 + A Q_2^2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 + B Q_2 \frac{N_1}{N_2}. \quad (8.26)$$

Kod simulacije starta pumpe, u pojednostavljenom modelu hidrauličkog udara, može se koristiti prethodni izraz sa pretpostavljenom promenom broja obrtaja.

Slučaj ispada pumpe iz pogona, kao i slučaj njenog starta, zahtevaju znatno složeniji opis ponašanja pumpe u prelaznim režimima. Takođe, i u detaljnijim analizama hidrauličkog udara, koji nisu izazvani pumpama, neophodno je ovaj granični uslov što realnije prikazati. Na žalost, toliko detaljno kao što bi to bilo korišćenjem izraza (8.3) još uvek nije praktično ostvarljivo.

Korak dalje predstavljaju rezultati laboratorijskih ispitivanja pumpi u posebnim režimima rada (Stepanoff, 1957) i ekstrapolacija tih rezultata korišćenjem

uslova sličnosti. Do većine ovih podataka, koji su dostupni u stručnoj literaturi, došlo se merenjem u ustaljenom tečenju, još u prvoj polovini ovog veka. Pretpostavlja se da isti važe i u neustaljenom tečenju pa se i tu koriste. Svakako, bolje bi bilo raditi sa podacima dobijenim ispitivanjem pumpi u neustaljenom tečenju (Tsukamoto, Ohashi, 1982; Tsukamoto et al., 1986), ali trenutno takvih podataka nema mnogo pa projektanti nemaju mnogo izbora.

8.5 Karakteristike pumpe u četiri kvadranta

Potreba za korišćenjem rezultata eksperimentalnih istraživanja u numeričkoj simulaciji za definisanje pumpe kao graničnog uslova postavlja određene zahteve, koje nije jednostavno ispuniti. U nastavku će se objasniti način prikaza odomaćen kod prelaznih režima (Wylie, Streeter, 1978).

Dve slične pumpe, različite veličine, imaju slično strujanje ako im je isti koeficijent proticaja, odnosno:

$$\frac{Q_1}{N_1 D_1^3} = \frac{Q_2}{N_2 D_2^3} . \quad (8.27)$$

Ako se radi o istoj pumpi, sličnost strujanja se ostvaruje kada je

$$\frac{Q_1}{N_1} = \frac{Q_2}{N_2} . \quad (8.28)$$

Ostvarena sličnost strujanja podrazumeva jednakost i ostalih bezdimenzionalnih veličina. Iz jednakosti koeficijenta napora sledi

$$\frac{H_1}{(N_1 D_1)^2} = \frac{H_2}{(N_2 D_2)^2} , \quad (8.29)$$

odnosno, za istu pumpu,

$$\frac{H_1}{N_1^2} = \frac{H_2}{N_2^2} . \quad (8.30)$$

Pretpostavlja se da stepen korisnosti pumpe ne zavisi od veličine pumpe, pa se izjednačavaju merni brojevi za hidraulički obrtni moment:

$$\frac{T_1 N_1}{Q_1 H_1} = \frac{T_2 N_2}{Q_2 H_2} . \quad (8.31)$$

Jednačina (8.28) predstavlja uslov sličnosti strujanja za dve pumpe, a jednačine (8.29) i (8.31) daju način preračunavanja veličina, čije vrednosti se određuju eksperimentalnim putem. Tako, na primer, ako se znaju veličine H_1 i T_1 za jednu pumpu pri proticaju Q_1 i broju obrtaja N_1 , odgovarajuće veličine, H_2 i T_2 , dobiće se preko izraza

$$H_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 H_1 ,$$

$$T_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 T_1 ,$$

pod uslovom da je $Q_1/N_1 = Q_2/N_2$.

Na osnovu (8.30) i (8.31) može se doći i do sledećih relacija za jednu pumpu u različitim režimima rada, što je neophodno za proučavanje ponašanja pumpe u prelaznim režimima:

$$\frac{T_1}{N_1^2} = \frac{T_2}{N_2^2} , \quad \frac{H_1}{Q_1^2} = \frac{H_2}{Q_2^2} , \quad \frac{T_1}{Q_1^2} = \frac{T_2}{Q_2^2} . \quad (8.32)$$

Uvode se bezdimenzionalne veličine:

$$h = \frac{H_P}{H_{P,0}} , \quad \beta = \frac{T}{T_0} , \quad v = \frac{Q}{Q_0} , \quad \alpha = \frac{N}{N_0} , \quad (8.33)$$

gde indeksi (0) označavaju da se radi o vrednostima za optimalnu radnu tačku. Relacije (8.29) i (8.32) važe za jednu strujnu sliku, za jednu vrednost izraza (8.27), odnosno, kada je u pitanju jedna pumpa, za jedno (Q/N). U prelaznim režimima pumpa prolazi kroz različite oblasti pa je potrebna funkcionalna zavisnost veličina definisanih u izrazima (8.32) u funkciji vrednosti (Q/N), ili u bezdimenzionalnom obliku u funkciji (v/α):

$$\frac{h}{\alpha^2} = f_1\left(\frac{v}{\alpha}\right) , \quad \frac{\beta}{\alpha^2} = f_2\left(\frac{v}{\alpha}\right) , \quad \frac{h}{v^2} = f_3\left(\frac{v}{\alpha}\right) , \quad \frac{\beta}{v^2} = f_4\left(\frac{v}{\alpha}\right) . \quad (8.34)$$

Normalno, karakteristike pumpe daju se samo za pozitivne vrednosti v i α . Pored te oblasti može se identifikovati još sedam oblasti rada pumpe, za razne kombinacije H , Q , N i T , označene slovima A-H, na slikama (8.13) i (8.14) za radialnu dvostrujnu pumpu, čija je specifična brzina $N_S = 24.6$. Postoji više načina obeležavanja oblasti rada pumpe (Martin, 1982; Radojković i dr. 1989; Stepanoff, 1957), a sve se vezuju za ime R. E. Knapa i 1937

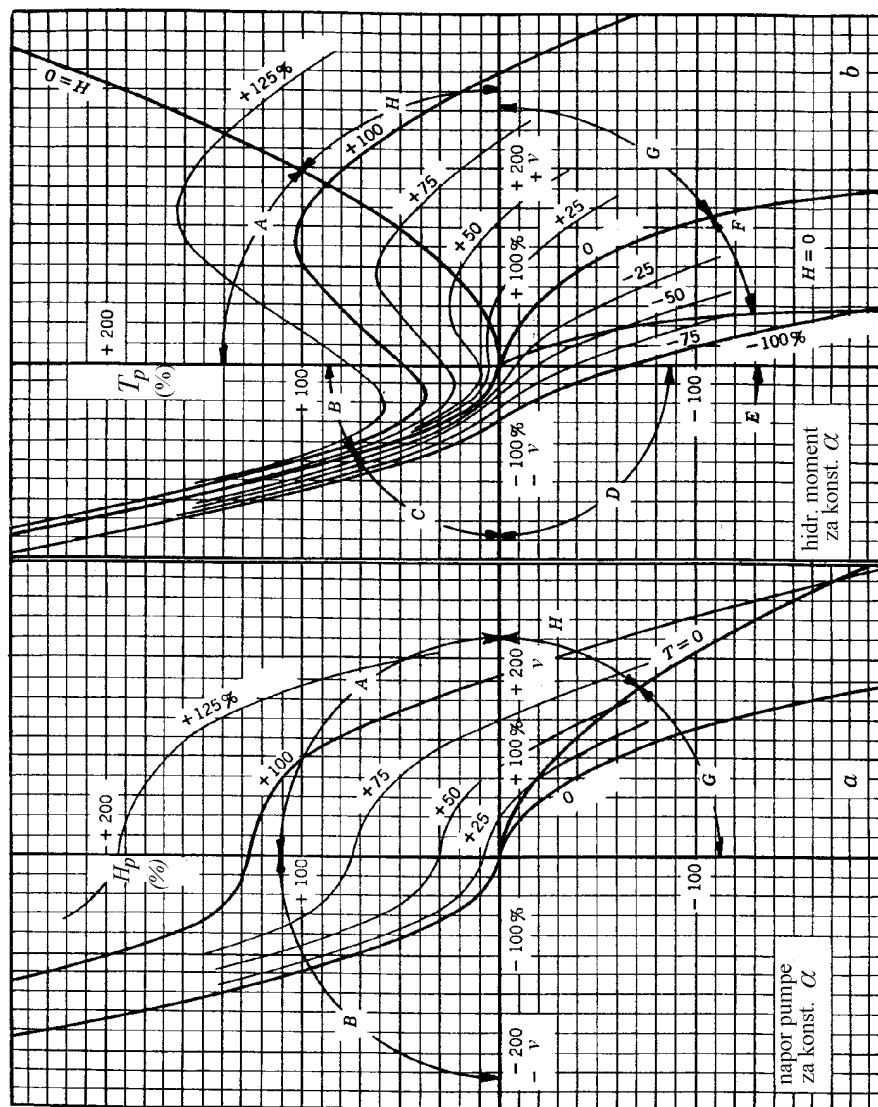
Tabela 8.1: Oblasti rada pumpe

Kvadrant	Oblast	Proticaj v	Broj obrtaja α	Napor h	Moment T	Stepen korisnosti η
I	A	+	+	+	+	+
I	B	+	+	-	+	-
I	C	+	+	-	-	+
II	D	+	-	-	-	-
II,III	E	\pm	-	\pm	-	+
III	F	-	-	+	-	-
III	G	-	-	+	+	+
IV	H	-	+	+	+	-

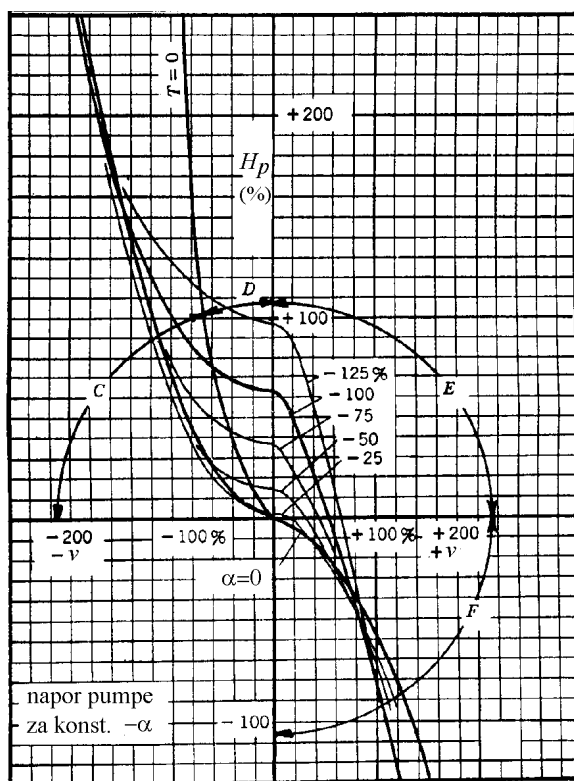
godinu. Ovde se koriste dijagrami iz najstarije pomenute bibliografske odrednice (Stepanoff, 1957) ne samo zbog ubedjenja da su najverodostojniji, nego i zbog toga što su najbliži standardnom prikazivanju karakteristika pumpe, $Q - H$ dijagramu. Na ordinatama se nalaze vrednosti h , odnosno, β , a na apscisi je α . Q i N , odnosno, v i α , koje su osnovne veličine, mogu imati i pozitivne i negativne vrednosti. Ako se definiše koordinatni sistem sa α i v na osama, kompletne karakteristike pumpe, $h(v, \alpha)$ i $\beta(v, \alpha)$, nazivaju se karakteristikama pumpe u četiri kvadranta. Na slici (8.15) prikazan je kružni dijagram karakteristika iste centrifugalne pumpe ($N_S = 24.6$ u SI jednicama), u četiri kvadranta. Na dijagramu su naznačene oblasti rada pumpe na isti način kao na slikama (8.13) i (8.14). U Tabeli (8.1) pregledno su date sve oblasti rada pumpe preko znakova bezdimenzionalnih veličina pumpe. Za aksijalne i mešovite pumpe, oblast E se nalazi u trećem Knapovom kvadrantu, a proticaj (v) i napor (h) su negativni.

Prikazom bezdimenzionalnih veličina, h/α^2 i β/α^2 u funkciji, α/v , sve zavisnosti date izrazima (8.34) svode se na po dve linije za pozitivnu i negativnu rotaciju. Iako logične, ove relacije nisu pogodne za korišćenje u matematičkom modelu, jer α menja znak i prolazi kroz nulu tokom neustaljenog tečenja, a za slučaj kada je sprečeno obrtanje pumpe u negativnom smeru, na nuli se i zaustavlja. Taj problem se prevazilazi korišćenjem ekvivalentnih Suterovih relacija (Wylie, Streeter, 1978)

$$\frac{h}{\alpha^2 + v^2} = f\left(\tan^{-1} \frac{v}{\alpha}\right), \quad \frac{\beta}{\alpha^2 + v^2} = f\left(\tan^{-1} \frac{v}{\alpha}\right). \quad (8.35)$$



Slika 8.13: Bezdimenzionalni napor i hidraulički moment za centrifugalnu pumpu ($N_S = 24.6$) za pozitivnu rotaciju, $\alpha > 0$ (Stepanoff, 1957).

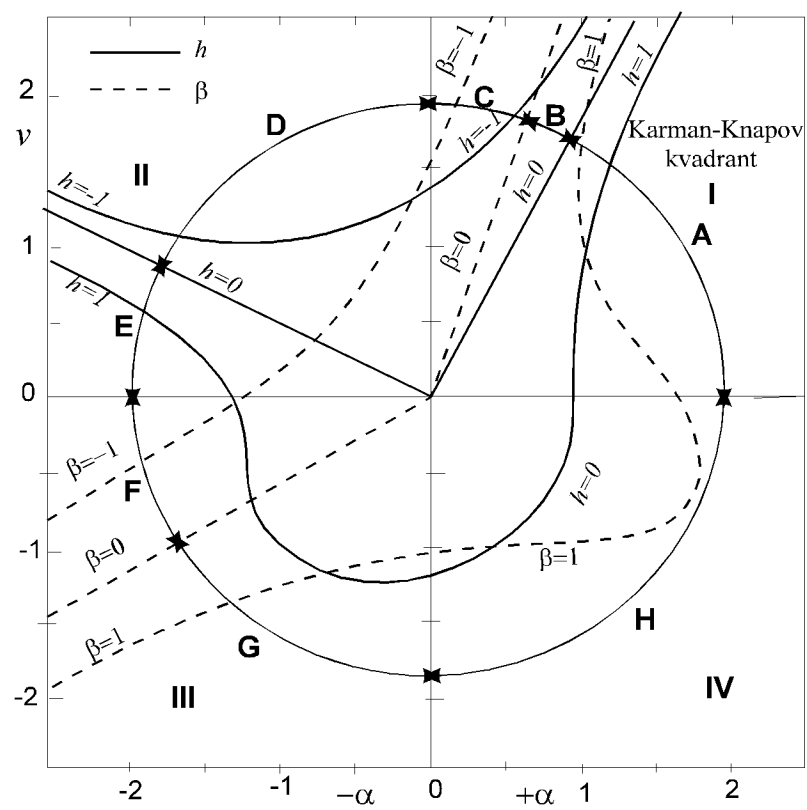


Slika 8.14: Bezdimenzijski napor za centrifugalnu pumpu ($N_S = 24.6$) za negativnu rotaciju, $\alpha < 0$ (Stepanoff, 1957).

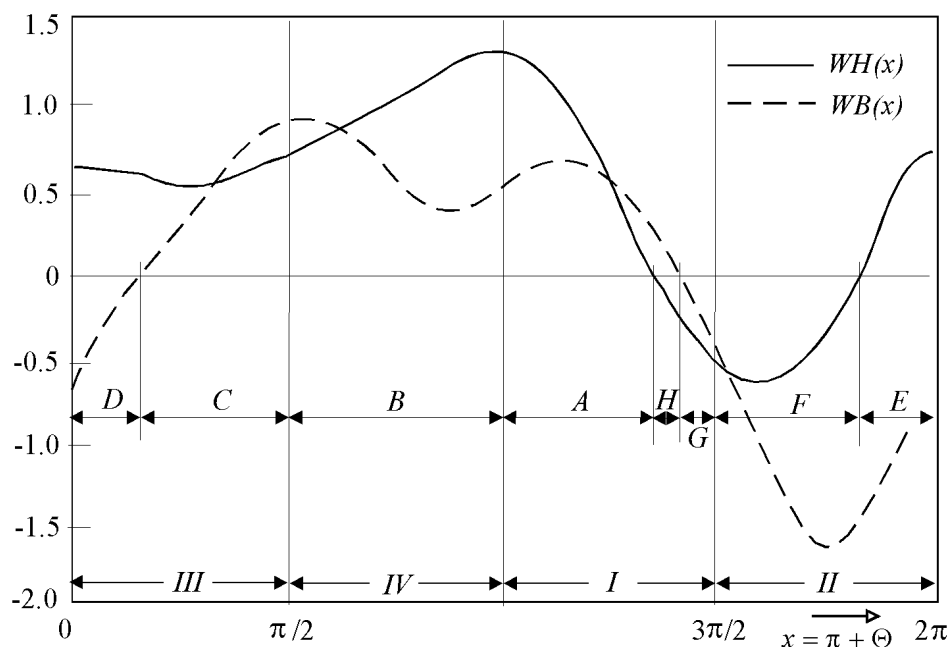
Kompletne karakteristike pumpe se mogu prikazati kao dve zatvorene linije u polarnom koordinatnom sistemu, kao $r_1 = h/(\alpha^2 + v^2)$ i $r_2 = \beta/(\alpha^2 + v^2)$ u funkciji ugla, $\theta = \tan^{-1} v/\alpha$.

Promenljiva $x = \pi + \theta = \pi + \tan^{-1} v/\alpha$, može se naneti na abscisu, pa se ista zavisnost može prikazati u Dekartovom koordinatnom sistemu, kao $WH(x)$ i $WB(x)$ (Slika 8.16). Promenljiva x se menja od 0 do 2π , što odgovara različitim zonama rada pumpe, koje su naznačene na istoj slici.

Vrlo često, kompletne karakteristike pumpi nisu dostupne projektantima pa ih tada treba dopuniti korišćenjem vrednosti iz literature. Svaki projektant ima svoju bazu podataka o pumpama, koju koristi pod pretpostavkom da pumpe istih specifičnih brzina imaju slične karakteristike.



Slika 8.15: Knapov dijagram za radijalnu pumpu u 4 kvadranta



Slika 8.16: Kompletne karakteristike jedne centrifugalne pumpe ($N_S = 24.6$ u SI jedinicama)

8.6 Ispad pumpe iz pogona

Ovo je jedan od najsloženijih graničnih uslova za analizu posledica hidrauličkog udara. Usled nestanka struje, kao i kod svakog namernog isključenja pumpe, kod koga prethodno nije proticaj smanjen na nulu, stvara se poremećaj koji se brzinom a prostire uzvodno i nizvodno od pumpe. Na slici (8.17) prikazana su dva primera iz prakse Instituta za hidrotehniku Gradjevinskog fakulteta u Beogradu.

Ispred pumpe (crpne stanice) na slici (8.17-gore), nalazi se vrlo kratak usisni cevovod, dok je u slučaju na slici (8.17-dole), usisni cevovod mnogo duži od potisnog. Data su dva položaja piježometarske linije u prelaznim režimima izazvanim ispadom pumpe iz pogona. Negativni talas prostire se nizvodno, duž potisnog cevovoda, a pozitivni talas uzvodno, duž usisnog cevovoda. Problemi mogu da nastanu bilo zbog toga što pritisak u potisnom cevovodu može da padne ispod atmosferskog (takodje i do pritiska vodene pare), bilo zbog toga što pritisak u usisnom cevovodu može da predje dozvoljeni maksimalni pritisak. Stepem ugroženosti sistema moguće je utvrditi jedino ako se

ponašanje pumpe može predvideti sa prihvatljivom pouzdanošću.

Energija po jedinici težine, koju pumpa u ustaljenom tečenju predaje vodenoj struji, jednaka je H_P . Pumpa radi u oblasti A, u prvom kvadrantu, za $v/\alpha \approx 1$ (slika 8.16). U svakom trenutku obrtni moment na osovini pumpe uravnotežen je hidrauličkim momentom fluidne struje. Kod ispada pumpe iz pogona, hidraulički moment usporava radno kolo. Visina dizanja (napor) pumpe se smanjuje, kao i količina vode koja se potiskuje. Moguć je kratkotrajan prelaz u oblast B, pa povratak u A. Proticaj se brzo smanjuje do nule i postoji mogućnost da se fluid kreće u suprotnom smeru, dok je α pozitivno (prelazak u kvadrant IV, oblast H). Ako nema klapne na potisnoj strani pumpe i ako je omogućeno obrtanje u negativnom smeru pumpa prelazi u oblast G. Ako se tečenje ne zaustavi kontrolnim zatvaračem, pumpa će ući u oblast F i posle određenog vremena ustaliti se na brzini obrtanja kojoj odgovara $\beta = 0$. U normalnim uslovima pumpa sa kratkim usisnim cevovodom verovatno neće ući u oblasti C, D i E.

Inercija obrtnih delova pumpe, motora i vode koja se okreće u kućištu pumpe, obično je znatno manja od inercije mase fluida koji se kreće cevovodom, ali isto tako ne i zanemarljivo mala da bi se uvek moglo govoriti o trenutnom zaustavljanju pumpe.

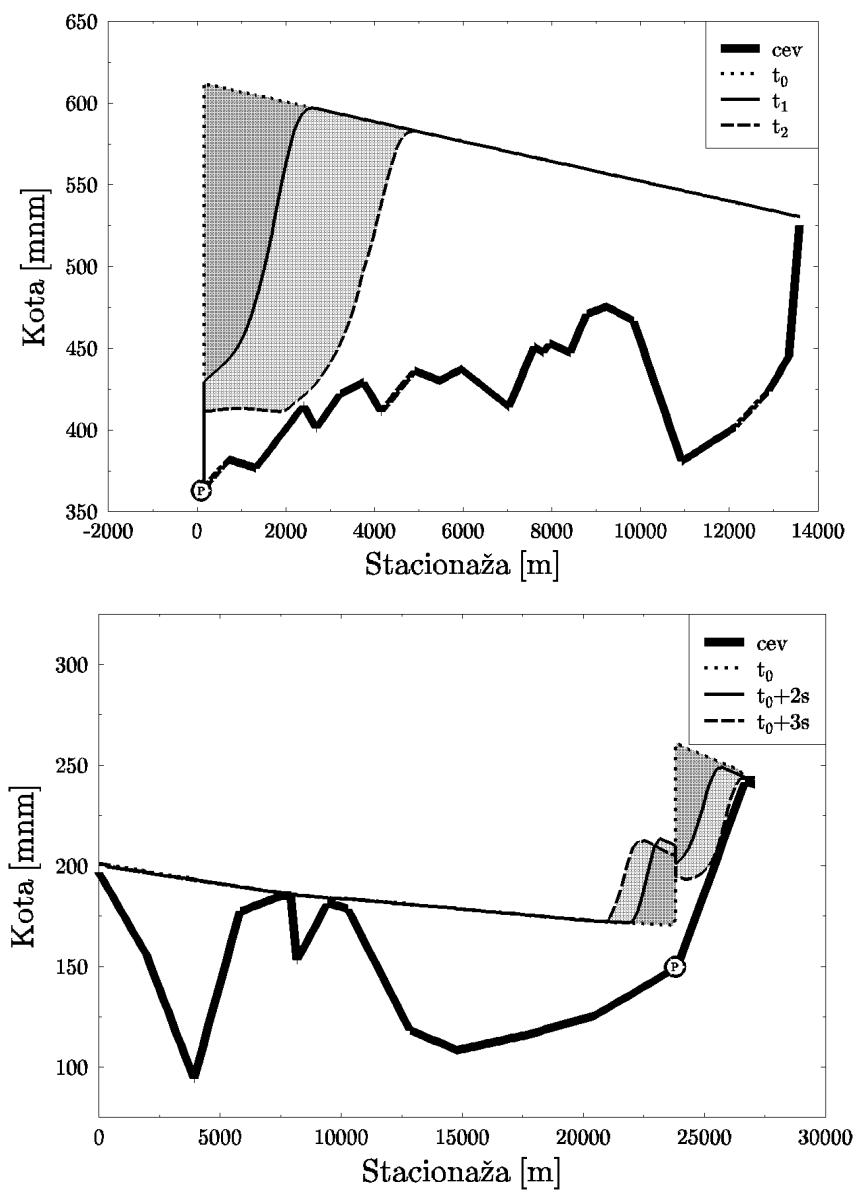
8.6.1 Jednačine

Ponašanje pumpe u prelaznim režimima, kao i to kroz koje oblasti rada će prolaziti, zavisi od karakteristika pumpe, karakteristika cevovoda i korišćenih sredstava za zaštitu od hidrauličkog udara. Na osnovu zakona sličnosti može se doći do dva uslova, koji su ovde prikazani bezdimenzionalno, kao zavisnosti (8.35). Snaga motora je kod ispada pumpe iz pogona poznata (jednaka je nuli). Preostala dva uslova dobijaju se na osnovu energetske jednačine i jednačine obrtanja pumpe.

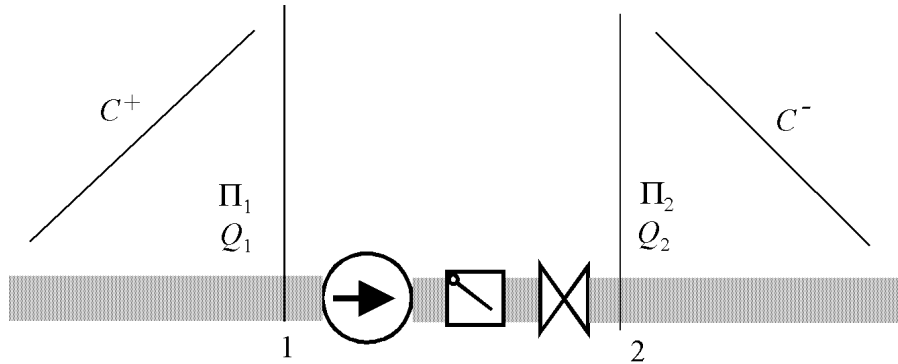
Energetska jednačina za pumpu. Ovo je osnovna jednačina jer se prolaskom kroz radno kolo pumpe menja energija fluidne struje. Posmatraju se dva preseka, 1 i 2, uzvodno i nizvodno od pumpe (Slika 8.18).

Neposredno nizvodno od pumpe nalaze se zatvarač i klapna, koje treba posmatrati zajedno sa pumpom. Na osnovu uslova kontinuiteta i pretpostavke da su preseki na malom rastojanju, podrazumeva se:

$$Q_1 = Q_2 = Q \ .$$



Slika 8.17: Promene piježometarske linije izazvane ispadom pumpe iz pogona



Slika 8.18: Pumpa u matematičkom modelu hidrauličkog udara

Energetska jednačina za preseke 1 i 2 glasi:

$$\Pi_1 + H_P - \Delta E_{zat} = \Pi_2 \quad (8.36)$$

Pijezometarske kote, Π_1 i Π_2 , mogu se izraziti preko pozitivne (ako postoji usisni cevovod) i negativne karakteristike:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= CP - B_1Q \quad , \\ \Pi_2 &= CM + B_2Q \quad . \end{aligned}$$

ΔE_{zat} je gubitak energije na zatvaraču, a $H_P = H_{P,0} h$, visina dizanja pumpe, koja se određuje na osnovu tabelarno zadatih vrednosti, $WH(x)$ (dobijeno merenjima na sličnoj pumpi):

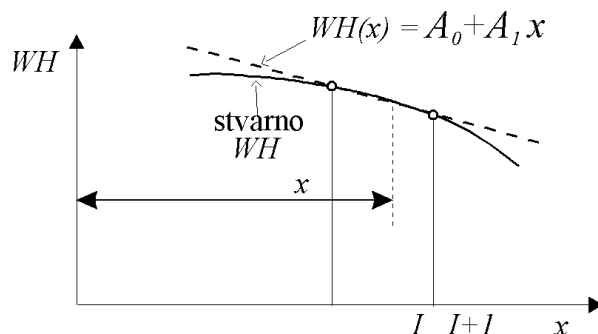
$$H_{P,0}h = H_{P,0}(\alpha^2 + v^2)WH\left(\pi + \tan^{-1}\frac{v}{\alpha}\right)$$

Zavisnost $WH(x)$ od $x = \pi + \tan^{-1}(v/\alpha)$ aproksimira se linijom između dve vrednosti u tabeli gde pada vrednost x (slika 8.19). Približna vrednost θ dobija se ekstrapolacijom vrednosti α i v iz prethodnog trenutka i kasnije se iterativnim postupkom koriguje.

$$H_P = H_{P,0}(\alpha^2 + v^2)\left(A_0 + A_1\left(\pi + \tan^{-1}\frac{v}{\alpha}\right)\right) \quad (8.37)$$

Gubitak energije na zatvaraču zavisi od tipa zatvarača, proticaja i stepena otvorenosti, τ_Z , odnosno, odgovarajućeg koeficijenta lokalnog gubitka energije

$$\Delta E_{zat} = \xi_Z(\tau_Z)\frac{Q|Q|}{2gA_Z^2} = \xi_Z(\tau_Z)v|v|\frac{Q_0^2}{2gA_Z^2} \quad (8.38)$$



Slika 8.19: Linearna aproksimacija tabelarno zadate karakteristike pumpe

Jednačina (8.36) svodi se na oblik

$$H_{P,0}(\alpha^2 + v^2) \left(A_0 + A_1 \left(\pi + \tan^{-1} \frac{v}{\alpha} \right) \right) + (CP - CM) - (B_1 + B_2)Q_0 v - \xi_Z(\tau_Z)v|v| \frac{Q_0^2}{2gA_Z^2} = 0, \quad (8.39)$$

gde se kao nepoznate veličine javljaju v i α .

Ukoliko je poznata brzina obrtanja, α , kao što je to u normalnim radnim uslovima, jednačina (8.39) je dovoljna za rešavanje zadatka. Kada se radi o ispadu pumpe iz pogona, ili startu pumpe sa poznatom promenom snage pogonskog motora, α se ne zna pa je potreban jedan dodatni uslov, jednačina obrtanja pumpe.

Jednačina obrtanja pumpe. Do promene brzine obrtanja pumpe dolazi ako postoji razlika obrtnog momenta motora pumpe, T_m , i hidrauličkog momenta, T_z :

$$T_m - T_z = m R_g^2 \frac{d\omega}{dt}, \quad (8.40)$$

gde je, m , masa rotirajućih delova pogonskog motora, pumpe i fluida u kućištu pumpe, a R_g radijus rotacije. Veličina $m R_g^2$ se zove centrifugalni moment inercije, i to je podatak koji daju proizvođači pumpi i pogonskih motora.

Kod nestanka struje obrtni moment motora pumpe, T_m , postaje trenutno jednak nuli. Neuravnoteženi hidraulički moment počinje da menja brzinu obrtanja.

Jednačina (8.40) je obična diferencijalna jednačina, koja se za dovoljno kratak vremenski priraštaj Δt , može aproksimirati nekom eksplicitnom shemom

$$\frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\Delta t} = -\frac{30T_0}{\pi N_0 m R_g^2} \beta^n, \quad (8.41)$$

odakle se direktno dobija nova vrednost brzine obrtanja, α^{n+1} .

Zbog brzih promena veličina vezanih za pumpu, bolji izbor predstavlja neka implicitna metoda, na primer, Krank-Nicolson (*Crank-Nicolson*)

$$\frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\Delta t} = -\frac{30 T_0}{\pi N_0 m R_g^2} \frac{1}{2} (\beta^n + \beta^{n+1}). \quad (8.42)$$

Problem određivanja β^{n+1} rešava se linearizacijom karakteristike pumpe $WB(\theta)$ u okolini vrednosti θ (slika 8.19)

$$\beta = (\alpha^2 + v^2) \left(B_0 + B_1 \left(\pi + \tan^{-1} \frac{v}{\alpha} \right) \right), \quad (8.43)$$

a jednačine (8.39) i (8.42) treba rešiti simultano. Simulacija treba da traje sve do zaustavljanja tečenja u cevovodu, koje mora da obave klapna ili zatvarač na potisnoj strani pumpe.

U većini slučajeva ne dozvoljava se nekontrolisano obrtanje pumpe u negativnom smeru. Razlozi za to su sprečavanje gubitaka vode, oštećenje ležajeva i zaptivki pumpe, elektromotora itd. Prema podacima iz literature (Stepanoff, 1957), opasnost po samu pumpu od obrtanja u negativnom smeru je preuveličana. Ono što je nesporno je to da je efektivna promena brzine, ΔV , izazvana ispadom pumpe iz pogona, veća od V_0 . To povećava mogućnost pojave vakuuma kod same pumpe, stvaranje kaviteta i njegov kolaps. Zabeleženo je više slučajeva oštećenja pumpi u sistemima koji transportuju zapaljive tečnosti.

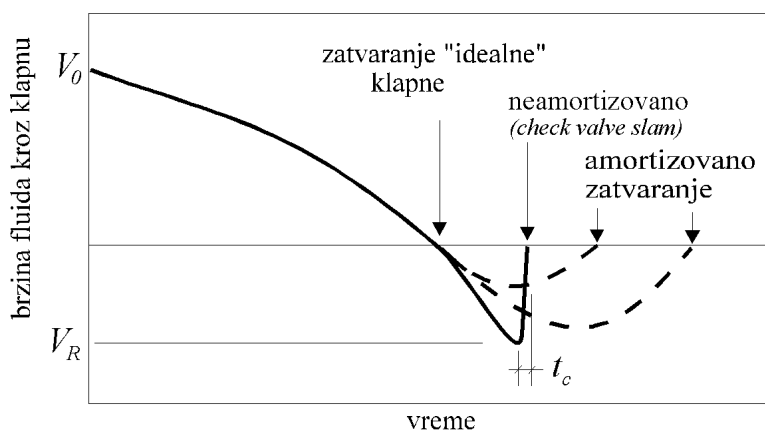
Kod nekih pumpi obrtanje u negativnom smeru je sprečeno. Tada pumpa samo predstavlja lokalni otpor za tečnost koja se vraća kroz pumpu.

8.6.2 Klapne

Klapne, ili nepovratni zatvarači, postavljaju se vrlo često na potisnoj strani pumpe (toliko često, da bi se moglo reći i obavezno). Osnovna uloga im je da spreče povratak vode kroz pumpu kada se pumpa isključi, a i da spreče obrtanje pumpe u negativnom smeru. Smatra se da predstavljaju zaštitu od

hidrauličkog udara, ali se previdja da i one, pogrešno odabrane, mogu biti uzrok ozbiljnih problema. Posebno su osetljivi cevovodi kod kojih je velika geodetska razlika izmedju potisnog i usisnog rezervoara, i uopšte, cevovodi gde po ispada pumpe iz pogona, na nizvodnoj strani ostaje relativno visoka pijezometarska kota. To se javlja i kod ispada iz pogona jedne od dve paralelno spregnute pumpe, dok druga nastavlja da radi, kao i u cevovodima sa vazдушnom komorom na potisnoj strani crpne stanice.

U pomenutim slučajevima neophodno je da klapna brzo i sigurno zatvori cevovod pre nego što se uspostavi tečenje u negativnom smeru kroz pumpu. U većini analiza polazi se od trenutnog zatvaranja klapne kao od aksioma, mada u stvarnosti to najčešće nije tako. U realnim situacijama promena brzine fluida kroz klapnu izgleda kao na slici 8.20, što je bitno različito od "idealne" klapne.

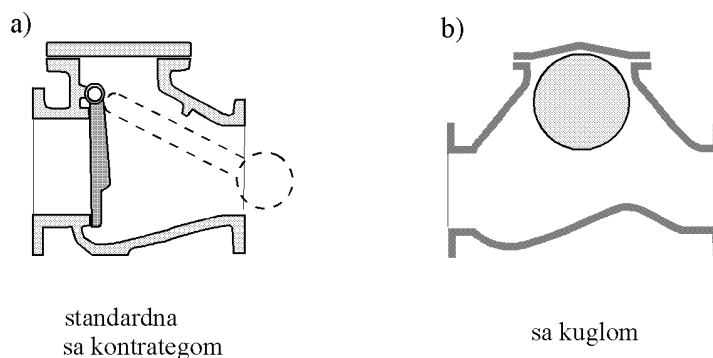


Slika 8.20: Promena brzine fluida kroz klapnu

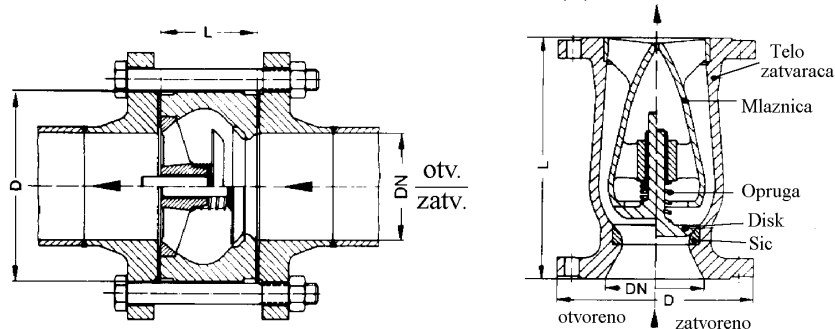
Skoro obavezno dolazi do povratnog tečenja kroz klapnu, što dovodi do zatvaranja klapne. Na slici je prikazano naglo zatvaranje klapne (*check valve slam*), koje može dovesti do oštećenja same klapne, jer je vreme zatvaranja klapne, t_c veoma malo. Isprekidanom linijom prikazano je i amortizovano zatvaranje klapne, koje smanjuje mogućnost oštećenja klapne, ali čiji uticaj na cevovod i crpnu stanicu treba proceniti detaljnom hidrauličkom analizom. Promena brzine kroz klapnu prihvatljive tačnosti dobija se uzimanjem u obzir dinamičkih karakteristika klapne, sila koje deluju, promena u cevovodu itd. (Provoost, 1983).

Brzina zatvaranja i pouzdanost funkcionisanja zavisi od konstruktivnog

rešenja klapne, hoda zapornog organa itd. Standardne klapne (slika 8.21 a), koje su u mnogo slučajeva dobar izbor, imaju vrlo slabe dinamičke karakteristike. Dinamičke karakteristike klapne su veoma važni pokazatelji uticaja



Slika 8.21: Standardna klapna sa kontrategom (a) i klapna sa kuglom (b)

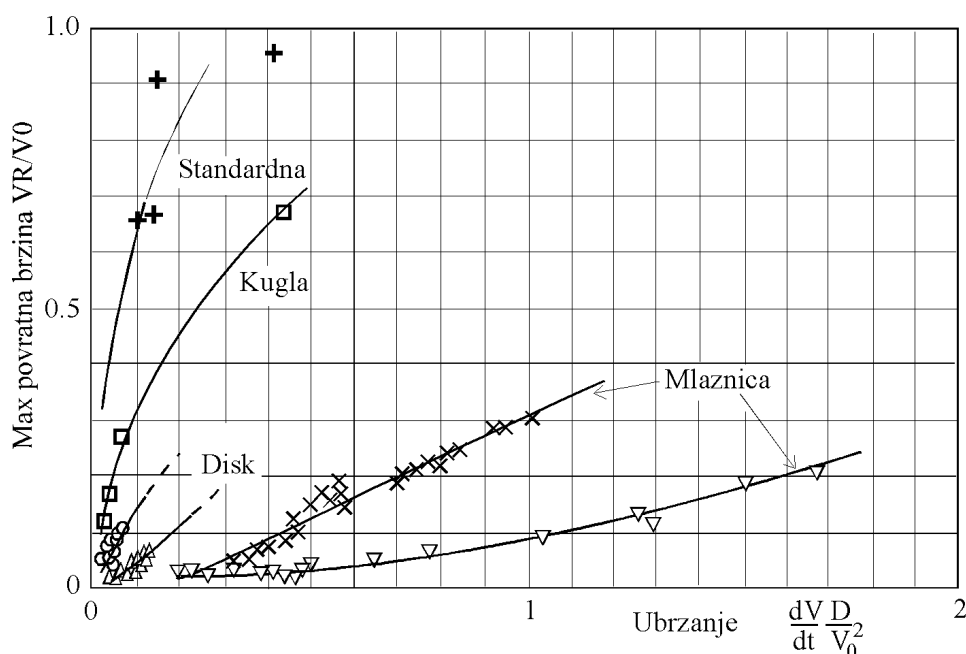


Slika 8.22: Klapna sa diskom (levo) i mlaznicom (desno)

klapne na prelazne režime. Za tipove klapni sa slika (8.21) i (8.22), date su karakteristike na slici (8.23) prema podacima iz literature (Thorley, 1991).

Na apscisi je dato bezdimenzionalno ubrzanje, odnosno, usporavanje fluidne struje, koje se može proceniti kao $\frac{dv}{dt} \frac{D}{V_0^2}$, a na ordinati, V_R/V_0 . V_0 je početna brzina u ustaljenom tečenju, a V_R , maksimalna povratna brzina kada se klapna zatvara. Najbolje karakteristike imaju klapne koje najbrže reaguju na promenu smera tečenja, odnosno, čije karakteristike zaklapaju mali ugao sa apscisom.

U narednom primeru upoređeni su rezultati simulacije ispada iz pogona pumpe za dva tipa klapne na potisnoj strani pumpe.



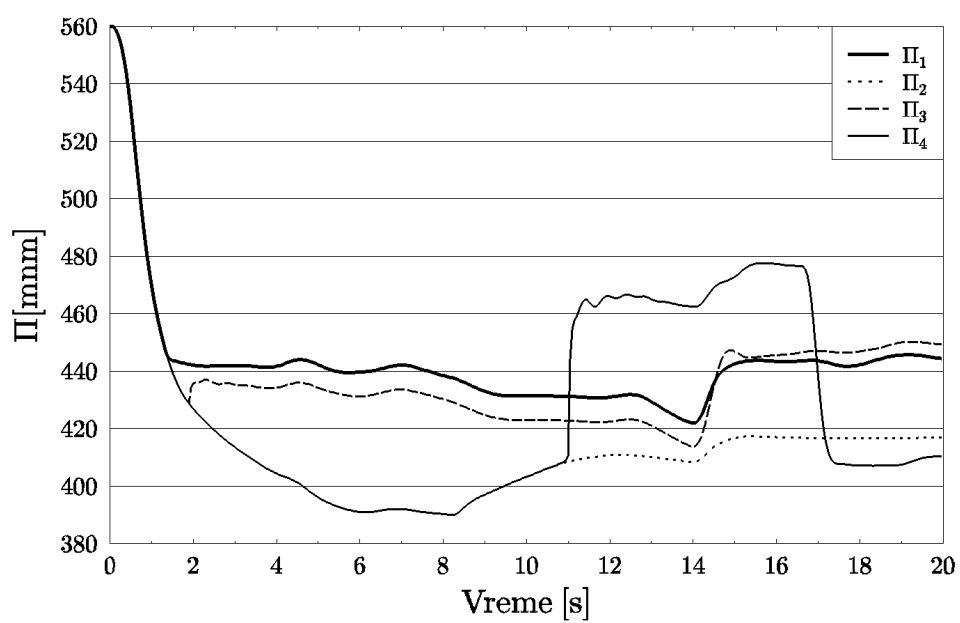
Slika 8.23: Dinamičke karakteristike klapni

Primer

Posmatra se cevovod dužine 13 km, prečnika $D = 330$ mm, na čijem uzvodnom kraju se nalazi pumpa. Visinska razlika između rezervoara iznosi 145 m. Apsolutna hrapavost cevovoda procenjena je na 0.5 mm. Pri proticaju od 80 l/s, pumpa (centrifugalni moment inercije pumpe i motora $I = 16$ kg m²) ispada iz pogona. Obrtanje pumpe u negativnom smeru onemogućeno je konstruktivnim rešenjem spoja motora i pumpe. Proceniti piježometarske kote (i pritiske) na potisnoj strani pumpe uzimajući u obzir realne karakteristike klapne (obične i klapne sa mlaznicom) i uporediti sa pretpostavkom o zatvaranju klapne čim proticaj kroz pumpu postane negativan. Podužni profil cevovoda dat je na slici (8.17)⁴.

Rezultati proračuna promene piježometarske kote na potisnoj strani pumpe, prikazani su na slici (8.24). Linija označena sa Π_1 odgovara odomaćenoj (ali pogrešnoj) pretpostavci o trenutnom zatvaranju klapne čim brzina promeni znak u preseku nizvodno od pumpe. To bi trebalo da se desi već posle 1.5 s.

⁴ Početni uslovi, proticaji i broj pumpi u radu, za slučaj prikazan na slici (8.17), međutim, nisu isti.



Slika 8.24: Promena pijeziometarske kote na potisnoj strani nakon ispada pumpe iz pogona

Medjutim, tokom probnog pogona (jer, ovo je primer iz prakse) ustanovljeno je da se klapna zatvara posle najmanje 10 s, a takodje, da ponekad ostaje neprekidno otvorena. Kao posledica toga, pijeziometarska kota nizvodno od pumpe pada do 390 mm, umesto, 440 mm, jer efektivna promena brzine izazvana ispadom pumpe nije $-0.080 \times 4 / 0.33^2 \pi \approx -0.95 \text{ m/s}$, nego oko -1.25 m/s računajući i onaj deo koji se vraća kroz pumpu. To je dovoljno da niski pritisci i prelazna kavitacija, zahvate najveći deo cevovoda (od 1500 m do 10000 m), umesto samo najviših tačaka (deonica od 8500 m do 10000 m).

Tačkasta linija, Π_2 , odnosi se na slučaj kada klapna ostaje otvorena, a linija Π_4 odgovara jednom od eksperimenata sa standardnom klapnom sa kontrategom. Naime, klapna se zatvorila tek kada je povratni proticaj počeo značajnije da raste (porast pijeziometarske kote počeo je posle 8 sekundi). Linija Π_3 pokazuje šta bi se postiglo postavljanjem klapne sa boljim dinamičkim karakteristikama.

8.6.3 Moment inercije pumpe i motora

Kod kratkih cevovoda moment inercije rotirajućih delova pumpe, motora, vratila i vode u kućištu pumpe, može imati veliki uticaj na prelazne režime.

Povećanje momenta inercije pumpe postavljanjem zamajca na vratilu pumpe može biti rešenje za zaštitu od hidrauličkog udara. Prema Stiven-sonu (Stephenson, 1981), takvo rešenje dolazi u obzir kada je

$$\frac{I_0 N^2}{\rho g A L H_P} > 0.01 \quad (8.44)$$

gde je I_0 ukupni moment inercije svih rotirajućih delova pumpe, N nominalna brzina obrtanja u [ob/min], A površina preseka cevi u [m^2], L dužina cevovoda u [m] i H_P napor pumpe u [m].

U preliminarnim analizama, kada oprema nije definitivno usvojena, treba znati proceniti približne vrednosti momenta inercije, dok je za konačne analize potrebno obezbediti odgovarajuće podatke od proizvođača opreme.

Na osnovu analize velikog broja pumpi (Thorly, 1991) uočena je veza momenta inercije sa jednim delom koeficijenta snage (S/N^3). Objašnjenje za ovo može se naći iz izraza (8.19)

$$\frac{S}{\rho_f N^3 D^5} = \text{const} \quad ,$$

gde je ρ_f gustina fluida. Moment inercije je jednak proizvodu mase, m , i radijusa inercije na kvadrat, R_g^2 , a zna se da je

$$m \propto \rho_m D^3 \quad R_g \propto D \quad ,$$

ρ_m je gustina materijala od kojeg ja napravljeno obrtno kolo. Može se napisati:

$$I \propto \rho_m D^5 \quad \text{odnosno,} \quad I \propto \frac{S}{N^3} \quad .$$

jer je odnos, ρ_m/ρ_f , približno konstantan.

Preporučena je i funkcionalna zavisnost dobijena regresijom

$$I_P = 0.03768 \left(\frac{S_P}{N^3} \right)^{0.9556} \left(= 0.038 \left(\frac{S_P}{N^3} \right)^{0.96} \right) \quad , \quad (8.45)$$

gde je snaga u [kW], N u 1000 [ob/min], a I_P u [kg m²].

Ne treba zaboraviti da su vrednosti koje se dobijaju iz izraza (8.45) samo procene (zato je u zagradi predložen kraći izraz), a da su odstupanja analiziranih podataka bila i do +100% i -50%. Preporučuje se provera osetljivosti rezultata simulacije na promene vrednosti momenta inercije u granicama odstupanja analiziranih vrednosti.

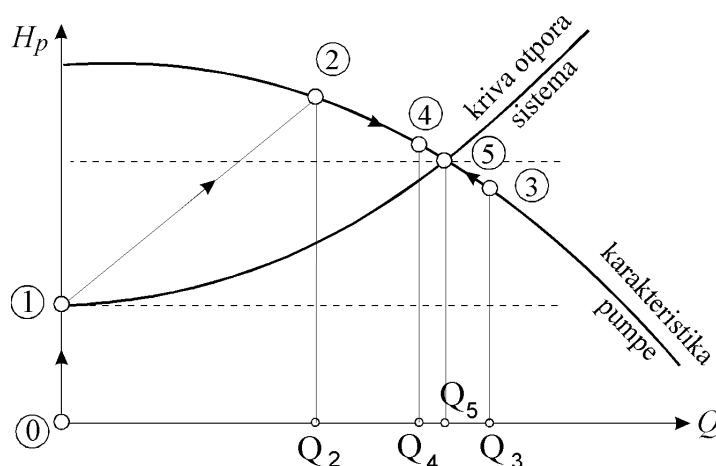
Podaci za pogonske motore analizirani su na isti način i uočena je veza momenta inercije I i (S/N)

$$I_{mot} = 0.0043 \left(\frac{S_P}{N} \right)^{1.48} \quad , \quad (8.46)$$

gde je S u [kW], N u 1000 [ob/min], a I_{mot} u [kg m²]. Moment inercije motora je obično nekoliko puta veći od momenta inercije pumpe.

8.7 Start pumpe

Željeni proticaj u cevovodu ne može se postići trenutno zbog ograničene snage pumpe i značajne mase fluida koji treba ubrzati. Kod cevovoda sa pozitivnom geodetskom razlikom, najpre se pritisak na potisnoj strani pumpe mora izjednačiti sa statičkim, nizvodno od klapne, da bi se klapna mogla otvoriti. Nakon toga, dolazi do sabijanja fluida nizvodno od klapne i do pozitivnog talasa koji se prostire nizvodno. Posle nekoliko skokovitih promena,



Slika 8.25: Promena radne tačke pumpe nakon starta pumpe

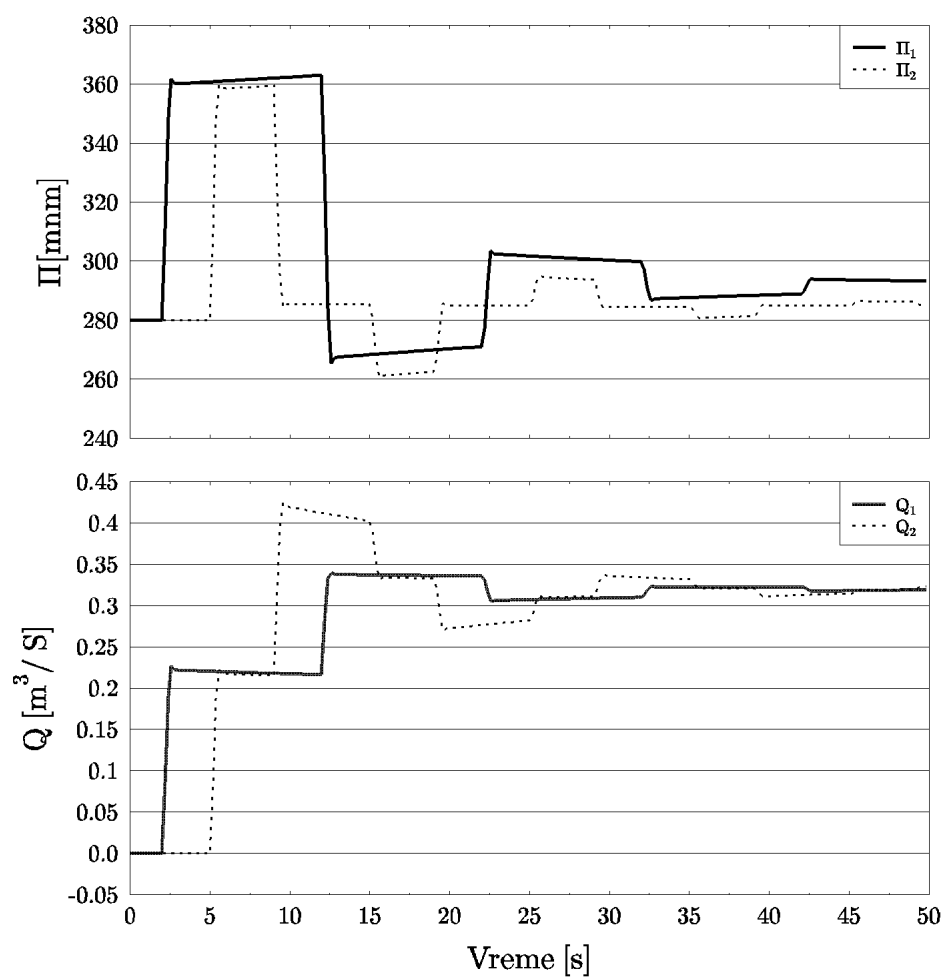
od kojih je svaka sledeća manja zbog povećanja uticaja trenja, uspostavlja se ustaljeno tečenje. Na slici (8.25) na dijagramu ($Q - H_P$), prikazano je karikirano pomeranje radne tačke pumpe, a na dijagramima (8.26) odgovarajuće promene pijeziometarske kote i proticaja nizvodno od pumpe. Dužina cevovoda je $L = 5000$ m, a geodetska visina dizanja $\Delta Z = 280$ m. Pretpostavljena je linearna promena obrtnog momenta motora za 3 sekunde. Punom linijom (Π_1) prikazane su promene u preseku neposredno nizvodno od pumpe, a isprekidanom (Π_2) promene u preseku koji se nalazi na $x = 3000$ m.

Stvarne karakteristike pumpe u neustaljenom tečenju prilikom starta pumpe (Tsukamoto, Ohashi, 1982) značajno se razlikuju od četvorokvadrantnih karakteristika pumpe dobijenih u kvazi-ustaljenom tečenju (Stepanoff, 1957), pa su kod kratkih cevovoda moguća određena odstupanja.

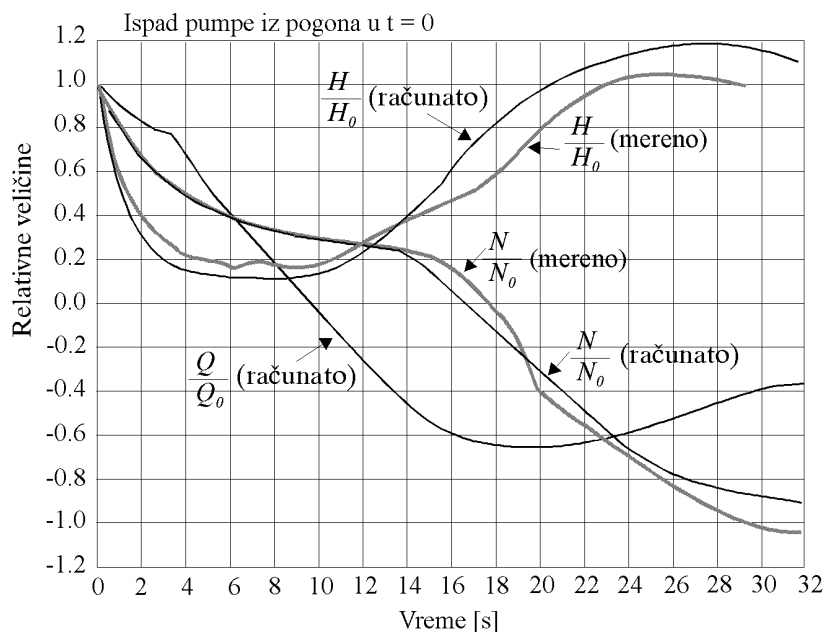
Start pumpe u većini slučajeva ne izaziva probleme na cevovodu ako se poštuje propisana procedura uključivanja pumpi (na primer, uključivanje centrifugalnih pumpi sa zatvorenim zatvaračem na potisnoj strani itd.). Ipak, problemi se mogu i ovde desiti pa start pumpe treba analizirati u sklopu sagledavanja opasnosti od hidrauličkog udara.

8.8 Dodatne jednačine i uslovi

Prethodnim jednačinama i razmatranjima obradjen je standardni granični uslov jedne pumpe na cevovodu sa usisnim i potisnim delom i sa zatvaračem



Slika 8.26: Promene pijeziometarske kote i proticaja u preseku nizvodno od pumpe nakon starta pumpe



Slika 8.27: Promene proticaja i broja obrtaja pumpe nakon ispada iz pogona crpne stanice Tracy

na potisnoj strani. Crpna stanica sa više pumpi, serijski ili paralelno vezanih, predstavlja znatno složeniji granični uslov, koji se u preliminarnim analizama može prevazići uvodjenjem ekvivalentne pumpe. U konačnim analizama, svaku pumpu treba predstaviti odgovarajućim karakteristikama $WH(x)$ i $WB(x)$, i dvema jednačinama, koje treba rešiti simultano za sve pumpe u crpnoj stanici.

Prisustvo posebnih sredstava za zaštitu od hidrauličkog udara dodatno komplikuje analizu. Standardni načini zaštite od hidrauličkog udara, obilazni vodovi (by-pass), rasteretni ventili, vazdušne komore, koji se smeštaju u crpnu stanicu, obradjuju se u narednom poglavlju.

Na slici (8.27) date su promene karakterističnih veličina vezanih za pumpu posle ispada svih pumpi iz pogona, za slučaj crpne stanice Tracy (Wylie, Streeter, 1978). U tom primeru, dve identične paralelno vezane pumpe, koje potiskuju vodu u zajednički cevovod dužine $L = 1564$ m, prečnika $D = 4.57$ m, istovremeno se isključuju. Usisni cevovod je vrlo kratak pa je u proračunu zanemaren. Karakteristike pumpi poznate su samo u prvom kvadrantu (nominalne vrednosti su $H_{P,0} = 60$ m, $Q_0 = 21.7$ m³/s, $N = 180$ ob/min), dok su kompletne karakteristike dobijene na osnovu sličnosti sa pumpama sličnih

specifičnih brzina.

Bibliografija

- [1] Hajdin, G., 1993, *Mehanika fluida*, Gradjevinski fakultet, Beograd.
- [2] Ivetić M., 1993, Zaštita od hidrauličkog udara magistralnih cevovoda sa primerom cevovoda Petlovo Brdo - Mladenovac, Monografija u čast prof. Miloja Milojevića, Gradjevinski fakultet, Beograd.
- [3] Ivetić M., 1994, Pumping stations and transient flow analysis, poglavlje u *New Technologies for Large Water Supply Systems* eds J. Snoxell, Č. Maksimović, F. Calomino, ASI.
- [4] Knapp R.T., 1937, Complete characteristics of centrifugal pumps and their use in prediction of transient behaviour, *Trans. ASME*, Vol. 59.
- [5] Martin, C. S., 1982, Representation of characteristics of hydraulic machinery, *Intercambio Internacional Sobre Transientes & Cavitação*, Sao Paulo, Brazil.
- [6] Protić, Z., Nedeljković, M., 1991, *Pumpe i ventilatori*, Mašinski fakultet, Beograd.
- [7] Provoost G.A., 1983, A critical analysis to determine dynamic characteristics of non-return valves, 4th Int. Conf. on Pressure Surges, BHRA, The Fluid Engineering Centre.
- [8] Radojković, M., Obradović, D., Maksimović, Č., 1989, *Računari u komunalnoj hidrotehnici*, Gradjevinska knjiga.
- [9] Stepanoff, A.J., 1957, *Centrifugal and Axial Flow Pumps*, 2nd edition, John Wiley & Sons Inc.
- [10] Stephenson, D., 1981, *Pipeline design for water engineers*, Elsevier.
- [11] Thorley, A. R. D., 1991, *Fluid transients in pipeline systems*, D. & L. George Ltd. England.

- [12] Tsukamoto H., Ohashi H., 1982, Transient characteristics of a centrifugal pump during starting period, Journal of Fluids Engineering, Trans. of the ASME Vol. 104, No.1.
- [13] Tsukamoto H., Matsunaga S., Yoneda H., Hata S., 1986, Transient characteristics of a centrifugal pump during stopping period, Journal of Fluids Engineering, Trans. of the ASME Vol. 108, No.4.
- [14] Wylie, E.B., Streeter, V.L., 1978, *Fluid Transients*, McGraw Hill.

Poglavlje 9

Zaštita od hidrauličkog udara

9.1 Uvod

Velike oscilacije pritiska, koje se javljaju kod hidrauličkog udara, dovode do problema u funkcionisanju cevovoda. Pored otežane regulacije i kontrole rada cevovoda tokom prelaznih režima, moguća su i oštećenja samog cevovoda i opreme na njemu, jer ekstremne vrednosti pritisaka mogu višestruko prevazići radne pritiske. Sa druge strane, niski pritisci u cevovodu zajedno sa spoljnim opterećenjem mogu dovesti do velikih deformacija i loma fleksibilnih cevi. Postoji veliki praktični interes da se ekstremne vrednosti pritisaka drže pod kontrolom.

Suočen sa činjenicom da se prilikom prelaznih režima javljaju pritisci u cevovodu koji ugrožavaju statičku sigurnost cevovoda i opreme na njemu, projektant ima dva izbora: da dimenzioniše cevi i opremu na te povećane pritiske (drugim rečima, da izabere jače cevi) ili da ne dozvoli da se neprihvatljivi pritisci pojave. Obično, mada ne i obavezno, bira se drugi pristup kao ekonomičniji.

Na samom početku treba istaći da ne postoji standardna metoda za zaštitu od hidrauličkog udara i da je vrlo opasno tražiti slične "slučajeve" i slična rešenja. Svako rešenje je jedinstveno. Da bi izabrao pravo rešenje zaštite od hidrauličkog udara, projektant treba dobro da pozna je režime rada cevovoda, kao i principe i pouzdanost funkcionisanja svih objekata na cevovodu. Takođe potrebno je da zna prednosti, mane i pouzdanost svih sredstava za zaštitu od hidrauličkog udara koja namerava da koristi.

Nije nevažno **kada** se rade hidrauličke analize vezane za određivanje

odgovarajuće zaštite od hidrauličkog udara. To može biti

1. **Pre** nego što su se problemi u radu cevovoda javili: u fazi projektovanja novog sistema, ili u okviru rekonstrukcije i proširenja postojećeg sistema,
2. **Posle** uočenih problema u funkcionisanju i, eventualno, havarija na cevovodu.

U prvom slučaju dolazi do izražaja inventivnost projektanta koji treba da identifikuje sve potencijalne opasnosti po cevovod. Iz tog mnoštva slučajeva treba se koncentrisati na objektivno najopasnije i odrediti odgovarajuću zaštitu. Nakon izgradnje sistema projektant zaštite treba da proveri da li je bilo bitnih odstupanja od projekta i da li su potrebne naknadne analize. Kontinualno praćenje funkcionisanja opreme za zaštitu od hidrauličkog udara tokom rada sistema predstavlja koristan izvor informacija i pruža mogućnost stalnog usavršavanja projektanta.

U drugom slučaju situacija je na prvi pogled lakša. Problem je uočen, traži se objašnjenje uzroka pojave, kao i ekonomično i pouzdano rešenje. Vreme i sredstva na raspolaganju su obično manja nego u prvom slučaju a odgovornost veća. Ipak, po mišljenju autora, ovo su najinteresantniji inženjerski zadaci, koji zahtevaju solidno znanje hidraulike i iskustvo u proučavanju prelaznih pojava.

U ovoj knjizi se obradjuju matematički i numerički modeli hidrauličkog udara pa se ne postavlja pitanje **kako** raditi hidrauličke analize za određivanje zaštite od hidrauličkog udara. Razvoj računara omogućio je analizu veoma složenih sistema u svim relevantnim režimima rada za prihvatljivo kratko vreme. Veoma složeni elementi mogu se jednostavno prikazati u matematičkom modelu. U poredjenju sa klasičnim metodama, kao što su grafičke, to je ogroman napredak u efikasnosti rada i povećanju oblasti primene. Medjutim time je otvoren i jedan veoma ozbiljan problem. Dok je kod primene grafičkih metoda inženjer morao da bude potpuno upućen u problem i da stalno kontroliše da li su rezultati logični, kod korišćenja savremenih programskih paketa to nije neophodno. Iako je to opšta istina u inženjerstvu, da posedovanje odgovarajućeg programskog paketa ne garantuje i kvalitet rešenja, ovde je to neophodno posebno istaći. Najvažniji deo posla kod određivanja zaštite od hidrauličkog udara je identifikacija opasnih situacija i izbor koncepcije zaštite. Tek posle preliminarnog određivanja dimenzija objekata za zaštitu pristupa se numeričkoj simulaciji koja treba

da bliže definiše objekte za zaštitu i da da potvrdu da je postignuta odgovarajuća zaštita. Pogrešnu koncepciju ne spasava tačan proračun. Zbog toga se ponekad dešava da predviđena "zaštita" od hidrauličkog udara objektivno povećava ugroženost sistema umesto da je dovede na inženjerski prihvatljivu meru.

9.2 Uzroci hidrauličkog udara

Prelazni režimi u cevovodima i cevnim mrežama javljaju se kao posledica regulacije u okviru normalnog rada sistema, iznenadnim kvarovima na sistemu, neodgovarajućim održavanjem, manevrima pogrešno izabrane opreme, a mogu biti izazvani spoljnim faktorima.

Jedno od važnijih pitanja koje se postavlja pred projektanta je verovatnoća i učestanost nekog događaja, i do koje mere treba sistem zaštititi od posledica takvog događaja. U nekim oblastima u kojima se koriste cevovodi (naftna industrija, nuklearne elektrane itd) ovo je regulisano tehničkim i zakonskim propisima. U vodovodu, kanalizaciji, navodnjavanju, rudarstvu i hidroenergetici to uglavnom nije slučaj. Dosta toga prepušteno je projektantu, koji treba da identifikuje najopasnije događaje, da proceni objektivnu ugroženost sistema i da odredi odgovarajuću zaštitu.

Uzroci hidrauličkog udara obično se razvrstavaju u tri grupe (Choudhry, 1978):

- Normalni radni uslovi. Ovde spadaju svi događaji nad kojima operater može da ima potpunu kontrolu, kao što su otvaranja i zatvaranja zatvarača za potrebe regulacije proticaja, uključivanje i isključivanje pumpi uz poštovanje projektom propisane procedure itd. Ovo je veoma važna grupa događaja zbog velike učestanosti događanja i zbog toga što se propusti u projektu tu najpre iskažu. Zahteva se potpuna zaštita za sve događaje iz ove grupe. Ne dozvoljavaju se nikakvi zastoji u funkcionisanju, dok pritisci ne smeju izaći iz dozvoljenih granica.
- Iznenadni događaji. Ovde spadaju događaji sa manjom verovatnoćom pojave. Oni se mogu predvideti, ali ipak dolaze neočekivano: ispad pumpi iz pogona usled nestanka struje, nepoštovanje propisane procedure rada, kvarovi opreme na cevovodu (klapne, zatvarači) ili objekata za zaštitu od hidrauličkog udara, itd. Ne dozvoljavaju se nikakva značajnija oštećenja cevovoda i opreme na njemu. Mogući su prolazni

poremećaji u radu sistema, kraći zastoji, čije trajanje treba u okviru hidrauličke analize proceniti.

- Katastrofalni događaji. U ovu grupu spadaju prirodne katastrofe, zemljotresi, poplave, ratna razaranja itd., kada većina infrastruktura ne radi. Ne može se ekonomično obezbediti potpuna zaštita cevovoda i u ovim uslovima, ali jedan deo zaštite postiže se dobrim projektovanjem, izborom trase, ugradnjom i slično.

Verovatno najopasniji događaj za većinu sistema sa pumpama je ispad pumpi iz pogona usled nestanka električne energije.

9.2.1 Primeri iz prakse

Ma koliko da se projektant trudi da predvidi moguće spletove okolnosti vezane za pojavu hidrauličkog udara, opasnost ipak postoji. Problemi izazvani prelaznim režimima dešavaju se mnogo češće nego što se o njima javno govori.

Sa druge strane, može se reći da je ozbiljnih oštećenja bilo srazmerno malo u poredjenju sa propustima koji se prave u projektovanju, održavanju i eksploataciji cevovoda. Razlozi za to su: postojanje rezerve u nosivosti materijala cevi u oblasti plastičnih deformacija, prisustvo slobodnog vazduha u cevovodu itd.

U svetskoj literaturi postoji nekoliko dokumentovanih primera koji se pominju u skoro svim udžbenicima (Choudhry, 1982; Wylie & Streeter, 1978). U Francuskoj je 1934. godine bilo uništeno reverzibilno postrojenje *Lac Blanc- Lac Noir* tokom probnog pogona, kada je poginulo nekoliko ljudi. Uzrok su bile vibracije lopatica sprovodnog kola centrifugalne pumpe. U Japanu je usled greške u rukovanju i kvara opreme došlo do pucanja cevovoda pod pritiskom na hidroelektrani Oigava.

Postoji veliki broj manje spektakularnih havarija, o kojima se može čitati u literaturi. Dva se mogu izdvojiti, jedan zbog velikog broja opisanih slučajeva (*Thorley, 1991*), a drugi, zbog interesantnog naslova rada (*Almeida, 1993*). Havarije i problemi u funkcionisanju cevovoda javljali su se i na ovim prostorima o čemu postoje pisani tragovi (*Radojković i dr., 1989; Pejović et al., 1980*).

9.3 Osnovni principi zaštite

Tehnike zaštite od hidrauličkog udara mogu se svrstati u dve grupe: jedne, kojima se utiče na brzinu propagacije poremećaja, i druge, kojima se utiče na smanjenje promene brzine, ΔV , jer promena piježometarske kote, $\Delta\Pi$, zavisi od te dve veličine. To se može videti iz relacije Žukovkog, do koje se došlo na samom početku razmatranja o prelaznim režimima:

$$\Delta\Pi = -\frac{a \cdot \Delta V}{g}. \quad (9.1)$$

Na brzinu propagacije poremećaja utiče se izborom materijala (redje, i oblika poprečnog preseka) cevovoda, kao i namernim ubacivanjem ograničenih količina vazduha.

Promena priraštaja brzine, ΔV , postiže se konstruktivnim rešenjima na samom cevovodu i izborom tipa i dimenzija regulacionih elemenata, zatvarača i slično, ili postavljanjem posebnih objekata, koji to treba da obezbede. Broj različitih načina zaštite je izuzetno velik, ali se većina njih može svrstati u neku od sledećih grupa:

- Promena (povećanje) prečnika cevovoda,
- Izbor tipa zatvarača i zakona zatvaranja,
- Povećanje inercije pumpe,
- Vodostani, obični, sa prigušivačem, jednosmerni itd.,
- Vazdušne komore,
- Rasteretni ventili,
- Nepovratni ventili,
- Obilazni vodovi itd.

Matematički opis ponašanja pojedinih objekata treba prilagoditi usvojenoj metodi rešavanja, i uključiti u numerički model kao odgovarajući granični uslov.

Analiza prelaznih režima, koja prethodi izboru adekvatne zaštite od hidrauličkog udara, pored provere ekstremnih vrednosti pritiska, treba da sadrži i analizu ekonomskih pokazatelja, početnu investiciju, funkcionisanje i troškove održavanja tokom celog eksploatacionog perioda i slično.

9.3.1 Definisane zakona zatvaranja zatvarača

Prema nekim autorima (*Thorly*, 1991) ovo spada u tzv. direktne mere zaštite cevovoda od hidrauličkog udara. Vreme zatvaranja treba da je dovoljno dugo da bi se početni talas odbio od uzvodnog dela cevovoda ($t_z > 2L/a$). Taj zahtev može lako da bude u koliziji sa nekim drugim, kao što je opasnost da se neki rezervoar ne prepuni ili isprazni, opasnost od ispuštanja toksičnih materija u okolinu, nekontrolisanog povećanja broja obrtaja turbine nakon ispada iz energetske sistema itd.

Čak i kada ne postoje nikakva posebna ograničenja ne radi se o jednostavnom produžavanju vremena zatvaranja zatvarača. U upotrebi su različiti dijagrami koji daju minimalne i maksimalne pritiske kod zatvarača i u presecima duž cevovoda u zavisnosti od vremena trajanja zatvaranja. Međutim, njihova upotrebljivost je sumnjiva jer se obično baziraju na neostvarivim pretpostavkama, kao što su linearna promena površine otvora zatvarača, ili, još gore, linearna promena proticaja, tokom zatvaranja. Efikasnost ove mere je u direktnoj zavisnosti od regulacionih karakteristika zatvarača što se razmatra u posebnom poglavlju ove knjige.

9.4 Smanjivanje brzine prostiranja talasa

Brzina prostiranja poremećaja zavisi od elastičnosti zidova cevi, stišljivosti tečnosti, oblika poprečnog preseka cevi i količine slobodnog vazduha u tečnosti.

Provodnici čiji se poprečni presek razlikuje od kružnog, pod uticajem povećanog unutrašnjeg pritiska teže da zauzmu oblik koji je blizak kružnom. Na taj način oni se više deformišu što ima za posledicu i značajnije smanjenje brzine prostiranja talasa. Međutim, zbog većih napreznja, potrebne debljine zidova provodnika su veće nego kod kružnih cevi, pa je pozitivan efekat nešto umanjen. Detaljna analiza opterećenja provodnika i stanja napona neophodna je da bi se odredili brzina prostiranja talasa i maksimalni naponi (*Wylie & Streter*, 1978). Cevi velikih prečnika zbog neravnomernog oslanjanja deformišu se i zauzimaju u normalnim uslovima elipsasti oblik, što smanjuje brzinu propagacije.

Savremena tehnologija pruža veliki izbor materijala različitih elastičnih karakteristika u skoro svim oblastima radnih pritisaka. U malim sistemima, kao što je kod distribucije goriva, internih hidrauličnih kontrolnih sistema, koriste se jako deformabilne deonice za ublažavanje udarnih talasa. Kod dužih

deonica taj efekat se gubi. Bez obzira na to, brzina propagacije poremećaja nije tako često odlučujući kriterijum za izbor materijala cevovoda.

U većini sistema za transport vode nalaze se određene količine slobodnog vazduha, koje i pored svih mera koje se primenjuju za odstranjivanje, ostaju u cevovodu. Pored negativnih efekata, kao što su, smanjenje kapaciteta cevovoda i značajne oscilacije pritiska pri nekontrolisanom oslobadjanju vazduha iz cevovoda, kontrolisano ubacivanje vazduha može biti jako korisno. Jedan od načina zaštite od kavitacije difuzora kod hidroelektrana je ubacivanje vazduha, što utiče i na smanjenje brzine talasa na način koji će biti objašnjen u nastavku.

Umesto kontinualnog upuštanja vazduha na jednom mestu, što ne garantuje njegov ravnomeran raspored, može se vazduh držati duž cevovoda u maloj plastičnoj cevi. Da bi se sprečilo skupljanje vazduha na jednom mestu, plastična cev je izdeljena na male deonice. Ovaj način zaštite bio je patentiran u Francuskoj (Wylie, Streeter, 1978).

9.4.1 Uticaj slobodnog i rastvorenog vazduha na promenu brzine prostiranja talasa u tečnosti

Čak i vrlo male količine (ravnomerno raspoređenog) slobodnog vazduha u tečnosti mogu značajno da smanje brzinu prostiranja talasa u cevi. Verovatno toj činjenici možemo da zahvalimo što se, i pored mnogobrojnih propusta u projektovanju, desio relativno mali broj havarija na sistemima pod pritiskom.

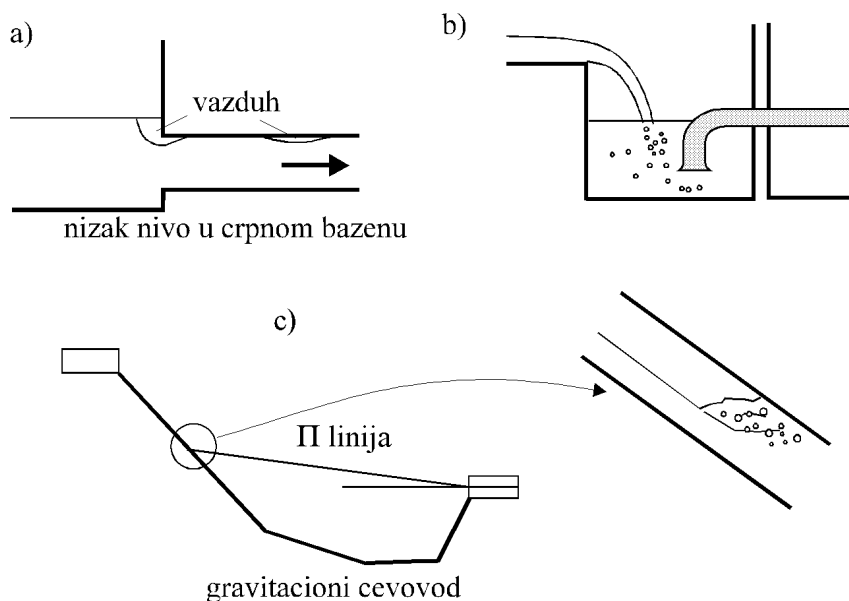
Pod normalnim uslovima (atmosferski pritisak, temperatura $T \approx 20^{\circ}C$) u vodi se nalazi između 1 i 2 % rastvorenog vazduha. Pored izdvajanja iz rastvora u presecima gde je smanjen pritisak, vazduh može na razne načine da dospe u vodu (slika 9.1). Kroz vodu se može kretati u vidu mehurića i paketa, ali i sakupljati na vertikalnim prelomima trase cevovoda, i, pre ili kasnije, pod povećanim pritiskom, rastvoriti.

Pojednostavljenom analizom može se doći do efektivne brzine propagacije mešavine slobodnog vazduha i vode. Promena pritiska dovodi do promene zapremine, koja se može razdvojiti na promenu zapremine tečnog i gasovitog dela, ΔV_{tec} i ΔV_g :

$$\Delta V = \Delta V_{tec} + \Delta V_g \quad (9.2)$$

Na osnovu pojedinačnih modula stišljivosti:

$$K_{tec} = -\frac{\Delta p}{\Delta V_{tec}/V_{tec}} \quad (9.3)$$



Slika 9.1: Uvlačenje vazduha

$$K_g = - \frac{\Delta p}{\Delta V_g / V_g} \quad (9.4)$$

dolazi se do efektivnog zajedničkog modula stišljivosti:

$$K_m = \frac{K_{tec}}{1 + \alpha \left(\frac{K_{tec}}{K_g} - 1 \right)} \quad (9.5)$$

gde je, $\alpha = V_g/V$, lokalna zapreminska koncentracija gasovite faze. Gustina mešavine iznosi:

$$\rho_m = \alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_{tec} . \quad (9.6)$$

Gustina gasa se dobija na osnovu izraza za idealan gas

$$\rho_g = \frac{p^{abs}}{RT} , \quad (9.7)$$

gde je R gasna konstanta, T , apsolutna temperatura i p^{abs} , apsolutni pritisak. Promena zapremine gasa dešava se pod izoternnim uslovima, pa je modul stišljivosti gasa, $K_g = p^{abs}$.

Ako se zanemari uticaj elastičnosti zida dolazi se do jednostavnog izraza u kome se javljaju karakteristike mešavine:

$$a_m = \sqrt{\frac{K_m}{\rho_m}} \quad (9.8)$$

Primer

Ukoliko je sadržaj slobodnog vazduha u vodi 1 %, sračunati brzinu prostiranja poremećaja. Srednja vrednost pritiska na posmatranoj deonici cevi iznosi 50 kPa, a temperatura vode je 20°C.

Gustina vode na temperaturi 20°C je:

$$\rho_{vode} = 998.2 \frac{kg}{m^3} .$$

Gasna konstanta za vazduh iznosi $R = 287 \text{ (m N)/(kg K)}$.

$$\rho_g = \frac{150}{287 \cdot (273 + 20)} = 1.78 \frac{kg}{m^3} .$$

Modul stišljivosti gasa pod izotermnim uslovima odgovara apsolutnom pritisku gasa, dakle, $K_g = 150 \text{ kPa}$, dok za vodu iznosi, $K_{vode} = 2070 \text{ MPa}$.

Gustina mešavine iznosi:

$$\rho_m = 1.78 \cdot 0.01 + 998.2 \cdot 0.99 = 988.2 \frac{kg}{m^3} ,$$

a efektivni modul stišljivosti:

$$K_m = \frac{2070}{1 + 0.01 \cdot (13800 - 1)} = 14.9 \text{ MPa} ,$$

što daje brzinu propagacije:

$$a_m = \sqrt{\frac{14.9 \cdot 10^6}{988}} = 123 \frac{m}{s} .$$

Dobijena vrednost znatno je manja i od brzine prostiranja poremećaja kroz vazduh ($\approx 340 \text{ m/s}$).

Izraz (9.5) nije pogodan za analizu jer se u njemu javlja α , zapreminska koncentracija, koja se značajno menja duž toka. Može se uvesti veličina,

$m = \rho_g(V_g/V) = \rho_g\alpha$, koja predstavlja masu slobodnog vazduha po jedinici zapremine mešavine. Tada je efektivni modul stišljivosti mešavine jednak

$$K_m = \frac{K_{tec}}{1 + \frac{mRT}{p} \left(\frac{K_{tec}}{p} - 1 \right)} \left(= \left(\frac{\alpha}{p^{abs}} + \frac{(1-\alpha)}{K_{tec}} \right)^{-1} \right). \quad (9.9)$$

Ako se vazduh nalazi pod višim pritiskom, ili ako se radi o fleksibilnijim cevima, treba uzeti u obzir i elastičnost cevovoda:

$$a = \left((\alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_{tec}) \left(\frac{\alpha}{p^{abs}} + \frac{(1-\alpha)}{K_{tec}} + \frac{D}{Ee} \right) \right)^{-1/2} \quad (9.10)$$

odnosno,

$$a = \sqrt{\frac{K_{tec}/\rho_m}{1 + \alpha \left(\frac{K_{tec}}{p^{abs}} - 1 \right) + \frac{K_{tec} D}{E e}}}. \quad (9.11)$$

Kod malih koncentracija vazduha gustina mešavine ne razlikuje se mnogo od gustine tečnosti, a takodje i zbog znatno većeg modula stišljivosti tečnosti u odnosu na p^{abs} , prethodni izraz se može pojednostaviti

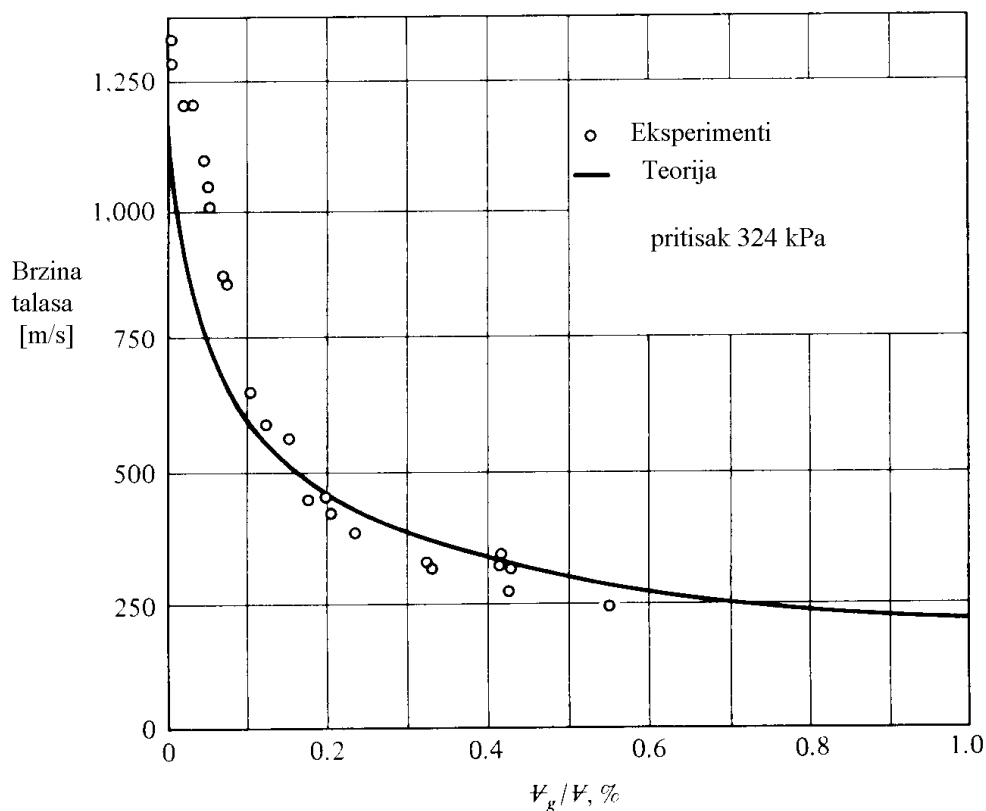
$$a' = \sqrt{\frac{K_{tec}/\rho_{tec}}{1 + (K_{tec}/E) \cdot (D/e) + (mK_{tec}RT)/(p^{abs})^2}}. \quad (9.12)$$

U izrazu (9.12) javlja se p^{abs} , što ukazuje na promenljivost brzine propagacije. Izraz je direktno upotrebljiv jer se pritisak javlja kao promenljiva u jednačinama hidrauličkog udara.

Na slici (9.2) upoređeni su eksperimentalni podaci o brzinama propagacije talasa sa teorijskim izrazom (9.12) (Kobori et al., 1955).

Izraz (9.12) može se iskoristiti za konstrukciju familije krivih zavisnosti brzine propagacije talasa od zapreminske koncentracije slobodnog vazduha u vodi (zapremina vazduha pri atmosferskom pritisku) i apsolutnog pritiska. Na slici (9.3) prikazane su krive za jednu kombinaciju $(K_{tec} D)/(E e) = 1$. Interesantno je da male količine vazduha mogu značajno da smanje brzinu propagacije talasa, ali isto tako, povećanje pritiska vraća brzinu propagacije talasa na normalnu.

Za potrebe inženjerske analize ove pojave treba rešiti dosta praktičnih numeričkih problema. Kod metode karakteristika pretpostavljeno je da su karakteristike prave linije, a podela cevi na deonice uradjena je tako da nema

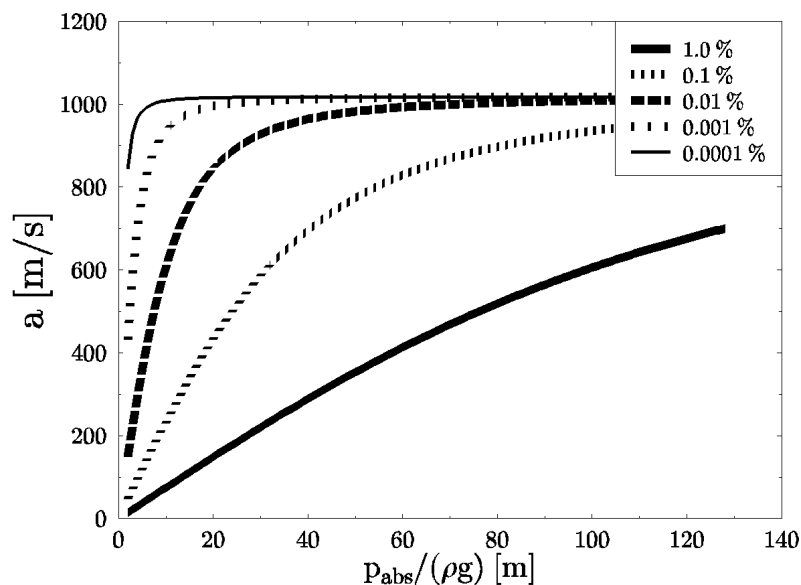


Slika 9.2: Eksperimentalni podaci o brzini propagacije talasa u cevi sa mešavinom vode i vazduha

potrebe za velikom interpolacijom. Kada se brzina propagacije menja, karakteristike nisu prave linije. Takodje, kod smanjenja brzine propagacije raste potreba za interpolacijom čime se značajno povećava numerička difuzija i smanjuje tačnost. Metoda interpolacije po prostoru je praktično neupotrebljiva.

9.5 Uticaj suspendovanih čestica na brzinu propagacije talasa

Suspendovane čestice mogu povećati ili smanjiti brzinu prostiranja poremećaja kroz fluid, sve u zavisnosti od fizičkih karakteristika čestica. Ako se radi o homogenoj mešavini, može se koristiti izraz sličan (9.10). Pod pretpostavkom



Slika 9.3: Brzine propagacije talasa u cevi sa mešavinom vode i vazduha

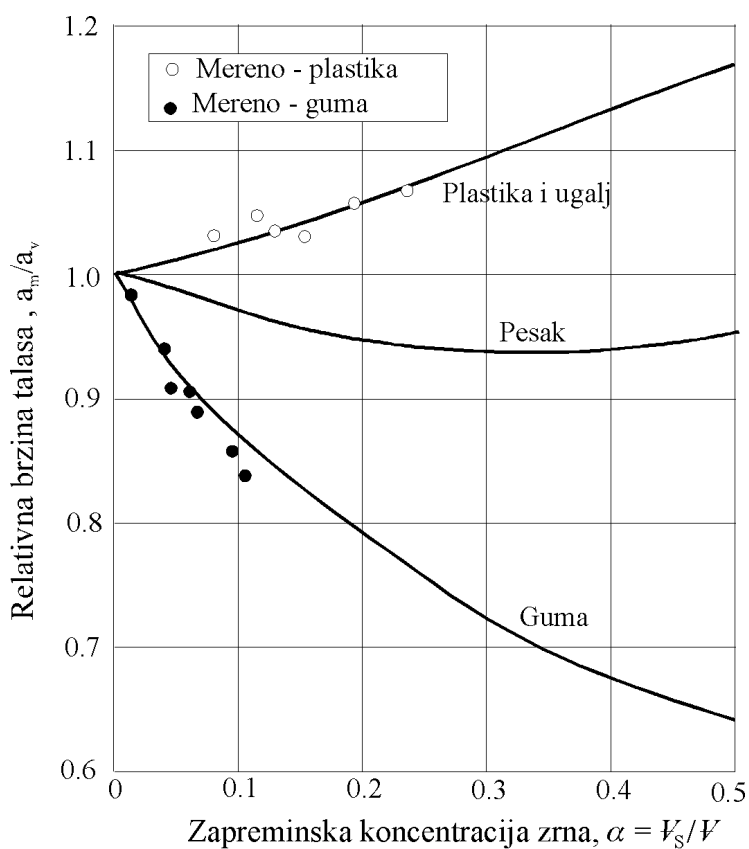
da su delići sferični, zapreminski modul stišljivosti čvrste faze može se proceniti na sledeći način,

$$K_s = \frac{E_s}{3(1 - 2\mu_s)}, \quad (9.13)$$

gde je E_s , Jangov modul elastičnosti, a μ_s , Poasonov koeficijent poprečne dilatacije.

U poredjenju sa koncentracijama vazduha, ovde se radi o znatno većim zapreminskim koncentracijama čvrste faze (10 – 20 – 50 %), pa je vrlo teško zadovoljiti pretpostavku o homogenoj mešavini. Takodje, prilikom prolaska elastičnog talasa kroz mešavinu, dolazi do relativnog kretanja suspendovanih čestica u odnosu na okolni fluid, sve dok unutrašnje trenje ne amortizuje te pokrete.

Na slici (9.4) preuzetoj iz literature (Thorley, 1980) prikazana je u bezdimenzionalnoj formi zavisnost brzine propagacije talasa u mešavini, a_m/a_v , od zapreminske koncentracije, $\alpha = V_s/V$, za nekoliko mešavina. Eksperimentalni podaci dati su za mešavine peska i gumenih čestica, a teorijski, za pesak, ugalj, plastiku i gumu. Fizičke karakteristike suspendovanog materijala date su u tabeli.



Slika 9.4: Uticaj koncentracije suspendovanih čestica na brzinu propagacije talasa (Thorley, 1980).

Materijal	Gustina [kg/m ³]	Modul stišljivosti [GPa]
Pesak	2660	16.00
Ugalj	1350	13.32
Plastika	1040	5.35
Guma	896	0.45

Ova oblast je još uvek nedovoljno izučena, ali zbog sve većeg značaja koji ima hidraulički transport (transport čestica čvrstog materijala u suspenziji) treba očekivati koncentrisanje istraživačkih potencijala na projektima iz ove oblasti.

9.6 Kavitacija u prelaznim režimima

U fluidu se skoro uvek nalazi određena količina rastvorenih gasova. Kada pritisak u fluidu padne ispod onog za koji koncentracija rastvorenih gasova postaje zasićena stvaraju se uslovi za izdvajanje gasova iz rastvora. Ako takvo stanje potraje, sav višak rastvorenih gasova iznad koncentracije zasićenja će se izdvojiti. Na primer, ako se voda, koja na atmosferskom pritisku sadrži 2 % rastvorenih gasova, izloži određeno vreme hidrostatičkom pritisku od (-50 kPa), izgubiće 1 % rastvorenog vazduha. Takodje, slobodni gasovi, koji se sa fluidom kreću u vidu mehurića, ili su zarobljeni na isturenim tačkama cevovoda, pod povećanim pritiskom, koji vlada u cevovodu, prelaze u rastvor, iako koncentracija rastvorenih gasova može biti prezasićena pod standardnim uslovima (atmosferski pritisak, temperatura 20 °C). Sa prezasićenom koncentracijom gasa (CO₂) sreću se uživaoci piva i gaziranih pića po otvaranju flaše, kao i korisnici vode u vodovodu ("bela voda").

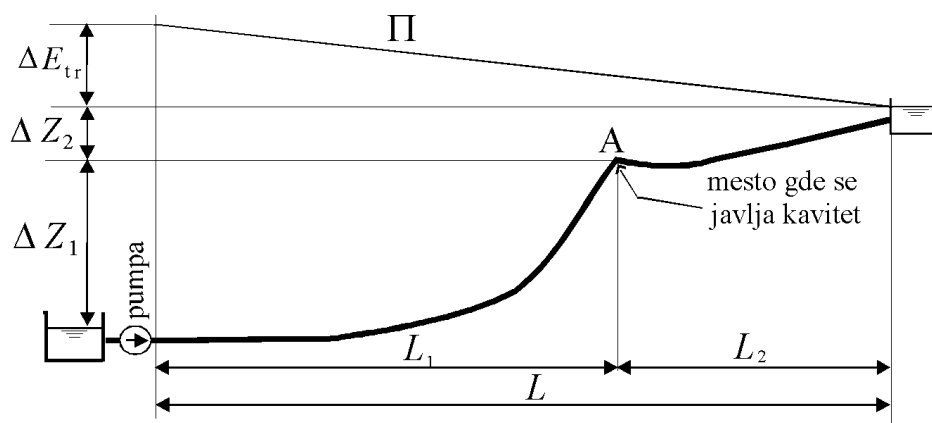
Kada apsolutni pritisak u vodi padne ispod ≈ 24 kPa (Fox, 1977), dolazi do intenzivnog izdvajanja najvećeg dela rastvorenih gasova u vodi. Kada pritisak padne do pritiska zasićene vodene pare na okolnoj temperaturi, dolazi do intenzivnog prelaska fluida u gasovitu fazu, odnosno, do ključanja ili kavitacije. Treba znati da do smanjenja pritiska dolazi usled rastezanja stuba tečnosti, pa kada pritisak padne do pritiska vodene pare, rastezanje ide na račun povećanja zapremine kaviteta ispunjenog vodenom parom. Ovo se još zove i razdvajanje (ili, raskidanje) stuba tečnosti (*column separation*), mada do potpunog prekida kontinuiteta fluida retko dolazi. Tokom faze povećanja pritiska, dolazi do kondenzacije vodene pare i nestanka kaviteta (ostaje slobodan samo jedan deo vazduha izdvojenog iz rastvora). Postoji razlika u ponašanju kaviteta, koji je nastao izdvajanjem rastvorenih gasova iz vode ili sakupljanjem mehurića vazduha na isturenim tačkama cevovoda pre prelaznih režima. Tada ne dolazi do oštrog povećanja pritiska jer veći deo vazduha ostane van rastvora da amortizuje udar. Kada je kavitet ispunjen vodenom parom, deformacije su slobodne bez promene pritiska, ali isto tako kavitet naglo nestaje kada pritisak poraste.

Ova pojava je bila predmet ozbiljnih istraživanja u poslednje vreme, jer se izvestan broj havarija cevovoda desio kada se u prelaznim režimima javljala kavitacija na delovima cevovoda. Opravdani strah od takvih situacija je značajno uvećan i usled nepoznavanja fenomena i korišćenja neadekvatne terminologije (*raskidanje stuba tečnosti i ponovno sudaranje, kada dolazi do*

enormnog povećanja pritiska). Prvi pokušaji matematičke simulacije ove pojave zasnivaju se na pretpostavci o razdvajanju (*raskidanju*) stuba tečnosti, jer je to logična neophodnost u linijskom modelu neustaljenog tečenja homogenog fluida.

9.6.1 Pojednostavljena analiza ponašanja kaviteta u cevi

Kod ispada pumpe iz pogona stvaranje kaviteta je moguće na isturenim tačkama cevovoda (primer, blizina tačke A na slici 9.5).



Slika 9.5: Procena veličine kaviteta modelom krutog udara

Pritisak u toj tački veoma brzo dostiže pritisak vodene pare i ostaje toliki sve dok se ne stvore uslovi za nestanak kaviteta, odnosno, do odbijanja talasa od nizvodnog rezervoara. Deformabilnost cevovoda i fluida daleko je manja od promene zapremine kaviteta, tako da se u pojednostavljenim analizama može koristiti model krutog udara za dva razdvojena stuba tečnosti. Najvažnije je to što se može doći i do procene povećanja pritiska kod ponovnog spajanja stubova tečnosti.

Stub tečnosti, dužine L_1 , između pumpe i tačke A relativno brzo se umiri jer ne može nazad kroz pumpu, dok drugi deo, dužine L_2 , nastavlja da se kreće prema rezervoaru. Na njega deluju, sila pritiska i težine, $(\rho g \Delta Z_2 + (p_{abs} - p_{vp})) A$ i sila trenja, $\lambda \rho V |V| A L / (2D)$, koje ga zaustavljaju i posle ubrzavaju do sudara sa delom tečnosti koja miruje. U literaturi se mogu naći gotova analitička rešenja za određivanje rastojanja, X_E , koje će nizvodni stub tečnosti preći dok se ne zaustavi, kao i za određivanje brzine, V_E , koju će

stub tečnosti imati pre sudara. Povećanje pijezometarske kote zavisi upravo od te brzine i jednako je

$$\Delta\Pi = -\frac{aV_E}{2g} . \quad (9.14)$$

Dvojka u imeniocu pojavljuje se zbog toga što se talas prostire u oba smera, nizvodno i uzvodno. Od nizvodnog rezervoara talas se odbija sa promenom znaka, dok se od uzvodnog kraja odbija bez promene znaka pa dolazi do privremenog povećanja pritiska. Ako je do formiranja kaviteta došlo neposredno iza pumpe onda je povećanje pijezometarske kote, nakon nestanka kaviteta jednako

$$\Delta\Pi = \frac{aV_E}{g} . \quad (9.15)$$

Pravo stanje pritisaka u cevovodu može se dobiti samo detaljnijom analizom matematičkim modelom zasnovanim na kompletnim jednačinama neustaljenog tečenja koji kavitet tretira kao poseban granični uslov.

9.6.2 Kavitet kao granični uslov

Ova oblast je bila predmet posebnih istraživanja poslednjih desetak godina pa je teško dati relevantan prikaz ove problematike jer istraživanja nisu okončana. Prikazaće se jedan jednostavan model koji u dosta slučajeva daje prihvatljive rezultate (Provoost, 1976).

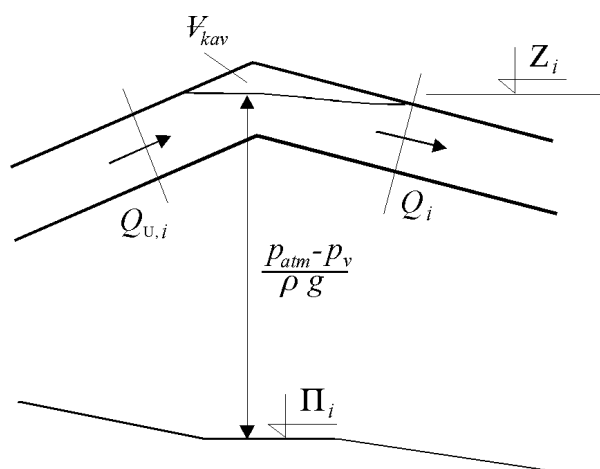
Više o tome zainteresovani mogu naći u literaturi (Ewing, 1980, Streeter, 1983 itd.), a posebno u izveštaju Radne grupe IAHR¹ za kavitaciju u prelaznim režimima (Cabrera, Fanelli, 1992).

Neophodno je identifikovati mesta gde postoji mogućnost stvaranja kaviteta, kao što su vertikalni prelomi trase, presek nizvodno od zatvarača, nizvodno od crpne stanice i slično. U matematičkom modelu, tu se dozvoljava pojava kaviteta kada pritisak padne do pritiska vodene pare (slika 9.6).

Posle toga pijezometarska kota se u tom preseku ne menja, dolazi do intenzivnog isparavanja vode (kavitacija) i slobodnog povećanja kaviteta. Promena zapremine kaviteta tokom intervala vremena Δt , iznosi

$$\Delta V_{kav} = (Q_{U,i} - Q_i) \Delta t . \quad (9.16)$$

¹ IAHR - International Association for Hydraulic Research (Medjunarodno udruženje za hidraulička istraživanja)



Slika 9.6: Pojava kaviteta u prelaznim režimima

Proticaji uzvodno i nizvodno od kaviteta, $Q_{U,i}$ i Q_i , se razlikuju. Mogu se sračunati na osnovu pozitivne i negativne karakteristike

$$Q_{U,i}^{n+1} = \frac{CP - \Pi_i^{n+1}}{B}, \quad (9.17)$$

$$Q_i^{n+1} = \frac{\Pi_i^{n+1} - CM}{B}. \quad (9.18)$$

Pijezometarska kota je jednaka

$$\Pi_i^{n+1} = Z_i - \frac{p_{atm} - p_v}{\rho g}, \quad (9.19)$$

sve dok je zapremina kaviteta veća od nule. U prethodnom izrazu, p_v , predstavlja apsolutni pritisak vodene pare na temperaturi okoline, a p_{atm} , atmosferski pritisak.

Najinteresantniji trenutak je kada kavitet nestaje, što se u računu registruje da je zapremina kaviteta postala manja od nule. Ponovo se uspostavlja kontinuitet fluidne struje i može se koristiti standardna metoda proračuna.

Proračun je osetljiv na izbor mesta i broja preseka gde se može pojaviti kavitet. Moguće su velike greške kod približno horizontalnih cevovoda.

Primer proračuna ispada iz pogona pumpi na cevovodu sa negativnom geodetskom razlikom, kod koga se očekuje pojava kaviteta na isturenim tačkama cevovoda, prikazan je na slici (9.7). Na podužnom preseku cevovoda prikazane su obvojnice ekstremnih vrednosti pijezometarskih kota koje su registrovane

tokom proračuna. Naznačeni su i preseki (od 1 do 4) u kojima su zabeležene promene proticaja i pijezometarskih kota, prikazane na istoj slici. Vrlo brzo po ispadu pumpe iz pogona dolazi do stvaranja kaviteta na nekoliko mesta na cevovodu. Izmedju preseka 1 i 2 zasigurno nema kaviteta, jer pritisak ostaje pozitivan, a linije za proticaje u ova dva preseka se poklapaju. U preseku 3, kao i izmedju preseka 3 i 4, postoje kaviteti jer se proticaji u presecima 2, 3 i 4 razlikuju. U 120 sekundu pumpa se ponovo uključuje i kaviteti jedan za drugim nestaju. Posle 200 s praktično nema kaviteta. Nestanak kaviteta prati skokovita promena pijezometarske kote.

9.7 Vodostan kao granični uslov

Vodostan je jedno od najskupljih rešenja zaštite od hidrauličkog udara. Sa druge strane, u pogledu funkcionisanja, to je verovatno i najpouzdanija zaštita.

Vodostan se nalazi u čvoru u kom se spajaju dve cevi, 1 i 2 (slika 9.8). Jednačina kontinuiteta za taj čvor glasi

$$Q_{1,N}^{n+1} = Q_{2,1}^{n+1} + Q_V^{n+1} . \quad (9.20)$$

Duž pozitivne karakteristike, na kraju cevi 1, važi

$$\Pi_{1,N}^{n+1} = CP_1 - B_1 Q_{1,N}^{n+1} , \quad (9.21)$$

dok, duž negativne karakteristike, na početku cevi 2, važi:

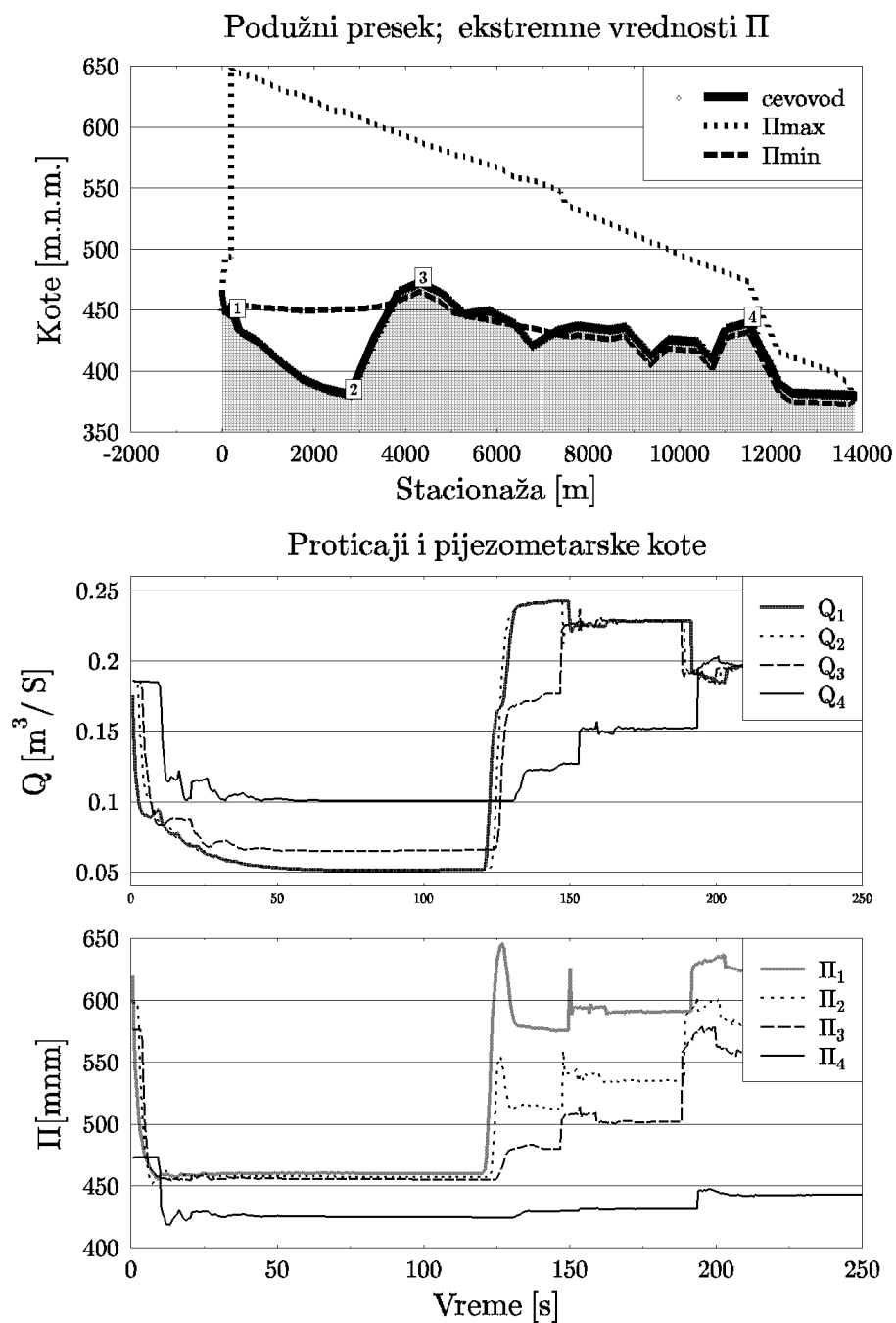
$$\Pi_{2,1}^{n+1} = CM_2 - B_2 Q_{2,1}^{n+1} . \quad (9.22)$$

Zbog pretpostavke o zanemarenju brzinskih visina i standardnih lokalnih gubitaka, pijezometarske kote na kraju cevi 1, i na početku cevi 2, se izjednačuju

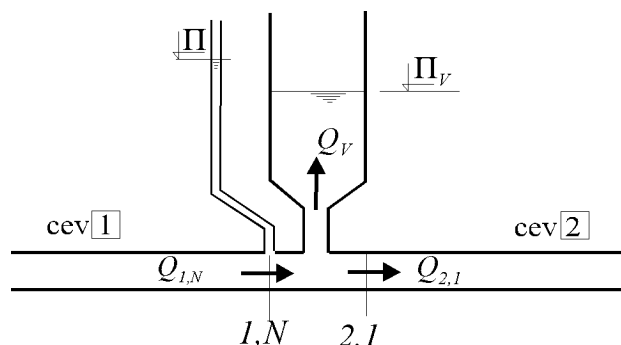
$$\Pi_{1,N}^{n+1} = \Pi_{2,1}^{n+1} = \Pi^{n+1} . \quad (9.23)$$

Prethodne četiri jednačine sadrže pet nepoznatih veličina, za čije rešenje je potreban još jedan uslov. Kod običnog vodostana, to je jednakost pijezometarske kote u čvoru i nivoa vode u vodostanu, odnosno

$$\Pi_V^{n+1} = \Pi^{n+1} , \quad (9.24)$$



Slika 9.7: Ispad pumpi iz pogona i ponovni start; rezultati proračuna pod pretpostavkom o lokalizovanoj kavitaciji.



Slika 9.8: Vodostan - oznake

Promena nivoa vode u vodostanu kroz vreme je data jednačinom kontinuiteta za vodostan

$$\frac{d\Pi_V}{dt} = \frac{Q_V}{A_V}, \quad (9.25)$$

odnosno,

$$\Pi_V^{n+1} = \Pi_V^{n-1} + 2 \frac{Q_V^n \Delta t}{A_V}, \quad (9.26)$$

s tim, da se na prvom koraku proračuna, umesto (9.26), primenjuje neka druga metoda.

Postupak rešavanja je vrlo jednostavan. Za sračunatu vrednost piježometarske kote na osnovu (9.26), iz jednačina (9.21) i (9.22), se dobijaju proticaji, $Q_{1,N}^{n+1}$, odnosno, $Q_{2,I}^{n+1}$, dok se iz jednačine kontinuiteta (9.20) dobija koliko vode ulazi u vodostan, Q_V^{n+1} .

Iz razloga koji su objašnjeni u Poglavlju 5 za vodostane kod derivacionih hidroelektrana, traže se ekonomična rešenja. U ovom slučaju ekonomičnije rešenje predstavlja vodostani sa prigušivačem.

Matematički model hidrauličkog udara omogućava projektantu da sagleda i drugi aspekt tog problema. Naime, prigušivač na ulazu u vodostan smanjuje raspon između ekstremnih vrednosti nivoa vode u vodostanu, ali, u isto vreme, ne omogućava potpuno rasterećenje poremećaja stvorenog kod turbine. Deo oscilacija pritiska prolazi pored vodostana. Optimalno rešenje je ono koje daje najmanje dimenzije vodostana (najniža cena gradjenja i održavanja), uz prihvatljivo povećanje ekstremnih vrednosti pritiska i neporemećene regulacione karakteristike turbina.

U matematičkom modelu, umesto izraza (9.24), koristi se

$$\Pi^{n+1} = \Pi_V^{n+1} + r_P Q_V^{n+1} |Q_V^{n+1}|, \quad (9.27)$$

gde je r_P parametar prigušivača, koji je jednak, $(1 + \xi_P)/2gA_P^2$. ξ_P je koeficijent lokalnog gubitka na prigušivaču, a A_P površina poprečnog preseka prigušivača. Apsolutna vrednost proticaja znači da se mora voditi računa o smeru tečenja, i da piježometarska kota u čvoru može biti veća ili manja od kote nivoa u vodostanu, odnosno:

$$\text{ako je } \Pi_V^{n+1} > \Pi^{n+1} \Rightarrow Q_V^{n+1} = -\sqrt{\frac{\Pi_V^{n+1} - \Pi^{n+1}}{r_{PN}}}, \quad (9.28)$$

$$\text{ako je } \Pi_V^{n+1} < \Pi^{n+1} \Rightarrow Q_V^{n+1} = \sqrt{\frac{\Pi^{n+1} - \Pi_V^{n+1}}{r_{PP}}}, \quad (9.29)$$

gde r_{PN} i r_{PP} , predstavljaju parametre prigušivača za tečenje u negativnom, odnosno, pozitivnom smeru.

Broj jednačina odgovara broju nepoznatih, a sam postupak rešavanja je nešto složeniji nego kod običnog vodostana. Jednačine (9.21) i (9.22) uvrste se u jednačinu kontinuiteta (9.20), odakle se dobije, Π^{n+1} , kao funkcija poznatih veličina na prethodnom trenutku i proticaja, Q_V^{n+1} ,

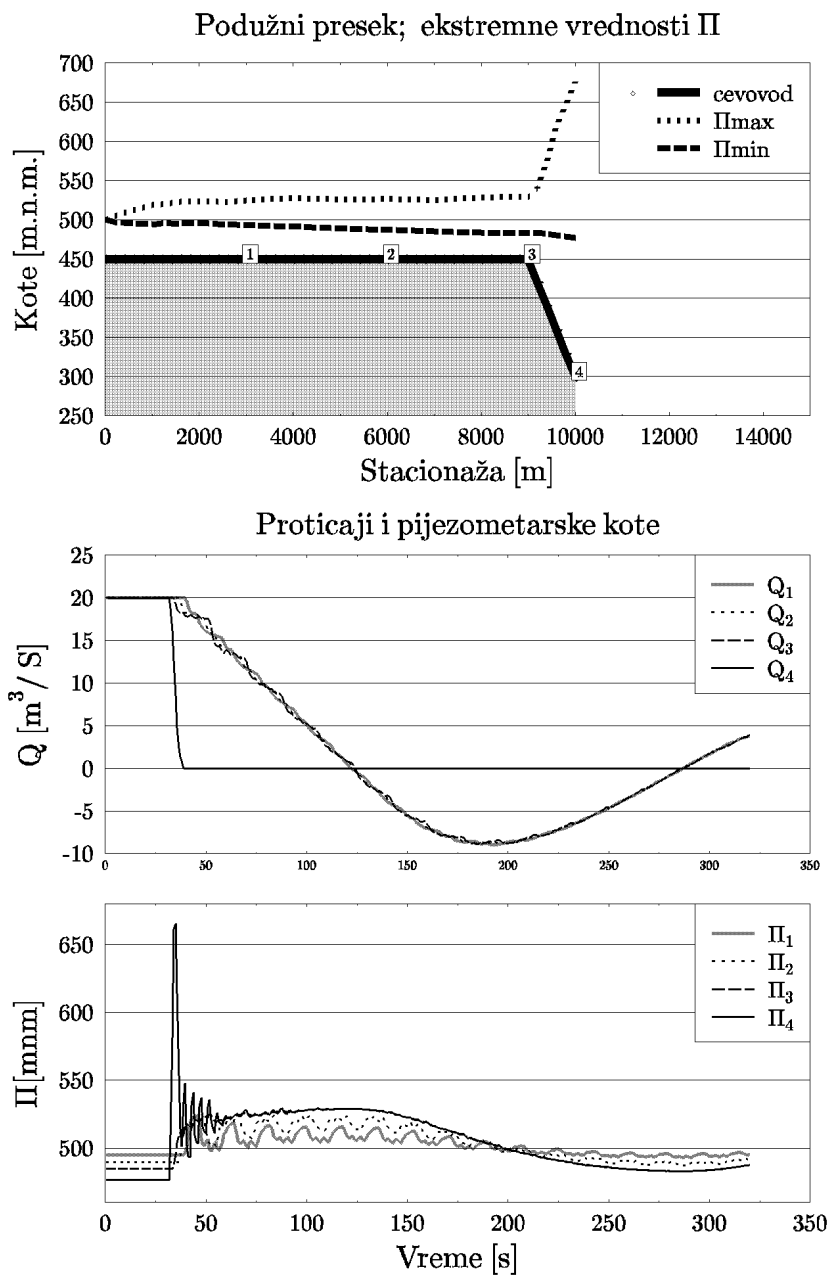
$$\Pi^{n+1} = \frac{\left(\frac{CP}{B_1} + \frac{CM}{B_2}\right) - Q_V^{n+1}}{\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}}. \quad (9.30)$$

Kada se Π^{n+1} zameni u (9.27) dobija se kvadratna jednačina čije jedno rešenje predstavlja proticaj Q_V^{n+1} .

Ovaj isti problem razmatran je u okviru poglavlja o vodostanima matematičkim modelom krutog udara. Kod matematičkog modela elastičnog udara, koriste se znatno kraći vremenski koraci kod približnog rešavanja osnovnih jednačina i praktično ne postoji mogućnost nestabilnog rešenja. Ipak, kod integrisanja jednačine kontinuiteta za vodostan, zbog veće tačnosti, zadržana je metoda *leap-frog*.

Na slici (9.9) prikazani su rezultati proračuna za iste podatke kao u Primeru 4 u Poglavlju 5 ($D_T = 3$ m, $L_T = 9000$ m, $D_V = 5$ m, $Q_0 = 20$ m³/s, $\lambda = 0.0125$), ali matematičkim modelom hidrauličkog udara. Pretpostavljeno je linearno zatvaranje regulatora proticaja za 7 s. Oscilacije nivoa u vodostanu su praktično iste, a na dijagramima su date veličine koje matematički model krutog udara ne može da da.

Na podužnom preseku vidi se da su intenzivne promene pritiska ostale u cevovodu pod pritiskom, a da se prihvatljivo mali deo poremećaja prostire u dovodni tunel.

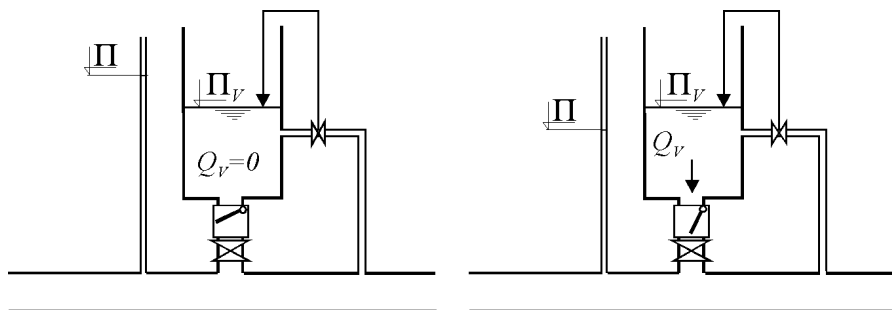


Slika 9.9: Rezultati proračuna oscilacija vode u tunelu i vodostanu matematičkim modelom hidrauličkog udara

9.7.1 Jednosmerni vodostan

Osnovni nedostatak klasičnog vodostana je slobodna površina, koja se, u ustaljenom tečenju, poklapa sa piježometarskom kotom u cevi na tom mestu. Time je unapred određen njegov visinski položaj. Međutim, prednosti vodostana mogu se iskoristiti i lokalno kod zaštite isturenih delova cevovoda od pojave niskih pritisaka i vakuuma (slika 9.10).

Jednosmerni vodostani su posude, relativno male zapremine, sa slobodnom površinom, koja je u normalnim uslovima ispod piježometarske linije cevovoda.



Slika 9.10: Jednosmerni vodostan

Na cevi koja spaja posudu sa cevovodom nalazi se klapna, koja se otvara kada piježometarska kota u cevi padne ispod nivoa vode u posudi. Voda u posudi se dopunjava (i obnavlja) kroz cev malog prečnika, na kojoj je regulacioni zatvarač sa plovkom.

Matematički model jednosmernog vodostana je praktično isti kao kod vodostana sa prigušivačem. Umesto jednačina (9.28) i (9.29) ovde treba napisati:

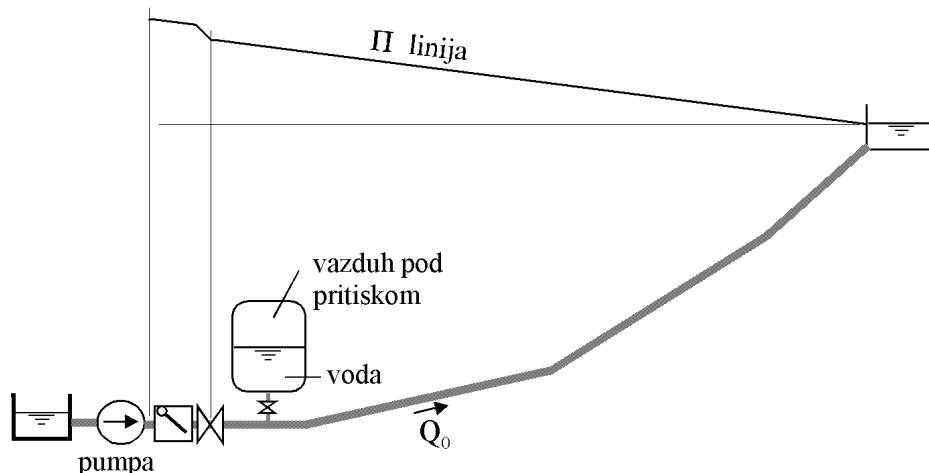
$$\Pi_V^{n+1} > \Pi^{n+1} \quad Q_V^{n+1} = -\sqrt{\frac{\Pi_V^{n+1} - \Pi^{n+1}}{R_{PN}}} \quad (9.31)$$

$$\Pi_V^{n+1} < \Pi^{n+1} \quad Q_V^{n+1} = 0 \quad (9.32)$$

9.8 Vazдушna komora

Princip rada vazdušne komore je isti kao kod vodostana, a koristi se na mestima gde bi vodostani bili tehnički i ekonomski neprihvatljivi. Dok se

vodostani najčešće primenjuju kod hidroenergetskih postrojenja, vazdušne komore, ili vodostani pod pritiskom (vidi Poglavlje 5), se najčešće primenjuju kod crpnih stanica (slika 9.11). Da bi se ublažile promene brzine na cevovodu, izazvane promenom graničnog uslova na cevi, vazdušna komora prima, ili dodaje u cevovod, određenu količinu vode.

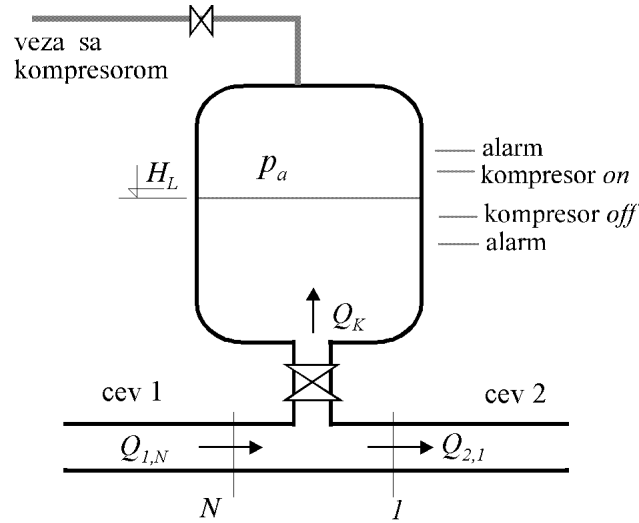


Slika 9.11: Vazdušna komora na potisnoj strani crpne stanice

Da bi se smanjila visina objekta u odnosu na visinu vodostana, iznad vode se nalazi vazduh pod pritiskom, različitim od atmosferskog. Na taj način, zaštita je efikasna u širokom rasponu radnih pritisaka, a omogućena je i značajna elastičnost kod rada cevovoda. Promena piježometarske kote kod komore, odnosno, promena sile pritiska, je znatno brža nego kod vodostana istih dimenzija, zbog promene zapremine vazduha.

Efikasnost rada vazdušne komore zavisi od raspoložive količine vazduha u trenutku nastanka poremećaja. Zbog rastvaranja vazduha u vodi, količina vazduha se neprestano smanjuje, pa je neophodno dopunjavati ga. Kompresor, koji je neophodna prateća oprema vazdušne komore, uključuje se kada zapremina vazduha padne ispod minimalne, a isključuje se kada zapremina dostigne maksimalnu. Postoje tehnička rešenja vazdušne komore kod kojih je gas pod pritiskom membranom razdvojen od fluida koji se transportuje, tako da nema gubitaka vazduha ni potrebe za kompresorom.

Većina prelaznih režima nastaje neočekivano, pri proizvoljnoj početnoj zapremini vazduha. Zato je neophodno da se analizom obuhvate obe granične vrednosti zapremine vazduha, minimalna, da bi se proverilo da li je zaštita



Slika 9.12: Vazдушna komora

svih delova cevovoda potpuna, i maksimalna, da bi se proverilo postoji li mogućnost pražnjenja komore i nekontrolisanog ulaska vazduha u cevovod.

Matematički (numerički) model je sličan onom za vodostan. Jednačine za vodostan, (9.20), (9.21), (9.22), zaključno sa jednačinom (9.27), su primenljive i kod vazdušne komore:

$$\begin{aligned}
 Q_{1,N}^{n+1} &= Q_{2,1}^{n+1} + Q_K^{n+1} \\
 \Pi_{1,N}^{n+1} &= CP_1 - B_1 Q_{1,N}^{n+1} \\
 \Pi_{2,1}^{n+1} &= CM_2 + B_2 Q_{2,1}^{n+1} \\
 \Pi_{1,N}^{n+1} &= \Pi_{2,1}^{n+1} = \Pi^{n+1} \\
 \Pi_{1,N}^{n+1} &= \Pi_K^{n+1} + R_P Q_K^{n+1} |Q_K^{n+1}|
 \end{aligned}$$

Pijezometarska kota vode u komori, Π_K^{n+1} , zavisi od nivoa vode u komori, H_L^{n+1} , i od pritiska vazduha, p_a^{n+1} :

$$\Pi_K^{n+1} = H_L^{n+1} + \frac{p_a^{n+1}}{\rho g} \quad (9.33)$$

Za promenu nivoa se može koristiti *leap-frog* metoda:

$$H_L^{n+1} = H_L^{n-1} + \frac{2Q_K^n \Delta t}{A_K} \quad (9.34)$$

Pritisak, p_a^{n+1} , zavisi od zapremine vazduha, ali i od brzine promene zapremine i razmene toplote sa okolinom. Ta zavisnost se prikazuje politropskom relacijom sa idealni gas:

$$p_a^{abs} \cdot V_a^m = const \quad (9.35)$$

gde je p_a^{abs} apsolutni pritisak vazduha u komori ($p_a^{abs} = p_a + p_{atm}^{abs}$), V_a , odgovarajuća zapremina vazduha, a m , politropski koeficijent. Vrednost koeficijenta m se kreće između 1.0, za izotermne uslove, i 1.4, za adijabatske uslove. Najčešće korišćena je srednja vrednost, 1.2 (do 1.3), jer su na početku prelaznih režima, promene zapremine brze, bliske adijabatskim, dok se kasnije usporavaju. Promena zapremine vazduha se dobija slično jednačini (9.34)

$$V_a^{n+1} = V_a^{n-1} - 2Q_K^n \Delta t, \quad (9.36)$$

čime se kompletira sistem jednačina za čvor u kome se nalazi vazдушna komora.

Napisane jednačine omogućavaju eksplicitno dobijanje svih veličina, sa integracijom jednačina (9.34) i (9.36), metodom *leap-frog*, koja je drugog reda tačnosti, a koja, kao što je već napomenuto, ne može biti korišćena od prvog koraka integracije.

Jedan od načina rešavanja datog sistema jednačina ukratko će biti objašnjen u nastavku.

Postupak rešavanja jednačina numeričkog modela. Jednačine pozitivne i negativne karakteristike se kombinuju sa jednačinom kontinuiteta da bi se dobio sledeći izraz

$$\Pi^{n+1} = \frac{B_1 C M + B_2 C P}{B_1 + B_2} - \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} Q_k^{n+1}, \quad (9.37)$$

odnosno,

$$\Pi^{n+1} = C_1 - C_2 Q_k^{n+1}, \quad (9.38)$$

gde C_1 predstavlja vrednost pijezometarske kote na spoju dve cevi, kada nema vazdušne komore.

Iz jednačina (9.33 – 9.36) eksplicitno se dobija

$$\Pi_k^{n+1} = H_L^{n-1} + 2 \frac{Q_K^n \Delta t}{A_k} + \frac{const}{\rho g (V_a^{n-1} - 2Q_K^n \Delta t)^m} - \frac{p_{atm}^{abs}}{\rho g}. \quad (9.39)$$

Kada se jednačine (9.38) i (9.39) uvrste u jednačinu (9.27) dobija se:

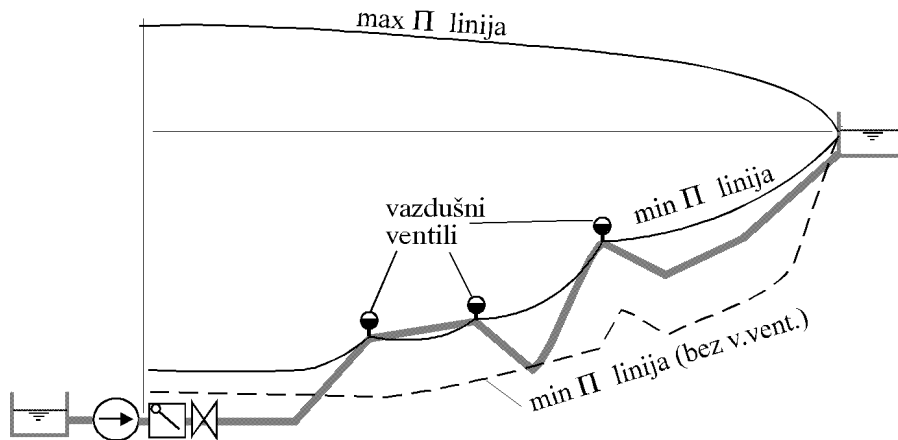
$$C_1 - \Pi_k^{n+1} = C_2 Q_k^{n+1} + r_P Q_k^{n+1} |Q_k^{n+1}| \quad (9.40)$$

gde je nepoznat samo proticaj Q_k^{n+1} . Ovo je kvadratna jednačina, koja ima dva rešenja. Znak proticaja odgovara znaku leve strane jednačine. U jednačinama se mogu javiti dve vrednosti za parametar prigušivača, r_{PP} i r_{PM} , (tzv. asimetrični prigušivač) u zavisnosti od smera tečenja vode.

9.9 Vazdušni ventili

Vazdušni ventili rade na istom principu kao i jednosmerni vodostani. Otvaraju se kada pijeziometarska kota u cevi padne ispod kote ventila, ali umesto vode (ili fluida koji se transportuje) ubacuju vazduh u cev. Jeftiniji su i lakši za održavanje, ali manje pouzdani i potencijalno opasniji ako nisu dobro dimenzionisani.

Na slici (9.13) prikazan je podužni profil jednog cevovoda sa obvojnica ekstremnih vrednosti pijeziometarske kote odakle se može videti dejstvo vazdušnih ventila kojima se sprečava pojava vakuuma na cevovodu.



Slika 9.13: Zaštita cevovoda vazdušnim ventilima

U hidrauličkim analizama vazdušnih ventila uvode se sledeće pretpostavke:

- Vazduh ulazi u cev lakše nego što izlazi. Kod ventila koji se koriste za zaštitu od hidrauličkog udara postoje dva otvora, veliki i mali, od

- Vazduh ulazi u cev lakše nego što izlazi. Kod ventila koji se koriste za zaštitu od hidrauličkog udara postoje dva otvora, veliki i mali, od kojih se veliki otvara kada vazduh ulazi u cev. Ulazak vazduha je pod adijabatskim uslovima.
- Vazduh ostaje blizu mesta gde je ventil,
- Masa uvučenog vazduha je znatno manja od mase vode na posmatranoj deonici cevi.
- Širenje i skupljanje vazduha koji je ušao u cev obavlja se pod izotermnim uslovima.

Mogu se uočiti četiri režima rada vazdušnog ventila:

1. Ulazak vazduha podzvučnom brzinom

$$Q_m = C_{ul} \cdot A_{ul} \sqrt{2p_0\rho_0 \frac{m}{m-1} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{2/m} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/m+1} \right]}. \quad (1.41)$$

$$Q_m = C_{ul} \cdot A_{ul} \sqrt{7p_0\rho_0 \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{1.43} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1.714} \right]}. \quad (1.42)$$

Ovo se dešava za $p_0 > p > 0.53p_0$, gde je Q_m proticaj mase vazduha, p_0 atmosferski pritisak, a p apsolutni pritisak u cevi.

2. Ulazak vazduha brzinom zvuka, za $p < 0.53p_0$

$$Q_m = C_{ul} \cdot A_{ul} \frac{0.528\sqrt{m}}{\sqrt{RT_0}} p_0 \quad (1.43)$$

gde je T_0 , apsolutna spoljna temperatura, a R , gasna konstanta. Imajući u vidu da vazdušni ventili treba da spreče pojavu vakuuma, eventualni rad u ovom režimu znači da ventil nije dobro projektovan. Praktično se ne sme dozvoliti da pritisak u cevi padne ispod $0.9p_0$, jer posle toga proticaj veoma sporo raste.

3. Izlazak vazduha podzvučnom brzinom

$$Q_m = -C_{izl} \cdot A_{izl} \sqrt{2 \cdot p\rho \frac{m}{m-1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{2/m} - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{(1/m)+1} \right]}, \quad (1.44)$$

odnosno,

$$Q_m = -C_{izl} \cdot A_{izl} \cdot p \sqrt{\frac{7}{RT} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{1.43} - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1.714} \right]}, \quad (1.45)$$

za pritiske u granicama $p_0/0.53 > p > p_0$.

4. Izlazak vazduha kritičnom brzinom

$$Q_m = -C_{izl} A_{izl} \sqrt{p \cdot \rho \cdot m \left(\frac{2}{n+1} \right)^{\frac{m+1}{m-1}}} \quad (1.46)$$

odnosno, za $m = 1.4$,

$$Q_m = -C_{izl} A_{izl} \frac{0.528 \sqrt{m}}{\sqrt{RT}} \cdot p \quad (1.47)$$

za pritiske veće od $p_0/0.53$.

Površine otvora, kao i koeficijenti proticaja vazduha se razlikuju u zavisnosti od toga da li vazduha ulazi u cev, ili izlazi. Pošto je pretpostavljeno da da vazduh prolazi kroz vazdušni ventil pod adijabatskim uslovima, vrednost politropskog koeficijenta u prethodnim jednačinama je, $m = 1.4$.

~~1.9.1 Dimenzionisanje vazdušnih ventila~~

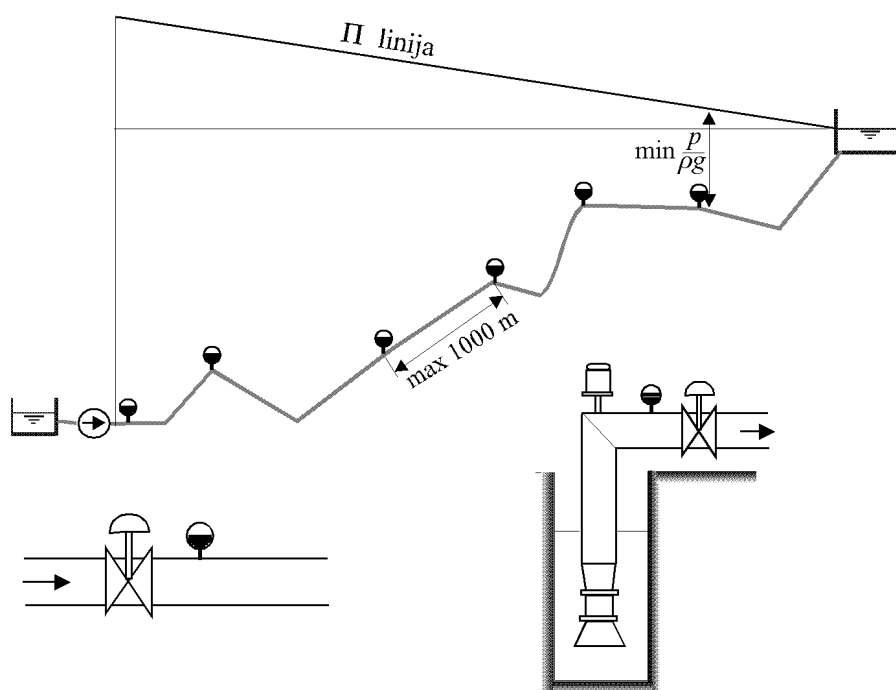
~~Postoje određena pravila za postavljanje vazdušnih ventila na cevovodima za transport vode koja su prikazana na slici (1.14), i koja se ukratko mogu iskazati kao:~~

- ~~● na svakom vertikalnom prelomu trase,~~
- ~~● na svakom lokalnom minimumu pritiska,~~
- ~~● na svakih 500 – 1000 m na dužim deonicama u istom padu,~~
- ~~● na svakom mestu gde se može javiti vakuum (nizvodno od bunarske pumpe, nizvodno od zatvarača itd.).~~

9.9.1 Dimenzionisanje vazdušnih ventila

Postoje određena pravila za postavljanje vazdušnih ventila na cevovodima za transport vode koja su prikazana na slici (9.14), i koja se ukratko mogu iskazati kao:

- na svakom vertikalnom prelomu trase,
- na svakom lokalnom minimumu pritiska,
- na svakih 500 – 1000 m na dužim deonicama u istom padu,
- na svakom mestu gde se može javiti vakuum (nizvodno od bunarske pumpe, nizvodno od zatvarača itd.).



Slika 9.14: Položaj vazdušnih ventila na cevovodu za transport vode

Za izbor veličine vazdušnog ventila moraju se znati uslovi pod kojima će se ventil otvoriti, odnosno količina vazduha koju treba ubaciti u cev i kasnije evakuisati. Do tih podataka dolazi se numeričkom simulacijom prelaznih

režima u cevovodu, gde i vazdušni ventili moraju biti uzeti u obzir. Nekada je količinu vazduha koja ulazi kroz ventil jednostavno proceniti. Kod ispada bunarske pumpe iz pogona, vazdušni ventil koji se nalazi nizvodno od nje, treba da nadoknadi količinu vazduha koja po zapreminskom proticaju odgovara proticaju pumpe.

Na slici (9.15) prikazan je poprečni presek jednog usisno-izduvnog vazdušnog ventila u svim fazama rada (Maezawa). Za evakuaciju i upuštanje vazduha postoje dva otvora, veliki (A), koji zatvara klip na vodjicama, i mali (B), koji zatvara kugla manje gustine od vode. Na slici a) prikazana je situacija koja se dešava kod punjenja praznog cevovoda, odnosno evakuacije velikih količina vazduha iz cevovoda. Kada u vazdušni ventil udje voda, ona podiže kuglu i klip i zatvara oba otvora. Da ne bi došlo do velikog povećanja pritiska usled zatvaranja vazdušnog ventila, kod punjenja cevovoda brzine fluida ne smeju da predju 0.1 - 0.2 m/s, odnosno, pad pritiska na vazdušnom ventilu ne sme da bude veći od 0.01 bar.

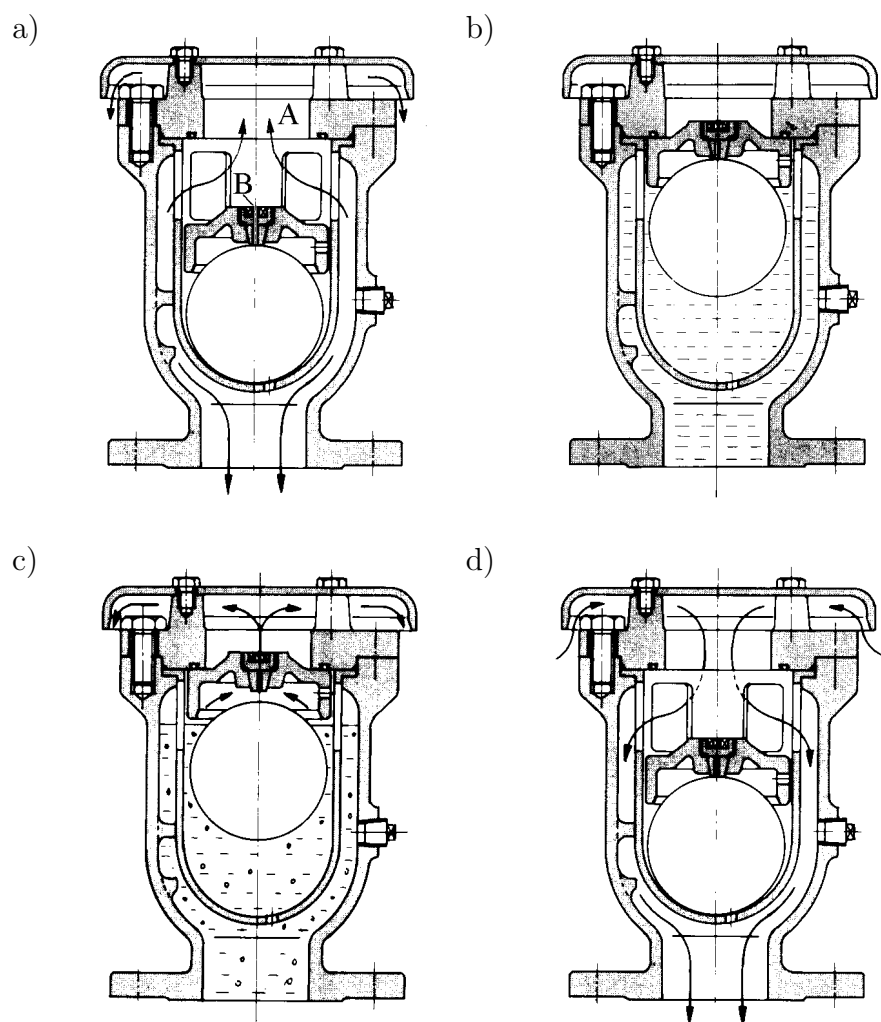
Na slici b) oba otvora na vazdušnom ventilu su zatvorena. Na slici c) prikazano je kao se evakušu male količine vazduha. Slika d) prikazuje situaciju za koju je ventil i namenjen. Da bi se sprečila pojava vakuuma ubacuje se vazduh, a da bi se to obavilo uz mali pad pritiska, otvoren je otvor (A). I pored potrebe da se ubace relativno velike količine vazduha otvori vazdušnih ventila su značajno manji od prečnika cevovoda zbog mnogo manje gustine vazduha.

Za procenjeni proticaj vazduha traži se odgovarajući ventil, za šta mogu poslužiti dijagrami propusne moći vazdušnih ventila koje isporučuju proizvođači (slika 9.16). Dozvoljeni pad pritiska pri ulasku vazduha u cevovod je 0.05, do najviše 0.1 bar.

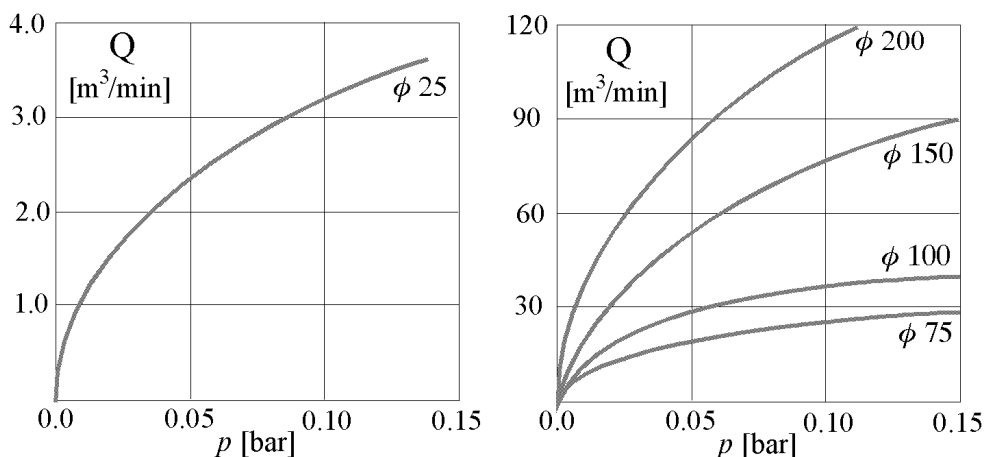
Manji otvor služi za kontrolisano ispuštanje malih količina vazduha koji se kreće u mehurićima zajedno sa vodom ili se izdvojio iz rastvora na mestu gde se nalazi ventil. Veličina tog otvora određuje se na osnovu procenjene količine vazduha u vodi.

9.10 Rasteretni ventili

U nekim situacijama, kao na primer kod hidroelektrana i kod dugačkih cevovoda, ne može se izbeći brzo zatvaranje zatvarača na kraju cevovoda. Da bi se sprečilo veliko povećanje pritiska postavljaju se posebni zatvarači koji se brzo otvaraju čim pritisak predje neku zadanu vrednost (slika 9.17).

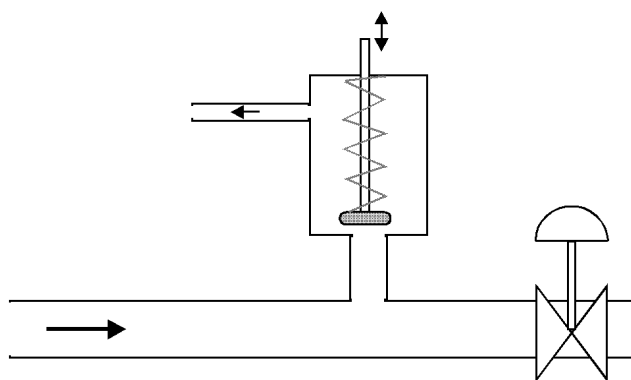


Slika 9.15: Shematski prikaz rada usisno-izduvnog vazdušnog ventila (Maetzawa)



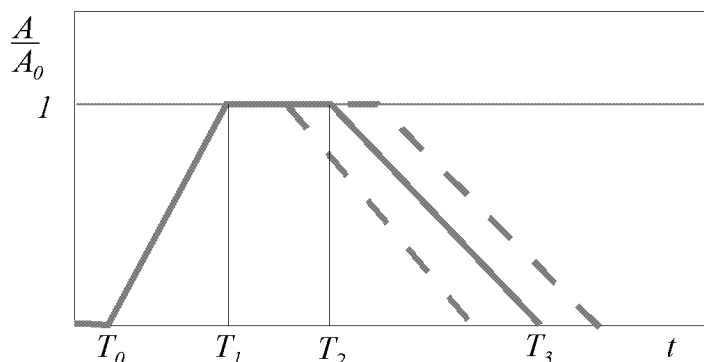
Slika 9.16: Propusna moć vazdušnih ventila (Maezawa)

Ispuštanjem određene količine vode iz cevovoda ublažena je efektivna promena brzine u cevovodu (Ivetić, 1993). Na slici (9.18) prikazan je manevar jednog takvog zatvarača. Vreme teče od trenutka kada je pritisak u kontrolnoj tački prešao zadatu vrednost. Vreme kašnjenja, T_0 , i vreme otvaranja, $T_1 - T_0$, zavise od konstruktivnog rešenja zatvarača, dok se vreme koje zatvarač ostaje otvoren, $T_2 - T_1$, i vreme za koje se zatvarač zatvara, $T_3 - T_2$, mogu podešavati. Od strane proizvođača regulacionih zatvarača



Slika 9.17: Rasteretni ventil

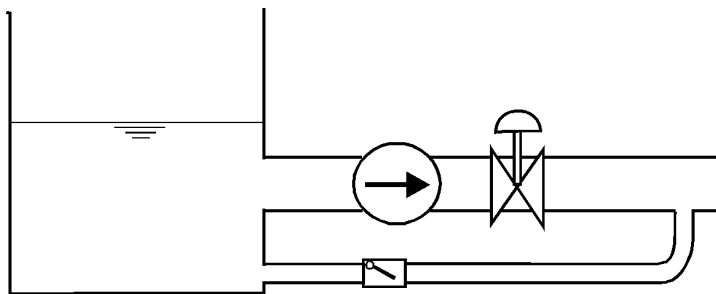
preporučuje se ugradnja rasteretnih ventila kao standardne opreme u većini crpnih stanica (označeni su sa RV na slikama 11.13, 11.14 i 11.15).



Slika 9.18: Otvaranje i zatvaranje rasteretnog ventila

9.11 Obilazni vodovi

U prethodnom poglavlju analizirane su pumpe, pojedinačno i u okviru crpnih stanica, kao granični uslov u numeričkom modelu hidrauličkog udara. Vrlo često to su i najugroženija mesta, koja treba posebno štiti od hidrauličkog udara.



Slika 9.19: Obilazni vod (by-pass) u crpnoj stanici

Po ispadu iz pogona zatvarač na potisnoj strani se obično zatvara da bi se pumpa izolovala od prelaznih režima. Da bi se sprečila pojava velikih pritisaka na usisnoj strani i niskih pritisaka na potisnoj strani, kod buster crpnih stanica, kao i kod cevovoda sa malom denivelacijom između usisnog i potisnog rezervoara, postavlja se obilazni vod sa klapnom (slika 9.19). Obilazni vod i klapna na njemu mogu imati manji nominalni prečnik od glavnog cevovoda, a samim tim lakše je obezbediti da klapna ima dobre dinamičke karakteristike.

9.12 Završne napomene

Zaštita od hidrauličkog udara nije tako egzaktna stvar kao što bi to moglo da izgleda na osnovu rezultata numeričke simulacije prelaznih režima modelima hidrauličkog udara. Postoji mnogo neizvesnosti vezanih za realne sisteme, kako u pogledu stvarne dispozicije sistema, stanja cevovoda i opreme, režima rada i regulacije, tekućeg održavanja i slično, koje otežavaju posao projektantu.

Matematički modeli koji su na raspolaganju su jako dobri, o čemu svedoče poredjenja sa eksperimentima u kontrolisanim laboratorijskim uslovima (Wylie, Streeter, 1978), čak i za vrlo složene uslove kao što je kavitacija u prelaznim režimima (Provoost, 1983). Malo je teže, ali izvodljivo, rekonstruisati merenja na sistemima u eksploataciji (Prodanović, Ivetić, 1994). Očigledno, najveća neizvesnost je kod projektovanja zaštite od hidrauličkog udara za sisteme koji tek treba da se grade, sa opremom koja nije specificirana. Glavni izvori neizvesnosti su

- Koeficijent trenja za cevi može se znati sa tačnošću od $\pm 10\%$, i to za ustaljeno tečenje; Za neustaljeno tečenje koriste se iste relacije,
- Količina slobodnog i rastvorenog vazduha zavisi od lokalnih uslova i od rešenja vodozahvata,
- Karakteristike pumpe znaće se tek kod isporuke; Karakteristike u četiri kvadranta isporučene pumpe verovatno se neće ni znati,
- Mnogo malih promena sistema nastaje u kasnijim fazama projekta, kada je projekat zaštite od hidrauličkog udara već završen; Te promene projekta, koje su male u smislu osnovne namene sistema, mogu biti veoma značajne za prelazne režime (recimo, postavljanje leptirastog zatvarača umesto kuglastog),
- Pojedini priključci na sistem izvode se tokom same izgradnje cevovoda, ili nakon toga,
- Kod faznog projektovanja i izvodjenja, pojedine faze rade odvojene grupe projekatnata bez odgovarajuće koordinacije i ponekad bez razmatranja kompletnog sistema u prelaznim režimima.

Na osnovu svega ovoga jasno je da je najveći problem kod analize hidrauličkog udara određivanje relevantnih ulaznih podataka i dispozicije, definisanje režima i situacija koje treba analizirati, a tek onda dolazi tačnost numeričkog postupka.

Veliki deo mogućih problema može se prevazići proširenjem standardnog postupka određivanja zaštite od hidrauličkog udara, naročito za sisteme od velike važnosti. Ta proširenja standardnog postupka podrazumevaju

- Objekte za zaštitu treba birati sa određenom rezervom ili sa mogućnošću naknadnog prilagođavanja izvedenom stanju,
- Druga hidraulička analiza treba da se uradi po završetku svih faza projekta a pre probnog pogona. Tada će se uzeti u obzir sve promene projekta u odnosu na početno analizirano stanje i stvarne karakteristike isporučene opreme.
- Puštanje u probni pogon treba raditi u prisustvu kompetentnog i iskusnog stručnjaka za hidraulički udar, uz provodjenje određenih testova prelaznih režima, koji će poslužiti za identifikaciju stvarnih karakteristika sistema.
- Prilikom probnog pogona treba obaviti merenja najznačajnijih veličina kao dokaz o ostvarenim karakteristikama sistema na početku eksploatacije, koje se mogu bitno razlikovati od projektovanih.

Bibliografija

- [1] Almeida A.B., 1992, Accidents and incidents: an harmful/powerful way to develop expertise on pressure transients, *Hydraulic Transients with Water Column Separation*, Universidad Politecnica de Valencia & IAHR.
- [2] Cabrera E., Fanelli M.A., 1992, *Hydraulic Transients with Water Column Separation*, Universidad Politecnica de Valencia & IAHR.
- [3] Ewing D.J.F., 1980, Allowing for free air in waterhammer analysis, 3rd International Conference on Pressure Surges, BHRA.
- [4] Fox J. A., 1977, *Hydraulic analysis of unsteady flow in pipe networks*, The Macmillan Press Ltd.

- [5] Ivetić M., 1993, Zaštita od hidrauličkog udara magistralnih cevovoda sa primerom cevovoda Petlovo Brdo - Mladenovac, Monografija u čast prof. Miloja Milojevića, Građevinski fakultet, Beograd.
- [6] Kobori T., Yokoyama S., Miyashiro H., 1955, Propagation velocity of pressure wave in pipe line, Hitachi Hyoron, Vol. 37, No. 10.
- [7] Pejović S., Krsmanović Lj., Gajić A., Obradović D., 1980, Kaplan turbine accidents and reverse water hammer, 3rd Int. Conf. on Pressure Surges, BHRA.
- [8] Prodanović D., Ivetić M., 1994, Merenja na vodovodnom sistemu Male i Velike Vrbice, Izveštaj Instituta za hidrotehniku GF Beograd.
- [9] Provoost G.A., 1976, Investigation into cavitation in a prototype pipeline caused by water hammer, 2nd Int. Conf. on Pressure Surges, BHRA.
- [10] Radojković M., Obradović D. i Maksimović Č., 1989, *Računari u komunalnoj hidrotehnici*, Građevinska knjiga, Beograd.
- [11] Streeter V.L., 1983, Transient cavitating pipe flow, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 109, No. 11, ASCE.
- [12] Thorly A.R.D., 1980, Transient propagation in slurries with hold-up, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 106, No HY8.
- [13] Thorley A. R. D., 1991, *Fluid transients in pipeline systems*, D. & L. George Ltd. England.
- [14] Wylie E. B., Streeter V. L., 1978, *Fluid Transients*, McGraw-Hill.

Poglavlje 10

Oscilatorno kretanje i vibracije

U prethodnim poglavljima razmatrane su promene pritiska i proticaja velikog intenziteta sa namerom da se utvrde ekstremne vrednosti pritisaka i da se proverí da li one mogu ugroziti statičku i funkcionalnu sigurnost cevovoda. Zbog disipacije energije usled trenja i deformacija fluida i cevi, poremećaji pritiska i proticaja se relativno brzo amortizuju, pa opasnost po cevovod postoji samo tokom prvih nekoliko perioda. Kod objašnjenja fenomena hidrauličkog udara na primeru prostog cevovoda (na početku poglavlja 6), utvrđeno je da je pojava periodična i zbog toga se koriste izrazi kao oscilatorne promene, ili jednostavno, oscilacije pritiska i proticaja.

Oscilacije malog intenziteta, koje mogu biti izazvane nekom periodičnom pobudom, kao što je odvajanje vrtloga, talasi u rezervoaru, zatvarač koji ne zaptiva dobro, pumpa i slično, mnogo se duže održavaju u sistemu. Kao takve one nisu važne za dimenzionisanje sistema. Medjutim, ponekad dolazi do povećanja amplituda njihovih oscilacija i to se zove rezonanca. Ako se desi da frekvencija pobude, koja može biti i vrlo male amplitude, bude ceo broj puta veća od sopstvene frekvencije cevovoda, može se formirati stojeći talas vrlo značajnog intenziteta. Za održavanje i pojačavanje oscilacija neophodno je da postoji ulaz energije u sistem, koji je veći od disipacije. Zabeleženo je nekoliko ozbiljnih havarija hidroenergetskih postrojenja koje su bile izazvane oscilacijama pritiska, odnosno, proticaja, a manifestacije te pojave su svakodnevene (brujanje kućne slavine, duvački instrumenti itd).

Ovi problemi mogu biti vrlo ozbiljni, pa im treba posvetiti pažnju. Gde god postoji mogućnost pojave oscilacija treba preduzeti sve da se one spreče. Medjutim, pitanje je koliko se analiza može uraditi u fazi projektovanja da bi se problemi potpuno izbegli. Onog trenutka kada se problemi u eksploataciji

pojave, situacija je jasna. Tada se može identifikovati uzrok i naći rešenje.

Problemi oscilacija i rezonance mogu se analizirati standardnim metodama u realnom vremenu, koje su objašnjene ranije. Sračunate promene pritiska i proticaja posmatraju se kao vremenske serije čiji frekventni sadržaj treba odrediti nekom pogodnom metodom (na primer, Furijeovom transformacijom). Na isti način mogu se analizirati vremenske serije dobijene diskretizacijom izmerenih promena pritiska i proticaja. Neki pokazatelji vremenskih serija, kao što su koeficijenti korelacije, autokorelacije, prenosne funkcije sistema i slično, kao i neke transformacije vremenskih serija, kao što je filtriranje (redukovanje frekventnog sadržaja) mnogo efikasnije se mogu uraditi u frekventnom domenu. Nešto o ovome prikazano je na kraju ovog poglavlja, a više u Prilogu B.

Godinama se u analizi oscilatornog kretanja koriste analogne analitičke metode pozajmljene iz elektrotehnike, koje omogućavaju neuporedivo brže analize. Koriste se linearizovane diferencijalne jednačine i dolazi se do algebarskih jednačina u frekventnom domenu (umesto vremena, frekvencija je nezavisno promenljiva veličina), koje treba kombinovati sa odgovarajućim graničnim uslovima da bi se došlo do rešenja zadatka. Sve dok važe linearizovane jednačine može se koristiti i princip superpozicije.

Pretpostavlja se da nema promene srednjih vrednosti proticaja i pijezometarskih kota u sistemu pa se taj deo odstranjuje iz jednačina. Pretpostavlja se da su odstupanja od srednjih vrednosti periodične veličine koje se mogu prikazati trigonometrijskim funkcijama, kao i kompleksnim eksponencijalnim funkcijama (Prilog B). Odstupanje pijezometarske kote od srednje vrednosti izražava se kao

$$\Delta\Pi \cos \omega t = \operatorname{Re}[\Delta\Pi^* \exp(i \omega t)] , \quad (10.1)$$

gde $\operatorname{Re}[\]$ označava realni deo kompleksnog broja, kojim se predstavlja ukupna promena pijezometarske kote. $\Delta\Pi^*$ je kompleksna veličina, koja je funkcija samo rastojanja x , a $\exp(i \omega t)$ je funkcija vremena t i frekvencije ω , a i je imaginarna jedinica $\sqrt{-1}$. U celom ovom poglavlju radiće se sa kompleksnim brojevima, ali podrazumeva se da nas zanima samo realni deo kompleksnog broja. Jednakost (10.1) o ekvivalentnosti dva načina prikazivanja periodičnih promena sledi iz Ojlerove relacije, koja glasi

$$\exp(i \omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) .$$

10.1 Osnovne jednačine

Koristi se analogija između jednačina za hidraulički udar i opštih jednačina za prostiranje električne struje kroz provodnike, koje glase

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial i}{\partial x} = 0, \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + s_L \frac{\partial i}{\partial t} + r_{el} i = 0, \quad (10.3)$$

gde je $c = C/l$, podužna kapacitivnost, $s_L = L/l$, podužna induktivnost, $r_{el} = R/l$, podužna otpornost, a u i i , napon i jačina struje.

Jednačine za hidraulički udar uzimaju se pojednostavljene, bez konvektivnih članova i nagiba cevi

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (10.4)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\lambda Q |Q|}{2 A^2 g D} = 0. \quad (10.5)$$

Oznake u jednačinama za hidraulički udar su iste kao u prethodnim poglavljima. Za uspostavljanje analogije neophodno je linearizovati član sa trenjem. Promenljive Q i Π razdvajaju se na srednje vrednosti, \bar{Q} i $\bar{\Pi}$, i na oscilatorne komponente odstupanja od srednje vrednosti, Q' i Π' ,

$$Q = \bar{Q} + Q' \quad \Pi = \bar{\Pi} + \Pi'. \quad (10.6)$$

Izvodi promenljivih veličina pišu se na sledeći način

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial x} = \frac{\partial Q'}{\partial x},$$

jer su po definiciji izvodi srednje vrednosti proticaja kod oscilatornog kretanja, \bar{Q} , po vremenu i po rastojanju, jednaki nuli. Član sa trenjem se razvija u red oko srednje vrednosti

$$\frac{\lambda Q^2}{2gDA^2} = \frac{\lambda(\bar{Q} + Q')^2}{2gDA^2} = \frac{\lambda \bar{Q}^2}{2gDA^2} + \frac{\lambda \bar{Q}}{gDA^2} Q' + \dots$$

Red konvergira ako je $Q' < \bar{Q}$, i kao dovoljno dobra aproksimacija zadržavaju se samo prva dva člana. Zamenom u jednačine (10.4) i (10.5) dobija se

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q'}{\partial x} = 0, \quad (10.7)$$

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q'}{\partial t} + rQ' = 0. \quad (10.8)$$

Poredjenjem sa jednačinama za prostiranje električne struje utvrđuje se da se u ovim jednačinama javljaju analogne hidrauličke veličine, $1/gA \leftrightarrow s_L$, inertansa, $gA/a^2 \leftrightarrow c$, kapacitansa, i $\lambda\bar{Q}/gDA^2 = r$, otpornost.

Korišćenje izraza za trenje, koji, inače, važi za ustaljeno tečenje, u oscilatornom tečenju nije korektno za srednje i više frekvencije jer tangencijalni napon nije u fazi sa srednjom brzinom. Inercijalni član treba modifikovati množenjem faktorom ζ ($s_L = \zeta/gA$), koji je za laminarno tečenje jednak $4/3$, a za turbulentno se od 1.11, za $Re = 2500$, približava vrednosti 1.00, kako Rejnoldsov broj raste. Rejnoldsov broj se računa sa \bar{Q} .

Jednačine (10.7) i (10.8) rešavaju se metodom razdvajanja promenljivih (Wylie, Streeter, 1978). Parcijalnim diferenciranjem i kombinovanjem jednačina mogu se eliminisati Q' ili Π'

$$\frac{\partial^2 Q'}{\partial x \partial x} = c s_L \frac{\partial^2 Q'}{\partial t \partial t} + r c \frac{\partial Q'}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x \partial x} = c s_L \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial t \partial t} + r c \frac{\partial \Pi'}{\partial t}.$$

Pretpostavlja se da je rešenje druge jednačine $\Pi' = X(x) T(t)$, gde je X funkcija samo x , a T funkcija samo t . Dobija se

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T} \left(c s_L \frac{d^2 T}{dt^2} + r c \frac{dT}{dt} \right) = \gamma^2, \quad (10.9)$$

gde je γ^2 konstanta nezavisna od x i t , koja se zove koeficijent prostiranja. Rešenje prve jednakosti glasi

$$X = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x},$$

gde su A_1 i A_2 integracione konstante. Kao partikularno rešenje druge jednačine u (10.9), pretpostavlja se

$$T = A_3 e^{s t}, \quad (10.10)$$

gde je s kompleksna veličina, nezavisna od x i t . Zamenom u jednačinu (10.9) dobija se

$$\gamma^2 = c s(s_L s + r) . \quad (10.11)$$

Partikularno rešenje za oscilatornu pijezometarsku kotu i proticaj glasi

$$\Pi' = e^{st}(C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x}) , \quad (10.12)$$

$$Q' = -\frac{c s}{\gamma} e^{st}(C_1 e^{\gamma x} - C_2 e^{-\gamma x}) . \quad (10.13)$$

Veličina s naziva se Laplasovom promenljivom ili kompleksnom frekvencijom. Ima realni i imaginarni deo, $s = \sigma + i\omega$.

Za fluid u jednoj cevi definiše se još jedna važna kompleksna veličina, nezavisna od x i t , karakteristična impedansa

$$Z_C = \frac{\gamma}{c s} . \quad (10.14)$$

Karakteristična impedansa, Z_C , i koeficijent prostiranja, γ , zavise od fizičkih karakteristika fluida i cevovoda, i promenljive frekvencije s .

Jednačine (10.12) i (10.13) mogu se napisati na sledeći način

$$\Pi'(x, t) = \Pi(x) e^{st} \quad (10.15)$$

$$Q'(x, t) = Q(x) e^{st} , \quad (10.16)$$

gde su, $\Pi(x)$ i $Q(x)$, kompleksna pijezometarska kota i proticaj u svakom preseku x cevovoda. Poredjenjem jednačina, (10.15) i (10.16), sa, (10.12) i (10.13), vidi se da je

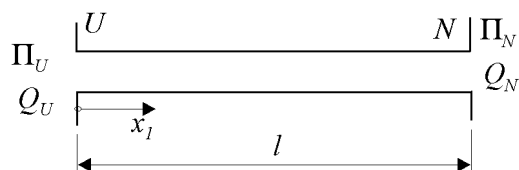
$$\Pi(x) = C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x} , \quad (10.17)$$

$$Q(x) = -\frac{1}{Z_C}(C_1 e^{\gamma x} - C_2 e^{-\gamma x}) . \quad (10.18)$$

Ako se posmatra deonica cevi dužine l (slika 10.1) sa presecima U i N , na uzvodnom i na nizvodnom kraju cevi, integracione konstante se mogu odrediti pomoću vrednosti pijezometarske kote i proticaja u jednom preseku, recimo u preseku U ,

$$C_1 = \frac{1}{2}(\Pi_U - Z_C Q_U) , \quad (10.19)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(\Pi_U + Z_C Q_U) . \quad (10.20)$$



Slika 10.1: Cev

Zamenom integracionih konstanti u izrazima za rešenje i uvođenjem hiperboličkih funkcija,¹ dobijaju se kompleksna piježometarska kota i kompleksni proticaj u zavisnosti od položaja preseka na cevi

$$\Pi(x) = \Pi_U \cosh(\gamma x) - Z_C Q_U \sinh(\gamma x), \quad (10.21)$$

$$Q(x) = -\frac{\Pi_U}{Z_C} \sinh(\gamma x) + Q_U \cosh(\gamma x). \quad (10.22)$$

Ovo su prenosne jednačine za piježometarsku kotu i proticaj. Za $x = l$ prenosne jednačine glase

$$\Pi_N = \Pi_U \cosh(\gamma l) - Z_C Q_U \sinh(\gamma l), \quad (10.23)$$

$$Q_N = -\frac{\Pi_U}{Z_C} \sinh(\gamma l) + Q_U \cosh(\gamma l), \quad (10.24)$$

odakle se jednostavno mogu dobiti i prenosne jednačine za veličine u uzvodnom preseku u zavisnosti od veličina u nizvodnom preseku, N ,

$$\Pi_U = \Pi_N \cosh(\gamma l) + Z_C Q_N \sinh(\gamma l), \quad (10.25)$$

$$Q_U = \frac{\Pi_N}{Z_C} \sinh(\gamma l) + Q_N \cosh(\gamma l). \quad (10.26)$$

Odnos kompleksne piježometarske kote i kompleksnog proticaja u proizvoljnom

¹ Funkcije

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \text{ i}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

zovu se, kosinus, sinus i tangens hiperbolički.

preseku cevi zove se hidraulička impedansa,

$$Z(x) \equiv \frac{\Pi(x)}{Q(x)}. \quad (10.27)$$

Prenosne funkcije impedanse mogu se napisati za proizvoljni presek na cevi u funkciji stanja u jednom preseku (na osnovu koga su određene integracione konstante). Od posebnog značaja su prenosne funkcije impedanse za preseke na krajevima cevi, za $x = 0$, $Z_U = \Pi_U/Q_U$, i za $x = l$, $Z_N = \Pi_N/Q_N$. Prenosne funkcije hidrauličke impedanse koje povezuju veličine na uzvodnom i nizvodnom kraju glase

$$Z_N = \frac{Z_U - Z_C \tanh(\gamma l)}{1 - (Z_U/Z_C) \tanh(\gamma l)}, \quad (10.28)$$

$$Z_U = \frac{Z_N + Z_C \tanh(\gamma l)}{1 + (Z_N/Z_C) \tanh(\gamma l)}. \quad (10.29)$$

Za cevovod beskonačne dužine, izraz (10.28) svodi se na $Z_N = -Z_C$, a izraz (10.29) na $Z_U = Z_C$, jer za l koje neograničeno raste, $\tanh(\gamma l) \rightarrow 1$. Karakteristična impedansa cevovoda odgovara hidrauličkoj impedansi, ali samo kada se primenjuje na komponente proticaja i pijezometarske kote koje se kreću u jednom smeru.

Bilo koja od kompleksno promenljivih veličina može se prikazati i u polarnim koordinatama,

$$\Pi(x) = |\Pi(x)|e^{i\phi_\Pi}, \quad (10.30)$$

$$Q(x) = |Q(x)|e^{i\phi_Q}, \quad (10.31)$$

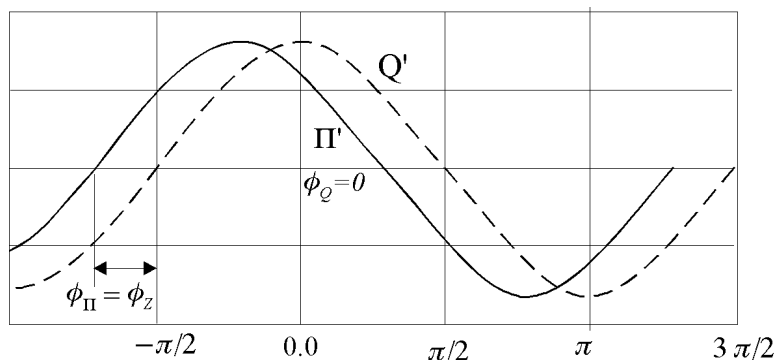
$$Z(x) = |Z(x)|e^{i\phi_Z}, \quad (10.32)$$

preko modula $|\Pi(x)|$ i faznog ugla, ϕ_Π . Na osnovu definicije hidrauličke impedanse (10.27) sledi da je

$$|\Pi(x)| = |Z(x)||Q(x)| \quad (10.33)$$

$$\phi_\Pi = \phi_Z + \phi_Q \quad (10.34)$$

Na slici (10.2) prikazane su promene pijezometarske kote i proticaja u jednom preseku cevi. Fazni ugao proticaja je jednak nuli, a između pijezometarske kote i proticaja postoji fazni pomak koji je jednak ϕ_Z . Amplitude Π' i Q' su jednake odakle sledi da je i $|Z(x)| = 1$.



Slika 10.2: Veza proticaja i pijeometarske kote u jednom preseku cevi

10.2 Prinudne oscilacije i analiza frekventnog odziva

Kod **prinudnih oscilacija** u svakoj tački sistema postoje harmonijske oscilacije sa frekvencijom koja odgovara frekvenciji pobude. Održava se ustaljeno oscilatorno kretanje sa nepromenljivim amplitudama zahvaljujući energiji koju unosi u sistem harmonijska pobuda. Amplituda i fazni ugao nisu isti u svim tačkama cevovoda.

Sa druge strane, **sopstvene oscilacije** su izazvane kratkotrajnom pobudom, posle čega dolazi do prigušenja oscilacija po eksponencijalnom zakonu. Oscilatorne promene Π i Q se, prema (10.15) i (10.16), mogu napisati

$$\Pi' = \text{Re}[\Pi(x)e^{st}] = \text{Re}[\Pi(x)e^{\sigma t}e^{i\omega t}] , \quad (10.35)$$

$$Q' = \text{Re}[Q(x)e^{\sigma t}e^{i\omega t}] . \quad (10.36)$$

Prethodne jednačine su pisane bez pravljenja razlike između prinudnih i sopstvenih oscilacija. Nadalje se razmatraju samo prinudne oscilacije i ustaljeno oscilatorno kretanje. Da bi se ostvario uslov da se amplituda oscilacija ne menja neophodno je da realni deo kompleksne frekvencije, s , bude jednak nuli, odnosno, $\sigma \equiv 0$, Zbog toga kod prinudnih oscilacija imamo

$$\Pi' = \text{Re}[\Pi(x)e^{i\omega t}] , \quad (10.37)$$

$$Q' = \text{Re}[Q(x)e^{i\omega t}] . \quad (10.38)$$

U svim izrazima se kompleksna frekvencija s zamenjuje sa $i\omega$, gde je ω ugaona frekvencija. Koefficient prostiranja jednak je

$$\gamma = \sqrt{c\omega(-\omega s_L + ir)} , \quad (10.39)$$

a karakteristična impedansa

$$Z_C = \frac{-i\gamma}{c\omega} = i \sqrt{\frac{-\omega s_L + ir}{c\omega}}. \quad (10.40)$$

Za određivanje frekventnog odgovora jednog cevovoda, a takodje i složenijeg sistema cevi potrebno je definisati odgovarajuće granične uslove. Počinje se od jednog kraja sistema, gde je poznata pijezometarska kota, proticaj ili hidraulička impedansa, pa se ide po cevima i elementima sistema do kraja gde se takodje zna neka promenljiva ili hidraulička impedansa. Poznate veličine na krajevima sistema, koje omogućavaju određivanje nepoznatih, zovu se granični uslovi.

10.2.1 Osnovni granični uslovi

Zadata pijezometarska kota. Pijezometarska kota na jednom kraju cevi, recimo uzvodnom, može se zadati na sledeći način, $\Pi_U = |\Pi_U|e^{i\phi_\Pi}$. Ako je promena pijezometarske kote izazvana talasima u rezervoaru može se napisati da je jednaka $\Delta\Pi \sin\omega t$. Tada je $\Pi_U = -i\Delta\Pi$, a modul i fazni ugao kompleksne pijezometarske kote su jednaki, $|\Pi_U| = \Delta\Pi$ i $\phi_\Pi = -\pi/2$.

Specijalni slučaj ovog graničnog uslova je rezervoar sa konstantnim nivoom, ili otvoreni kraj cevi, kada je $|\Pi_U| = 0$. Hidraulička impedansa je takodje jednaka nuli, $Z_U \equiv 0$.

Zadat proticaj. Promena proticaja se takodje može zadati na bilo kom kraju cevovoda, $Q_U = |Q_U|e^{i\phi_Q}$. Za slepi kraj cevi, $Q_U = 0$, a hidraulička impedansa je $Z_U = \infty$.

Zatvarač koji osciluje. Telo regulacionog zatvarača se pomera i time menja površinu poprečnog preseka. Pri malim stepenima otvorenosti, kada zatvarač predstavlja značajan gubitak energije i kada je izložen velikim hidrodinamičkim silama, može doći do pomeranja tela zatvarača. Do graničnog uslova za zatvarač na kraju cevi koji osciluje dolazi se linearizacijom jednačine isticanja kroz zatvarač oko srednje, referentne, vrednosti proticaja. Za razliku pijezometarskih kota uzvodno i nizvodno od zatvarača jednaku $\Delta\Pi_0$, i položaj zatvarača

$(C_Q A_Z)_0$, referentna vrednost proticaja je jednaka

$$Q_0 = (C_Q A_Z)_0 \sqrt{2g\Delta\Pi_0}. \quad (10.41)$$

Za bilo koji proticaj jednačina glasi

$$Q = (C_Q A_Z) \sqrt{2g\Delta\Pi}. \quad (10.42)$$

Deljenjem ove dve jednačine dolazi se do

$$Q = \frac{Q_0}{\sqrt{\Delta\Pi_0}} \tau \sqrt{\Delta\Pi}, \quad (10.43)$$

gde τ predstavlja relativni položaj zatvarača, odnosno, $(C_Q A_Z)/(C_Q A_Z)_0$. Jednačina koja prikazuje stanje oko koga osciluje proticaj na zatvaraču glasi,

$$\bar{Q} = \frac{Q_0}{\sqrt{\Delta\Pi_0}} \bar{\tau} \sqrt{\Delta\Pi}. \quad (10.44)$$

Oscilatorno pomeranje zatvarača se takodje može prikazati kao zbir dve veličine, $\tau = \bar{\tau} + \tau'$, gde je, $\tau' = Re(T_Z e^{i\omega t})$. Kompleksni broj T_Z sadrži amplitudu i fazni ugao oscilacije zatvarača. Ako se srednje i oscilatorne vrednosti proticaja, piježometarske kote i položaja zatvarača zamene u jednačinu (10.43), i ako se $\sqrt{(\Delta\Pi_0 + \Pi')}$ linearizuje, oduzimanjem jednačine (10.44), dobija se sledeći izraz

$$Q' = \bar{Q} \left(\frac{\Pi'}{2\Delta\Pi} + \frac{\tau'}{\bar{\tau}} \right). \quad (10.45)$$

U preseku uzvodno od zatvarača kompleksna piježometarska kota je jednaka

$$\Pi_Z = \frac{2\Delta\Pi}{\bar{Q}} Q_Z - \frac{2\Delta\Pi}{\bar{\tau}} T_Z. \quad (10.46)$$

Hidraulička impedansa u preseku uzvodno od zatvarača glasi

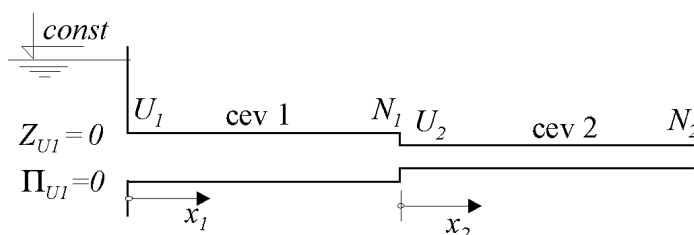
$$Z_Z = \frac{\Pi_Z}{Q_Z} = \frac{2\Delta\Pi}{\bar{Q}} - \frac{2\Delta\Pi}{\bar{\tau}} \frac{T_Z}{Q_Z}. \quad (10.47)$$

Blenda. Ako se iz prethodnih izraza isključi oscilovanje zatvarača direktno se dobija izraz za oscilatorno tečenje kroz blendu (dijafragmu), odnosno, za lokalitet sa fiksiranim koeficijentom lokalnog gubitka

$$Z_B = \frac{\Pi_B}{Q_B} = \frac{2\Delta\Pi}{\bar{Q}} \quad (10.48)$$

Hidraulička impedansa za blendu je kompleksan broj kod koga je imaginarni deo jednak nuli, što znači da nema faznog pomaka između oscilacija piježometarske kote i proticaja.

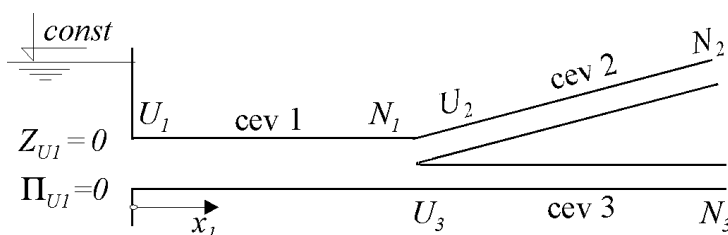
Spoj dve cevi. Na slici (10.3) prikazan je cevovod koji se sastoji od dve cevi. Iz uslova kontinuiteta dobija se da je, u svakom trenutku, proticaj isti u presecima N_1 i U_2 , uzvodno i nizvodno od spoja, a na osnovu pretpostavke da se brzinske visine i lokalni gubici na spoju dve cevi zanemaruju, sledi i jednakost odgovarajućih pijeziometarskih kota u svakom trenutku. Za dve cevi, 1 i 2, može se napisati, $\Pi_{N,1} = \Pi_{U,2}$, $Q_{N,1} = Q_{U,2}$, odakle sledi, $Z_{N,1} = Z_{U,2}$.



Slika 10.3: Spoj dve cevi

Postupak traženja impedanse u preseku na nizvodnom kraju cevi 2 bi bio sledeći. Najpre se na osnovu relacija (10.23) i (10.24) nađe hidraulička impedansa na nizvodnom kraju cevi 1, $Z_{N,1}$, koja je jednaka impedansi u preseku U_2 . Impedansa $Z_{N,2}$ se nalazi na osnovu relacija (10.23) i (10.24). Za više cevi u nizu postupak treba ponavljati sve dok se ne dodje do najnižvodnijeg preseka na cevovodu.

Račvanje. U granatoj cevnoj mreži polazi se od slobodnih krajeva cevi u kojima je poznata impedansa i ide se ka preseku u kome je potrebno odrediti impedansu. U primeru na slici (10.4), poznate su vrednosti hidrauličke impedanse u presecima U_1 i N_2 , a treba odrediti impedansu u preseku N_3 .



Slika 10.4: Spoj tri cevi

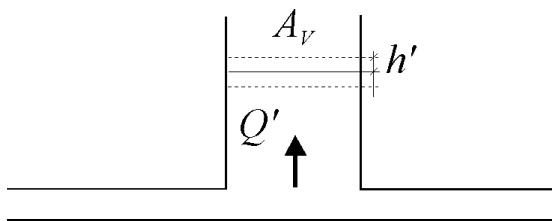
U čvoru u kom se susstiču sve tri cevi iste su piježometarske kote za sve tri cevi i zadovoljena je jednačina kontinuiteta, odnosno, $\Pi_{U,3} = \Pi_{U,2} = \Pi_{N,1}$, i $Q_{U,3} + Q_{U,2} - Q_{N,1} = 0$. Odatle sledi

$$\frac{1}{Z_{U,3}} = \frac{1}{Z_{N,1}} - \frac{1}{Z_{U,2}}, \quad (10.49)$$

odnosno,

$$Z_{U,3} = \frac{Z_{N,1}Z_{U,2}}{Z_{U,2} - Z_{N,1}}. \quad (10.50)$$

Impedansa na nizvodnom kraju cevi 3 može se sračunati korišćenjem relacija (10.23) i (10.24).



Slika 10.5: Vodostan

Vodostan. Oscilacije nivoa vode u vodostanu (slika 10.5) prikazuju se kao $h' = H_V e^{i\omega t}$, a odgovarajuće oscilacije proticaja su $Q'_V = A_V dh'/dt$, gde je A_V horizontalna površina vodostana. Kompleksni proticaj je jednak $Q_V = i\omega A_V H_V$, a hidraulička impedansa

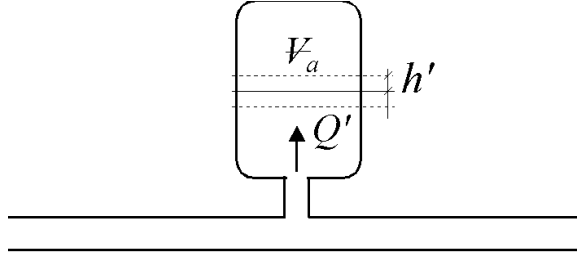
$$Z_V = \frac{H_V}{Q_V} = \frac{i}{\omega A_V}. \quad (10.51)$$

Vodostan se može povezati sa cevovodom direktno, uz korišćenje jednačine kontinuiteta i jednakosti piježometarskih kota, ili spojnom cevi koja ima svoje karakteristike. Ovde se pretpostavlja da nivo u vodostanu odgovara piježometarskoj koti na spoju vodostana i cevovoda.

Vazдушna komora. Vazдушna komora i različiti tipovi ekspanzionih posuda mogu značajno da priguše oscilatorne pobude u cevovodu, jer je stišljivost vazduha pod pritiskom u vazdušnoj komori obično mnogo veća od stišljivosti fluida (slika 10.6). I ovde se zanemaruju lokalni gubici između komore i cevi.

Srednja zapremina vazduha je \bar{V} , a oscilatorni deo je $V' = V_a e^{i\omega t}$. Oscilatorni proticaj je jednak

$$Q'_k = \frac{dV'}{dt} = i\omega V_a e^{i\omega t} \quad (10.52)$$



Slika 10.6: Vazдушna komora

Promena zapremine gasa je politropska

$$\Pi V^m = \text{const} , \quad (10.53)$$

gde je $\Pi = \bar{\Pi}_{abs} + \Pi'$, a $\bar{\Pi}_{abs}$ visina apsolutnog pritiska, $V = \bar{V} + V'$, zapremina gasa i m politropski koeficijent. Linearizacijom prethodnog izraza dolazi se do

$$\Pi' = -\frac{m\bar{\Pi}_{abs}}{\bar{V}} V' , \quad (10.54)$$

odnosno,

$$\Pi_a = -\frac{m\bar{\Pi}_{abs}}{\bar{V}} V_a . \quad (10.55)$$

Impedansa vazdušne komore je jednaka

$$Z_a = \frac{\Pi_a}{Q_a} = \frac{im\bar{\Pi}_{abs}}{\bar{V}\omega} . \quad (10.56)$$

Centrifugalna pumpa. Centrifugalna pumpa koja se okreće konstantnom brzinom može pojačati ili prigušiti oscilatornu pobudu koja se prenosi cevovodom. To zavisi od nagiba njene karakteristike ($Q - H$ krive) u radnoj tački, pri srednjem proticaju \bar{Q} . Visina dizanja pumpe može se prikazati kao, $(\bar{\Pi}_N + \Pi'_N) - (\bar{\Pi}_U + \Pi'_U)$, a oscilatorni deo kao, $\Pi'_N - \Pi'_U$. Može se napisati

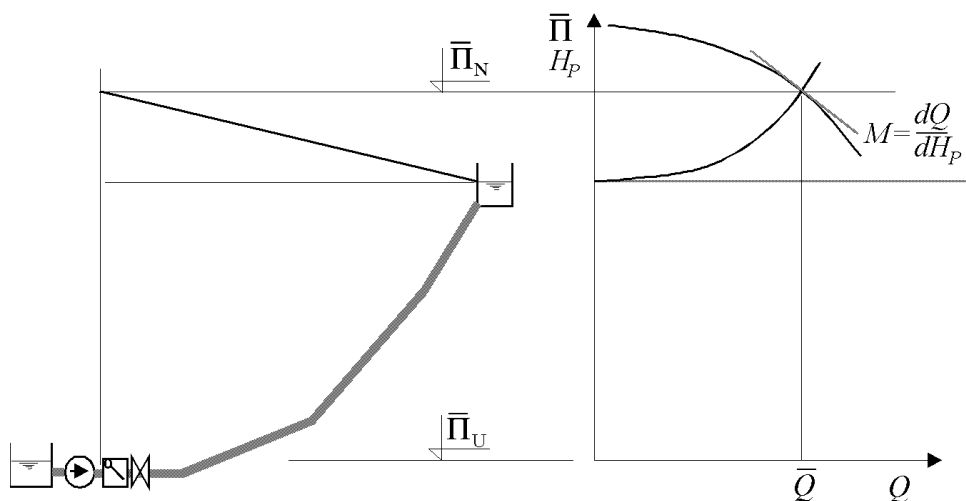
$$\Pi'_N - \Pi'_U = MQ' , \quad (10.57)$$

gde je M nagib karakteristike pumpe u radnoj tački. Proticaji su isti u presecima uzvodno i nizvodno od pumpe, U i N , $Q_U = Q_N$. Na osnovu izraza (10.57) dolazi se direktno relacije za kompleksne pijezometarske kote i proticaj

$$\Pi_N = \Pi_U + MQ_U, \quad (10.58)$$

odakle se dobija veza hidrauličkih impedansi u presecima N i U

$$Z_N = Z_U + M \quad (10.59)$$



Slika 10.7: Centrifugalna pumpa

Oscilacije stuba tečnosti. U analizama složenijih sistema stišljivost fluida u pojedinim kratkim deonicama ne igra značajnu ulogu. Stub tečnosti se može posmatrati kao kruto telo, što u potpunosti odgovara matematičkom modelu krutog udara obradjenom u poglavljima 3, 4 i 5. Kapacitansa cevi, kao osobina koja je posledica deformabilnosti fluida i cevi, se zanemaruje. Trenje se ne zanemaruje, ali je neophodno linearizovati ga. Ova aproksimacija ima smisla kod oscilacija niskih frekvencija kod kraćih cevi. Kao praktična preporuka može se uzeti da ovo važi kada je $\omega l/a$ manje od $\pi/12$ rad.

Dinamička jednačina za fluid u cevi između preseka U i N , može se napisati u sledećem obliku

$$\Pi'_U - \Pi'_N - \frac{\lambda \bar{Q}}{gDA^2} Q' = \frac{l}{gA} \frac{dQ'}{dt} \quad (10.60)$$

Uvodjenjem parametara R i L , kao i $Q' = Q_P e^{i\omega t}$, gde je $Q_P = Q_U = Q_N$,

$$\Pi_N = \Pi_U - (r + i\omega s_L) l Q_U \quad (10.61)$$

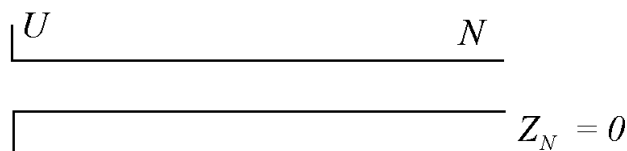
Hidraulička impedansa se dobija deljenjem sa kompleksnim proticajem

$$Z_N = Z_U - (r + i\omega s_L) l \quad (10.62)$$

10.2.2 Primeri

Primer 1

Odrediti hidrauličku impedansu u preseku N cevi prikazane na skici (10.8). Ako nivo u uzvodnom rezervoaru osciluje oko srednje vrednosti $\Pi_0 = 100$ m, tako da je trenutna vrednost jednaka, $\Pi = \Pi_0 + 5.0 \sin t$, odrediti amplitudu oscilacije pijezometarske kote i proticaja u nizvodnom preseku. Kakav je uticaj trenja ako je srednji proticaj jednak $\bar{Q} = 0.01$ m³/s, a koeficijent trenja $\lambda = 0.025$?



Slika 10.8: Primer 1, Cevovod ($l = 400$ m, $a = 1200$ m/s, $D = 100$ mm, $\lambda = 0.025$)

Hidraulička impedansa u preseku U može se dobiti iz izraza (10.29)

$$Z_U = Z_C \tanh \gamma l \quad (10.63)$$

Karakteristike cevi

$$R = 0,$$

$$A = \frac{0.1^2 \pi}{4} = 0.00785 \text{ m}^2 ,$$

$$s_L = \frac{1}{gA} = 12.98 \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3} ,$$

$$c = \frac{gA}{a^2} = 53.5 \times 10^{-9} \text{ m} ,$$

$$\gamma = i\omega \sqrt{s_L c} = \frac{i\omega}{a} = i \frac{1}{1200} \text{ m}^{-1} .$$

Karakteristična impedansa cevi iznosi:

$$Z_C = -\frac{i\gamma}{c\omega} = \frac{\omega a^2}{\omega a g A} = \frac{a}{gA} = 15576 \frac{\text{s}}{\text{m}^2} .$$

Na osnovu izraza (10.63), za $\omega = 1$, dobija se

$$Z_U = 15576 \tanh \frac{i400}{1200} ,$$

$$Z_U = 15576 i \tan \frac{1}{3} = i 5393 \frac{\text{s}}{\text{m}^2} ,$$

Oscilatorni deo piježometarske kote jednak je

$$\Pi' = \text{Re}[\Pi_U e^{i\omega t}] = 5 \sin t ,$$

odakle se dobije

$$\Pi_U = -i 5 \text{ m} .$$

Kompleksni proticaj u preseku U jednak je

$$Q_U = \frac{\Pi_U}{Z_U} ,$$

$$Q_U = \frac{-i 5}{i 5393} = -0.93 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} .$$

Oscilatorna komponenta proticaja je jednaka

$$Q' = \text{Re}[Q_U e^{i\omega t}] = -0.93 \times 10^{-3} \cos t \frac{\text{m}^3}{\text{s}} .$$

Amplituda oscilacije proticaja u uzvodnom preseku cevi izazvana oscilacijom nivoa u uzvodnom rezervoaru, iznosi 0.93 l/s i kasni 90° za promenom piježometarske kote.

Uticaoj trenja odredjen je na osnovu kompletnih izraza za koeficijent prostiranja γ i za karakterističnu impedansu Z_C . Za ugaonu frekvenciju $\omega = 1 \text{ rad/s}$, dobija se

$$Z_U = i 5659 \frac{\text{s}}{\text{m}^2} .$$

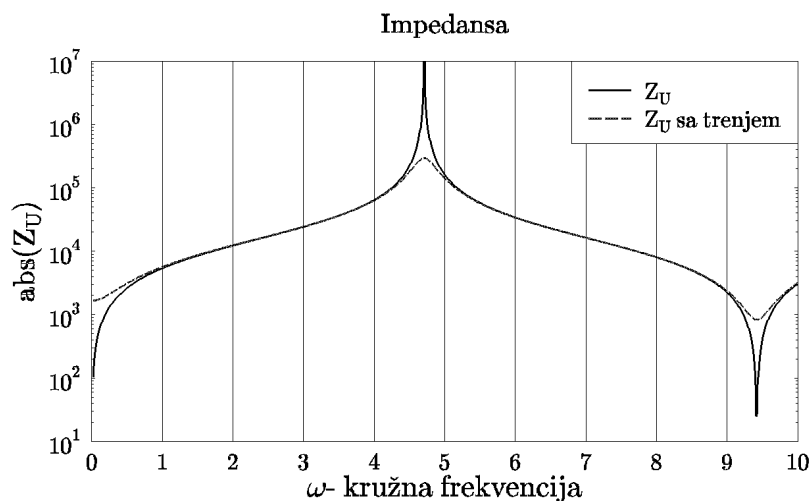
Uticaoj trenja uočljiviji je za frekvenciju koje su bliske sopstvenoj frekvenciji cevi. Sopstvena perioda cevi iznosi

$$T = 4L/a = \frac{4 \times 400}{1200} ,$$

a odgovarajuća ugaona frekvencija

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 4.71 \frac{\text{rad}}{\text{s}} .$$

Za ceo opseg vrednosti ω od 0.1 do 10, sračunate su hidrauličke impedanse, a moduli su prikazani na dijagramu (10.9) Za slučaj sa trenjem, za $\omega = 4.70$



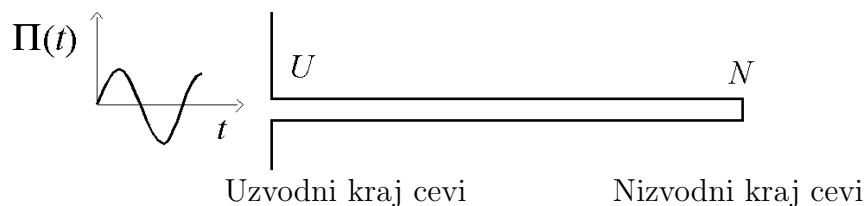
Slika 10.9: Uticaoj trenja na hidrauličku impedansu na uzvodnom kraju cevi

dobija se $Z_U = 294.0 \times 10^3$, a za $\omega = 4.71$ $Z_U = 294.4 \times 10^3$, dok bez trenja odgovarajuće vrednosti impedanse iznose, $Z_U = 6.01 \times 10^6$ i $Z_U = 16.3 \times 10^6$.

Sledeći maksimum hidraulička impedansa ima za vrednost frekvencije $3\omega_0$, pa za $5\omega_0$, i tako redom, za neparne umnoške osnovne frekvencije, ili kako se to kaže, za neparne harmonike. Minimumi hidrauličke impedanse odgovaraju parnim harmonicima, $0 \cdot \omega_0$, $2\omega_0$, $4\omega_0$, \dots

Primer 2

Na skici je prikazana cev na čijem se uzvodnom kraju zadaje harmonijska pobuda jednaka $\Pi_0 \sin \omega t$, dok je na drugom kraju cev zatvorena $Q_N = 0$. Odrediti amplitudu oscilacija pijezometarske kote na nizvodnom kraju cevi uz zanemarenje trenja.



$$\Pi'_U = \Pi_0 \sin \omega t \qquad Q_N = 0$$

$$\Pi'_U = \text{Re}(\Pi_U e^{i\omega t}) \qquad Z_N = \infty$$

$$\Pi_U = -i\Pi_0 \qquad \Pi'_N \neq 0$$

Nepoznate veličine su kompleksni proticaj na uzvodnom kraju i kompleksna pijezometarska kota na nizvodnom kraju cevi. Određuju se iz prenosnih funkcija za proticaj i pijezometarsku kotu

$$\Pi_N = \Pi_U \cosh \gamma l - Q_U Z_C \sinh \gamma l$$

$$0 = -\frac{\Pi_U}{Z_C} \sinh \gamma l + Q_U \cosh \gamma l$$

Iz drugog izraza se dobija

$$Q_U = \frac{\Pi_U}{Z_C} \tanh \gamma l$$

odakle sledi

$$\Pi_N = \Pi_U \frac{1}{\cosh \gamma l} = \Pi_U \sqrt{1 - \tanh^2 \gamma l}$$

Kada se zanemari trenje, koeficijent prostiranja postaje jednak

$$\gamma = \sqrt{c\omega(-\omega s_L + ir)} = i\omega \sqrt{cs_L} = \frac{i\omega}{a}$$

$$\Pi_N = \Pi_U [\cos(\omega \frac{l}{a})]^{-1} = \frac{-i\Pi_0}{\cos(\omega \frac{l}{a})}$$

Fizičke oscilacije pijezometarske kote na kraju cevi, u preseku N , jednake su realnom delu kompleksne pijezometarske kote,

$$\Pi' = \operatorname{Re} \left[\frac{-i\Pi_0}{\cos(\omega \frac{l}{a})} e^{i\omega t} \right] = \frac{\Pi_0 \sin \omega t}{\cos(\omega \frac{l}{a})} \quad (10.64)$$

Vidi se da oscilacije imaju maksimalnu vrednost kada je imenilac jednak nuli, odnosno, kada je $\omega l/a = \pi/2$. Odgovarajuća frekvencija je sopstvena ugaona frekvencija cevi

$$\omega_0 = \frac{\pi a}{2 l}$$

odnosno,

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{a}{4l} .$$

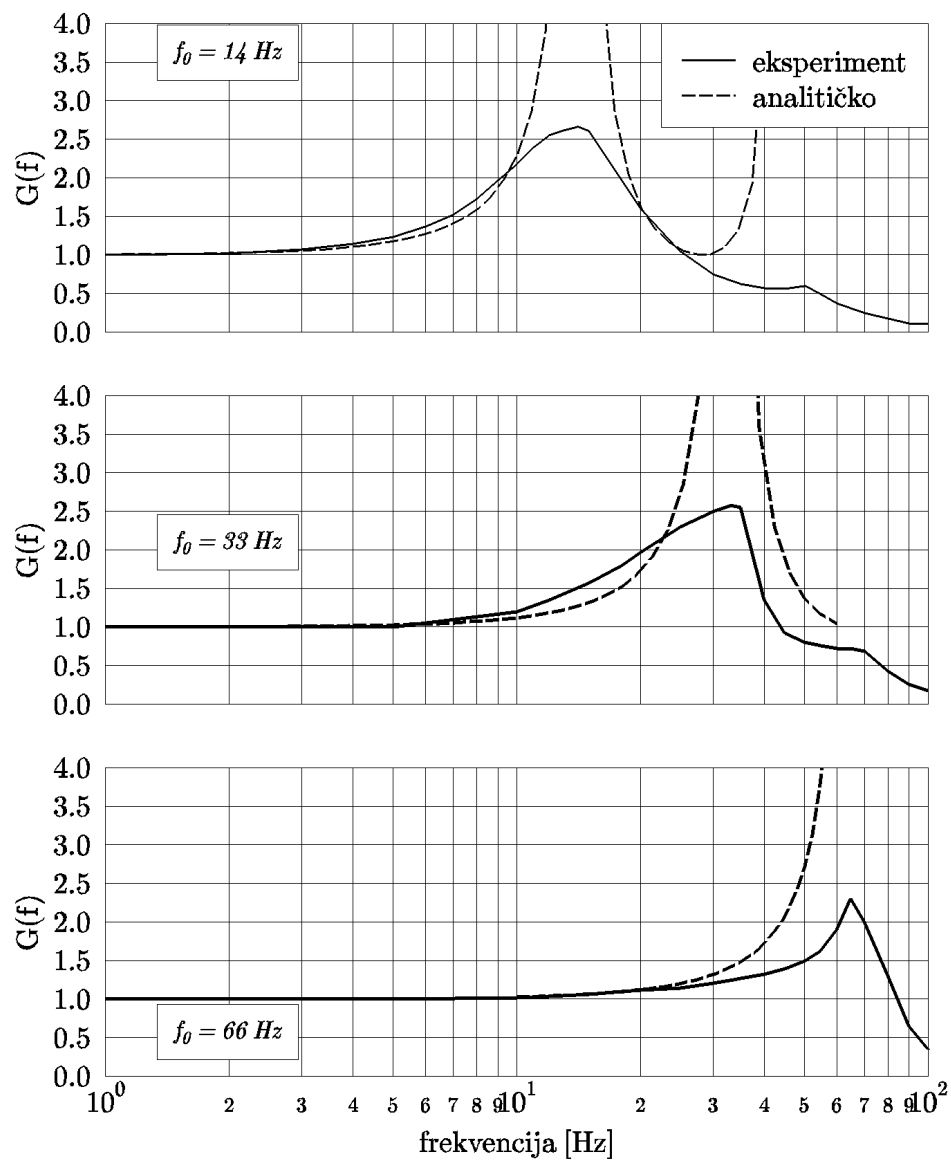
Recipročna vrednost sopstvene frekvencije je perioda oscilovanja, koja je jednaka

$$T = 4l/a .$$

Do istog rezultata se došlo kod analize naglog zatvaranja zatvarača na kraju cevi matmatičkim modelom elastičnog udara (Poglavlje 6).

Shema na skici uz Primer 2 odgovara uobičajenom načinu merenja pritiska (srednjih vrednosti a i fluktuacija (!?)) u slučajevima gde nije moguće postaviti senzor direktno na površinu na koju se meri pritisak. Cev koja se nalazi između senzora za merenje pritiska i mesta u kome se promene pritiska dešavaju, ima određeni uticaj na prenos informacije o pritisku. Tada nas zanima samo odnos amplituda oscilacija pritiska (ili pijezometarske kote) na ulazu u cev i na kraju cevi, za sve frekvencije koje su interesantne za posmatrani problem.

Na slici (10.10) prikazani su rezultati eksperimentalnog određivanja prenosne funkcije plastičnih cevi koje se najčešće koriste u laboratorijskim uslovima (Prodanović, 1984) i upoređene sa analitičkim rešenjem (10.64). Spoljni prečnik cevi je bio 7 mm, a debljina zida 1 mm. Brzina prostiranja talasa određena je merenjima (118 m/s), a za tri cevi različite dužine određene su sopstvene frekvencije i naznačene na dijagramima. Prenosne funkcije plastičnih cevi određene su pomoću Furijeove transformacije izmerenih pritiskata na ulazu u cev i na kraju cevi i koristeći osobinu konvolucije (Prilog B). Slaganje analitičkog izraza sa eksperimentalnim podacima je dosta dobro za prve dve cevi i za frekvencije manje od sopstvene, dok ga praktično nema za sve frekvencije veće od $0.7\omega_0$. Maksimalna vrednost prenosne funkcije dobijena merenjima odgovara sopstvenoj frekvenciji ali ima konačnu vrednost,



Slika 10.10: Prenosne funkcije plastičnih cevi koje se koriste za povezivanje senzora za pritisak i mernog mesta (Prodanović et al., 1985)

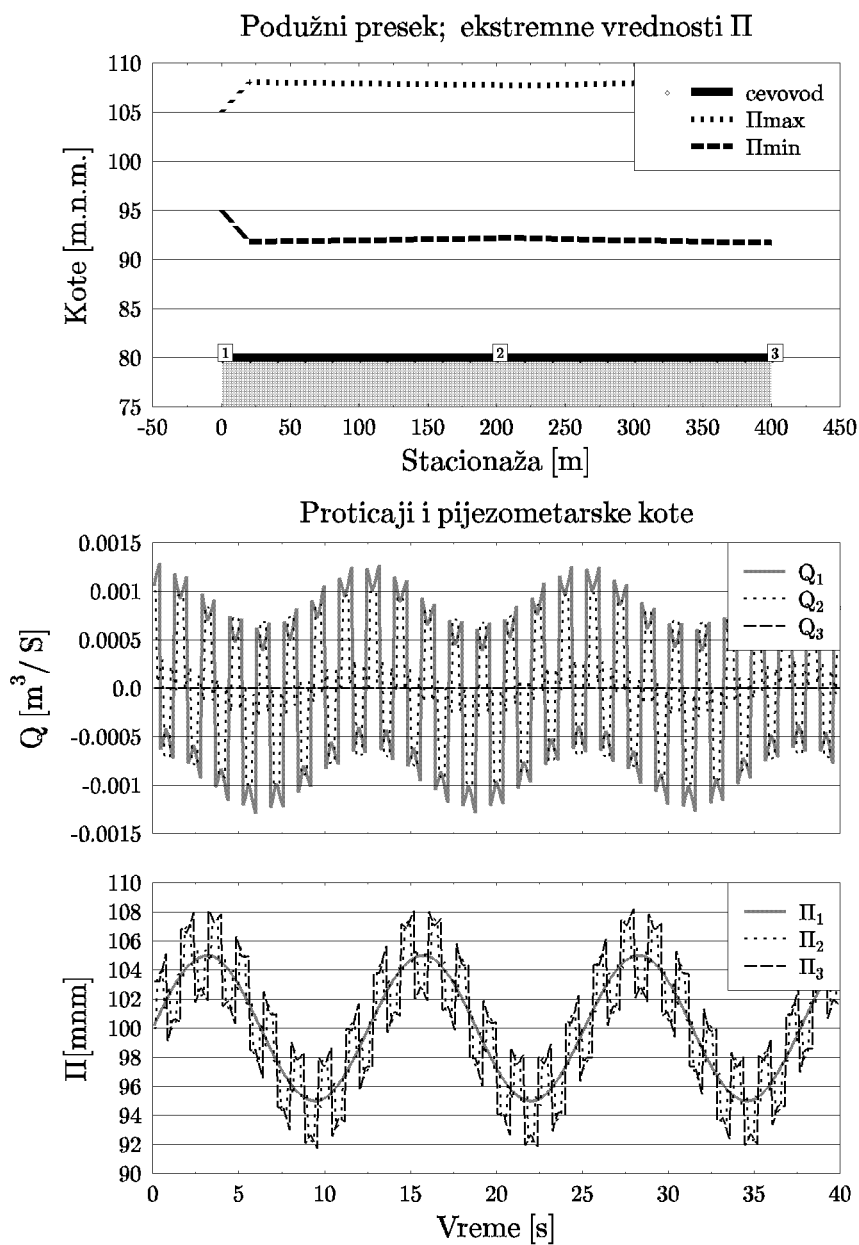
za razliku od analitičke koja je beskonačna. Takođe, za frekvencije veće od osnovne, stvarna prenosna funkcija vrlo brzo pada ispod jedinice, što znači da plastična cev ne može da prenese visoke frekvencije. Treba napomenuti da standardni matematički model hidrauličkog udara pokazuje slično odstupanje od eksperimentalnih podataka, što znači da na to utiču fenomeni koji nisu obuhvaćeni ni modelom hidrauličkog udara (zavisnost trenja od frekvencije i slično).

10.3 Druge metode za analizu oscilatornog kretanja

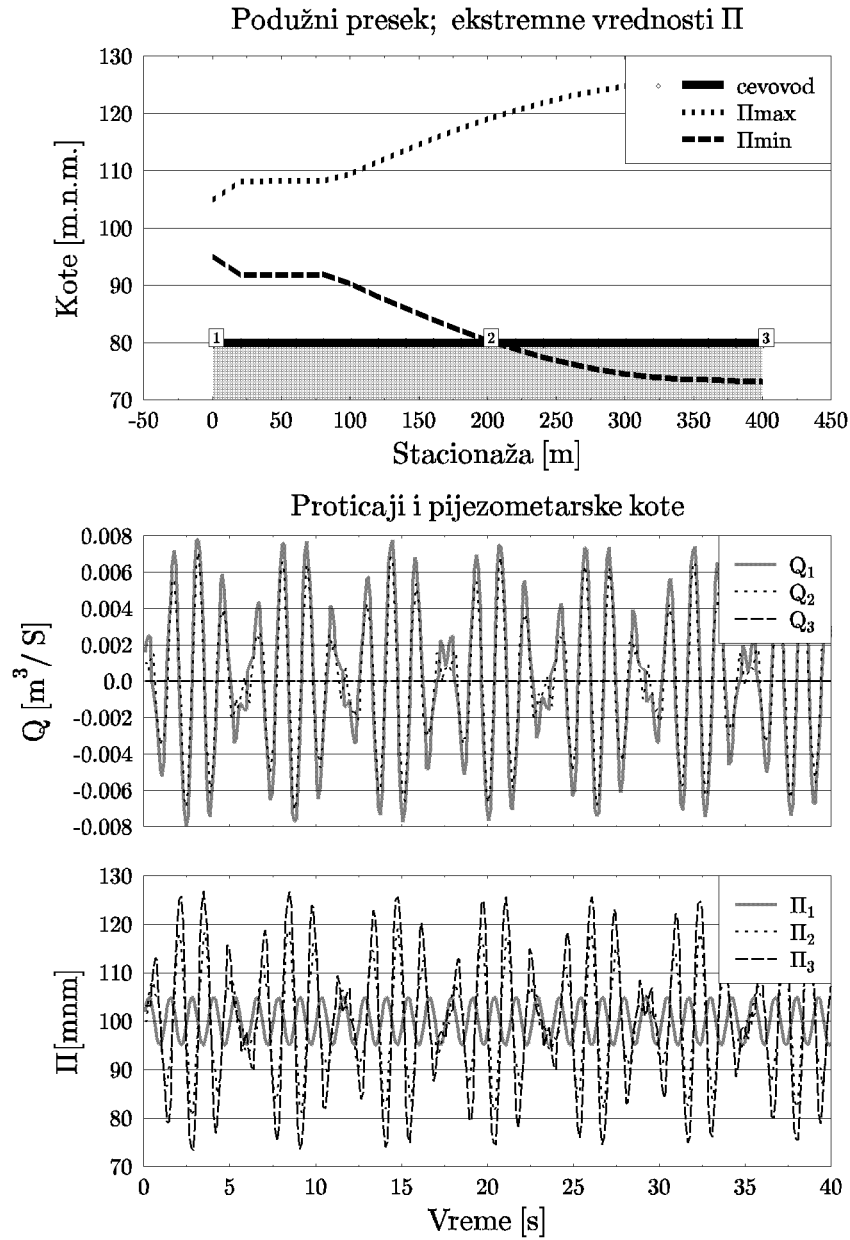
Oscilatorno kretanje može se proučavati i korišćenjem standardnog modela hidrauličkog udara i rešavanjem jednačina metodom karakteristika. Osnovni nedostaci ovog postupka, veliko vreme simulacije i dugački vremenski nizovi koje treba analizirati, sve manje to jesu, zahvaljujući sadašnjim personalnim računarima. Sa druge strane, prednosti, kao što je mogućnost prikazivanja nelinearnih graničnih uslova, uzimanje u obzir veličina koje zavise od frekvencije (koeficijent trenja, brzina propagacije i slično) i, na kraju, veća bliskost vremenskog domena većini hidrotehničkih inženjera, sve više opravdavaju ovakav pristup. Raspoloživim softverskim alatima moguće je registrovanu promenu prebaciti u frekventni domen i videti kakav je frekventni sastav.

U nastavku se prikazuju dva primera ovakve analize. Posmatra se cevovod dužine 400 m, prečnika 200 mm, koeficijenta trenja $\lambda = 0.025$, brzina propagacije talasa $a = 1000$ m/s, sa zatvorenim zatvaračem na nizvodnom kraju i oscilatornom promenom nivoa na uzvodnom kraju $\Pi' = \Pi_0 \sin \omega t$ (kao u Primeru 1 u ovom poglavlju). Rezultati proračuna u vremenskom domenu dati su na slikama (10.11) i (10.12). Razlike na dijagramima izazvane su razlikama u frekvencijama oscilacija nivoa, na slici (10.11) to je $\omega_1 = 0.5$, a na slici (10.12) $\omega_2 = 5.0$.

U rezultatima na slici (10.11) uočljive su dve frekvencije, frekvencija pobude ω_1 i sopstvena frekvencija cevi $\omega_0 = \pi a / (2l) = 3.93$ rad/s. Kod rezultata na slici (10.12) nije jednostavno vizuelno izdvojiti dominantne frekvencije jer su i frekvencija pobude, ω_2 , i sopstvena frekvencija, ω_0 , bliske. U odnosu na prvi slučaj amplitude oscilacija pijezometarske kote su znatno veće, što je jasno vidi na podužnom profilu cevovoda gde su nacrtane i obvojnice ekstremnih vrednosti pijezometarskih kota. Taj problem je razrešen



Slika 10.11: Oscilacije pijezometarske kote i proticaja u cevovodu izazvane oscilovanjem nivoa na uzvodnom kraju, $\omega_1 = 0.5 \text{ rad/s}$



Slika 10.12: Oscilacije pijeziometarske kote i proticaja u cevovodu izazvane oscilovanjem nivoa na uzvodnom kraju, $\omega_2 = 5.0 \text{ rad/s}$

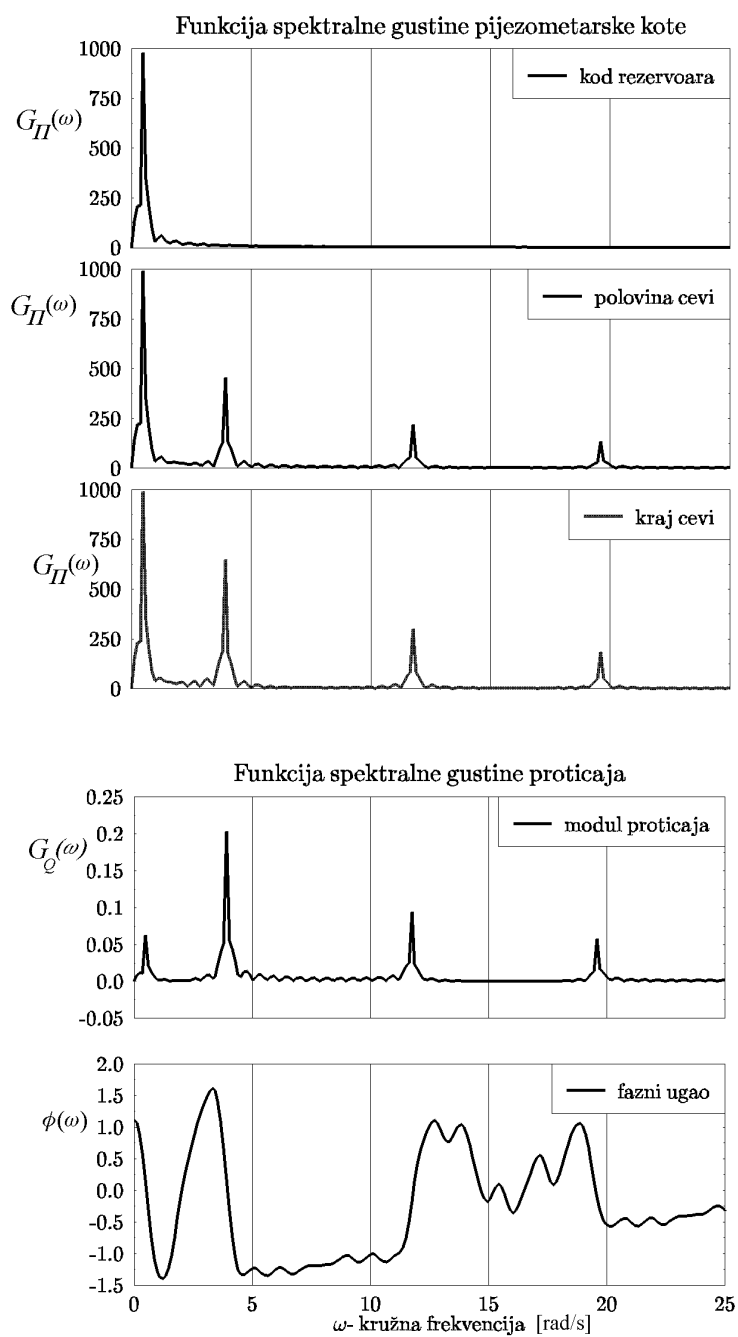
prikazom oscilacija pritiska u frekventnom domenu primenom postupka brze Furijeove transformacije (*FFT - Fast Fourier Transform*) (Bendat & Piersol, 1971) i ljubaznošću D. Prodanovića (Prodanović, 1991).

Na slikama (10.13) i (10.14) prikazane su funkcije spektralne gustine za piježometarske kote u tri preseka cevi i proticaj na ulazu u cev. Takodje, dat je fazni ugao proticaja u preseku na uzvodnom kraju cevi. Bez ulaženja u suštinu Furijeove transformacije može se reći da su ordinate funkcije spektralne gustine indikatori raspodele energije oscilatornog kretanja po frekvencijama. Brza Furijeova transformacija je približan postupak čija tačnost zavisi od broja članova vremenskog niza (u ovom slučaju on je bio 512, sa vremenskim intervalom $\Delta t = 0.1s$). Za funkciju spektralne gustine i ovaj mali broj podataka je dovoljan da se sagledaju dominantne frekvencije oscilacija u oba slučaja, dok bi za računanje faznog ugla trebalo više podataka.

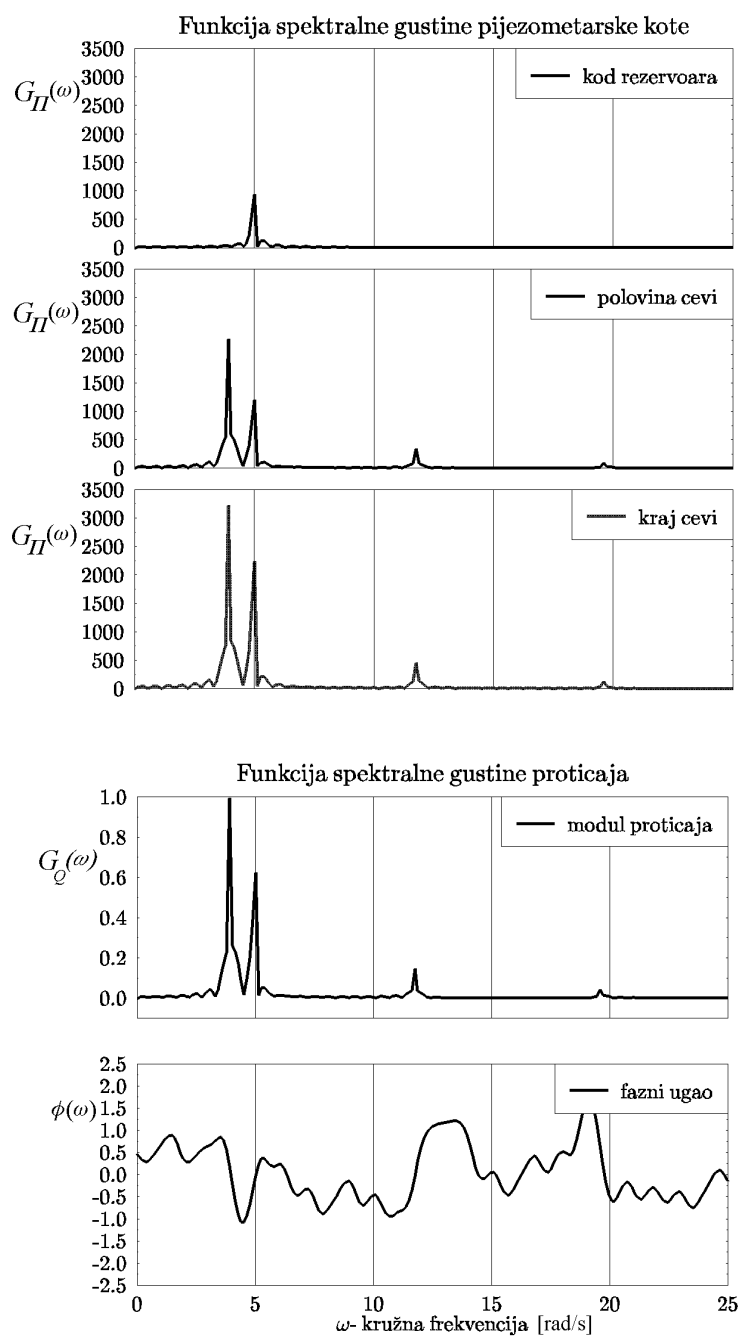
Postupak brze Furijeove transformacije može se koristiti i za efikasnije određivanje prenosnih funkcija složenih sistema zadavanjem odskočne funkcije, ili zadavanjem impulsne pobude, i naknadnom analizom odgovora sistema. Osnove Furijeove transformacije kao i neke napomene o njenom korišćenju, date su u prilogu B, a mnogo više o tome može se naći u literaturi (Bendat & Piersol, 1971; Bloomfield, 1976)

Bibliografija

- [1] Bendat J.S., Piersol A.G., 1971, *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Wiley-Interscience.
- [2] Bloomfield P., 1976, *Fourier Analysis of Time Series: An Introduction*, John Wiley & Sons.
- [3] Prodanović D., 1991, Magistarski rad, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- [4] Prodanović D., Špoljarić A., Ivetić M., Č. Maksimović, 1985, Dynamic characteristics of a pressure measuring system, International Symposium on Measuring Techniques in Hydraulic Research, Delft, Balkema, Holland.



Slika 10.13: Funkcije spektralne gustine pijezometarskih kote i proticaja izazvane oscilovanjem nivoa na uzvodnom kraju, $\omega_1 = 0.5$ rad/s



Slika 10.14: Funkcije spektralne gustine pijezometarskih kote i proticaja izazvane oscilovanjem nivoa na uzvodnom kraju, $\omega_2 = 5.0$ rad/s

Poglavlje 11

Regulacione karakteristike zatvarača

11.1 Uvod

Postoji mnogo različitih konstruktivnih (i hidrauličkih) rešenja zatvarača u zavisnosti od funkcije koju imaju, pouzdanosti koja se zahteva itd. (Obradović, 1991; ERHARD, 1987; BERMAD, 1994).

U ovom poglavlju razmatra se regulaciona funkcija zatvarača, jer, u sistemima pod pritiskom, zatvarači predstavljaju osnovne elemente kojima se može menjati režim rada cevovoda. Razmatraju se zatvarači koji svoju funkciju obavljaju neprekidno, a ne oni koji to rade povremeno, kao što su rasteretni ventili, nepovratni ventili, vazdušni ventili i slično. Razmatranja nisu ograničena na jedan tip zatvarača, nego na definisanje zahteva koje zatvarač mora da ispuni da bi hidraulički uspešno obavio zadatak koji mu se postavlja. Automatska kontrola i regulacija rada nekog sistema pod pritiskom ili postrojenja predstavljaju mnogo jednostavniji korak dalje, koji, međjutim, ne može biti uspešno sproveden ako nisu prethodno dobro odabrani zatvarači i sagledane dinamičke karakteristike sistema.

Regulacioni zadaci zatvarača se mogu podeliti u dve grupe: održavanje zadate pijezometarske kote (odnosno, nivoa) i održavanje zadanog proticaja.

11.2 Regulacija proticaja

Ustaljena praksa u projektovanju vodovodnih sistema podrazumeva dimenzionisanje i proveru funkcionisanja pri maksimalnom hidrauličkom opterećenju sistema i pri najnepovoljnijim uslovima rada sistema (minimalni nivoi vode u rezervoarima, maksimalna hrapavost cevi). U normalnim uslovima rada, treba očekivati da je maksimalni kapacitet cevovoda ili postrojenja različit (veći) od onog koji je u datom trenutku potreban. Takodje, skoro je sigurno da će veći deo eksploatacionog perioda sistem provesti u radu pri proticajima manjim od projektovanog.

Problem regulacije proticaja razmatra se na dva jednostavna primera:

- gravitacioni cevovod sa zatvaračima kao aktivnim regulacionim elementima (Ivetić, Ivetić, 1993),
- isticanje iz jednog rezervoara u drugi kroz kratku cev sa zatvaračem.

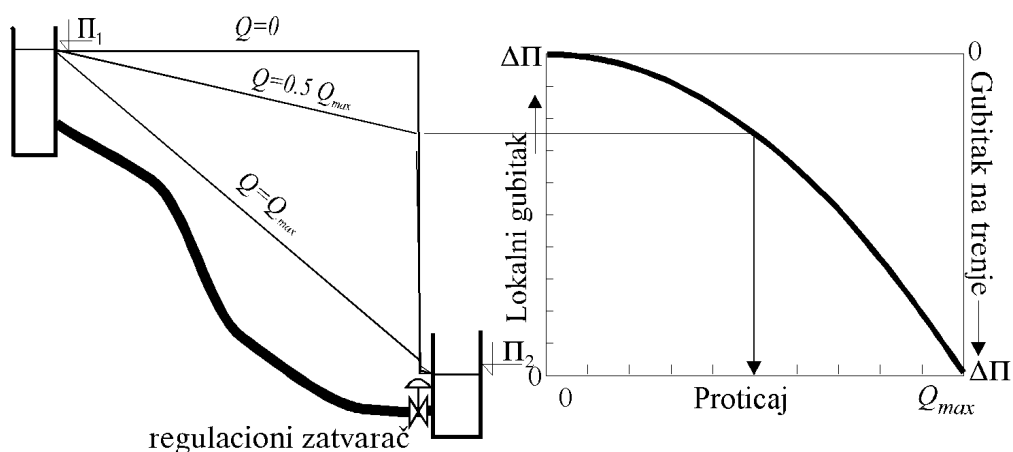
Prvi primer se odnosi na probleme kod tzv. magistralnih cevovoda (slika 11.1), a drugi na probleme tečenja u okviru postrojenja za prečišćavanje itd.

Termin magistralni koristi se da bi se ukazalo da cevovod transportuje vodu od jednog rezervoara, recimo, na izvoristu, do relativno udaljenog mesta potrošnje. Zbog značajnog gubitka energije na trenje, regulacija proticaja pomoću zatvarača na gravitacionm cevovodu značajno se razlikuje od onoga što se standardno dešava u okviru postrojenja. Nije zanemarljiv ni problem hidrauličkog udara koji kod cevovoda predstavlja značajno ograničenje za regulaciju.

Kod isticanja kroz kratku cev u celoj oblasti rada dominantan je lokalni gubitak na zatvaraču i direktno su primenljivi podaci koje daju proizvođači zatvarača o karakteristikama zatvarača. Postoji nekoliko tehničkih rešenja regulacionih sklopova u zavisnosti od toga da li se pored regulacije proticaja zahteva još nešto ili ne.

11.3 Osnove

Posmatra se cevovod koji spaja dva rezervoara (Slika 11.1). Na nizvodnom kraju cevovoda nalazi se zatvarač koji se koristi za regulaciju proticaja. Rešenje problema je jednoznačno i svakom proticaju, izmedju $Q = 0$ i



Slika 11.1: Magistralni cevovod sa regulacionim zatvaračem

$Q = Q_{max}$, odgovara samo jedna pijeziometarska linija. Q_{max} je proticaj pri potpuno otvorenom zatvaraču.

Proticaj se određuje iz Bernulijeve jednačine

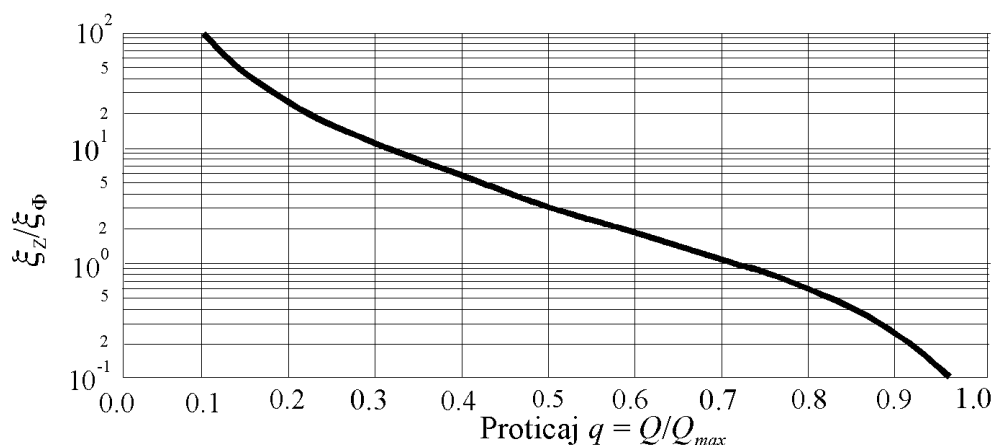
$$\Delta\Pi = \left(\sum \xi_{lok} + \lambda \frac{L}{D} + \xi_z \right) \frac{Q^2}{2gA^2} = \Delta E_{\Phi} + \Delta E_Z \quad (11.1)$$

gde ΔE_{Φ} predstavlja deo gubitka energije na koji se ne može uticati (lokalni gubici i trenje), u daljem tekstu **fiksnii gubici energije** (označavaće se još kao, $\xi_{\Phi} Q^2 / (2gA^2)$), dok je ΔE_Z , gubitak energije koji zavisi od stepena otvorenosti zatvarača. Kod cevovoda koji su duži od $1000D$, što je redovno kod magistralnih cevovoda, brzinska visina i lokalni gubici se ne uzimaju eksplicitno, pa se može govoriti o fiksnim gubicima kao o gubicima na trenje.

Problem regulacije proticaja može se prikazati dijagramom na desnoj strani slike (11.1). sa proticajem Q na apscisi i raspodelom gubitka energije na ordinati. Ako se pretpostavi da koeficijent trenja i koeficijenti lokalnih gubitaka ne zavise od proticaja, linija koja razdvaja fiksne gubitke energije i gubitke energije na zatvaraču je parabola. Na dijagramu je prikazano koji deo denivelacije $\Delta\Pi$ treba potrošiti na zatvaraču (deo ispod parabole) da bi se ostvario zahtevani proticaj od $0.5 Q_{max}$.

Polazna jednačina (11.1) će se napisati u bezdimenzionalnom obliku

$$1 = \left(1 + \frac{\xi_Z}{\xi_{\Phi}} \right) q^2 \quad (11.2)$$



Slika 11.2: Zavisnost proticaja od relativnog gubitka energije

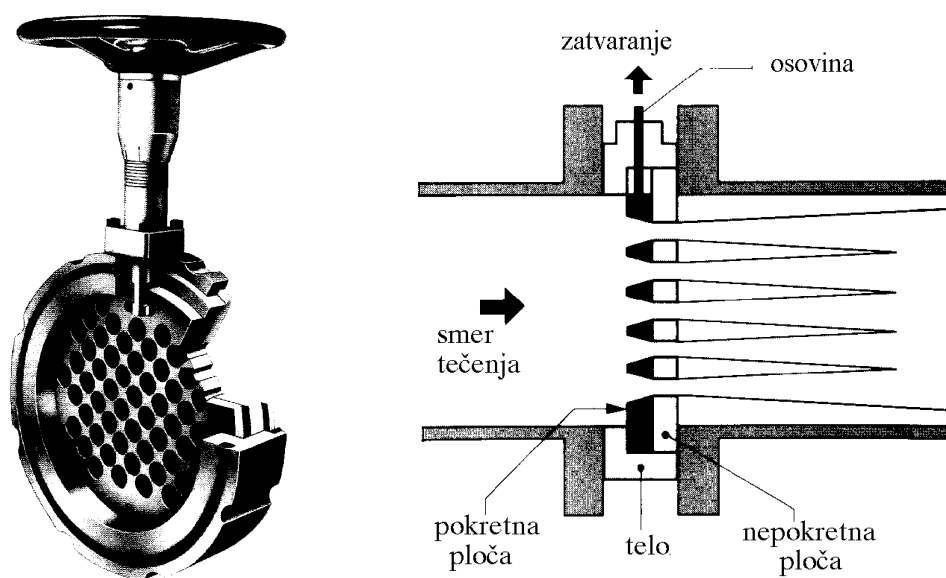
gde je $q = Q/Q_{max}$, a Q_{max} je određeno iz jednakosti

$$\Delta\Pi = \xi_\Phi \frac{Q_{max}^2}{2gA^2} \quad (11.3)$$

Proticaj direktno zavisi od relativne veličine koeficijenta lokalnog gubitka na zatvaraču, u odnosu na fiksni gubitak. Ta zavisnost prikazana je i grafički na slici (11.2). Kada je ξ_z/ξ_Φ jednako 1, proticaj je jednak $0.7Q_{max}$, za ξ_z/ξ_Φ jednako 3, proticaj je jednak $0.5Q_{max}$, itd, a da bi se dobio proticaj $0.1Q_{max}$, gubitak na zatvaraču treba da bude 100 puta veći od gubitka energije na trenje. Dakle, problem regulacije proticaja kod gravitacionog cevovoda svodi se na oduzimanje energije fluidnoj struji, što treba uraditi na način koji neće ugroziti funkcionisanje cevovoda. Kod maksimalnog proticaja gubitak energije raspoređen je ravnomerno duž celog cevovoda, dok je već za proticaje manje od $0.7Q_{max}$ veći deo gubitka energije koncentrisan kod regulacionog zatvarača. Sledeći korak je izbor tipa i dimenzija zatvarača koji treba da radi u takvim uslovima i da ispuni svoj zadatak.

11.3.1 Konstruktivne karakteristike regulacionih zatvarača

Za regulacione zadatke na magistralnim cevovodima koriste se posebno konstruisani zatvarači. Njihove glavne osobine su mogućnost postizanja značajnog



Slika 11.3: Regulacioni zatvarač sa rupicama (KUBOTA-NEYRTEC)

gubitka energije, precizno pozicioniranje, jednostavnost manipulacije, otpornost na kavitaciju¹ i vibracije, trajnost i visoka pouzdanost (Ivetić, 1994). Na slikama (11.3), (11.4) i (11.5) prikazani su neki od zatvarača koji ispunjavaju te uslove.

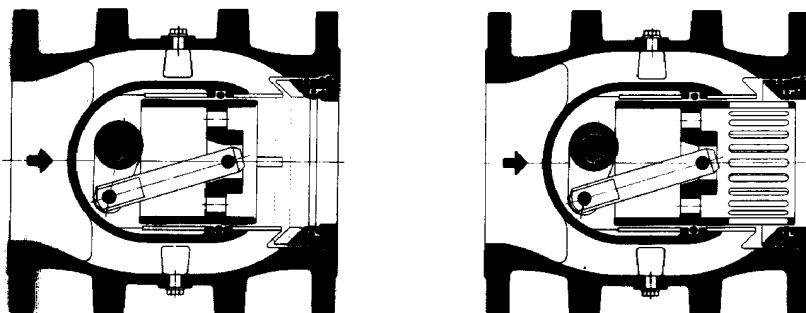
Zatvarač na slici (11.3) ima dve perforirane ploče od kojih je jedna pokretna a druga nepokretna. Proticajni profil čini više malih otvora, tako da je i strujno polje iza zatvarača relativno homogeno. Zatvarač ima odlične kavitacione karakteristike, malih je dimenzija i vrlo pouzdan. Na slici (11.4) prikazane su dve varijante igličastog zatvarača. Zatvarač ima nepokretan hidrodinamički oblikovan srednji deo, sa klipom koji se pomera u pravcu toka i time menja površinu proticajnog profila. Ukoliko se zatvarač koristi na mestu gde se zahteva veliki gubitak energije, na pokretni klip postavlja se cilindar sa prorezima (slika 11.4.b).

Zatvaranje i otvaranje zatvarača može biti ručno ili pomoću posebnih uređaja koji se zovu *aktuatori*. Aktuatori mogu biti električni, pneumatski i hidraulički. Regulacioni zatvarač na slici (11.5) ima hidraulički aktuator

¹Kavitacija je pojava stvaranja i nestajanja (implozije) mehurića ispunjenih vodenom parom na mestima odvajanja mlaza od konture, koja može dovesti do oštećenja površina u kontaktu sa fluidom. Kavitaciju prati visok nivo buke i oscilacije pritiska.

a)

b)



Slika 11.4: Dve varijante igličastog regulacionog zatvarača: a) za male denivelacije, b) za velike denivelacije (ERHARD)

sa dijafragmom i sa dve komore. Pomoću posebnih cevčica i pilot zatvarača kontroliše se pritisak sa jedne i druge strane dijafragme i time pomera kontrolni element. Na slici je posebno istaknut dodatak na kontrolni element kojim se povećava gubitak energije na zatvaraču.

11.3.2 Veza izmedju promene proticaja i manevra zatvarača

Veza izmedju promene proticaja i promene koeficijenta lokalnog gubitka en ergije na zatvaraču dobiće se diferenciranjem jednačine (11.2) po ξ_Z .

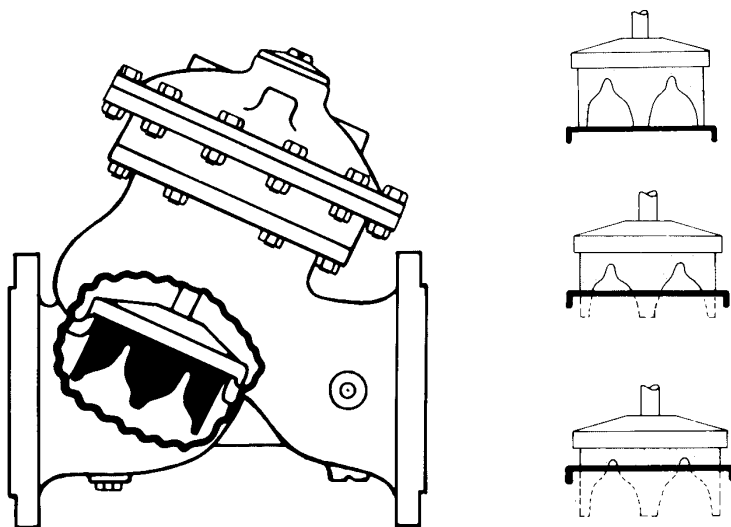
$$\frac{dq}{d\xi_Z} = -\frac{q}{2(\xi_\Phi + \xi_Z)} \quad (11.4)$$

Mada ova jednačina ne daje mnogo informacija, može se videti da je **osetljivost** proticaja na promenu koeficijenta lokalnog gubitka manja za veću vrednost koeficijenta lokalnog gubitka, a takodje i za veću vrednost (koeficijenta) fiksnog gubitka energije.

Za regulaciju je interesantna osetljivost proticaja na promenu položaja zatvarača, τ_Z , pa u prethodni izraz treba uvrstiti karakteristike zatvarača.

$$\frac{dq}{d\tau_Z} = -\frac{q}{2(\xi_\Phi + \xi_Z)} \frac{d\xi_Z}{d\tau_Z} \quad (11.5)$$

gde je $d\xi_Z/d\tau_Z$, nagib linije karakteristike zatvarača (vidi sliku 11.6).



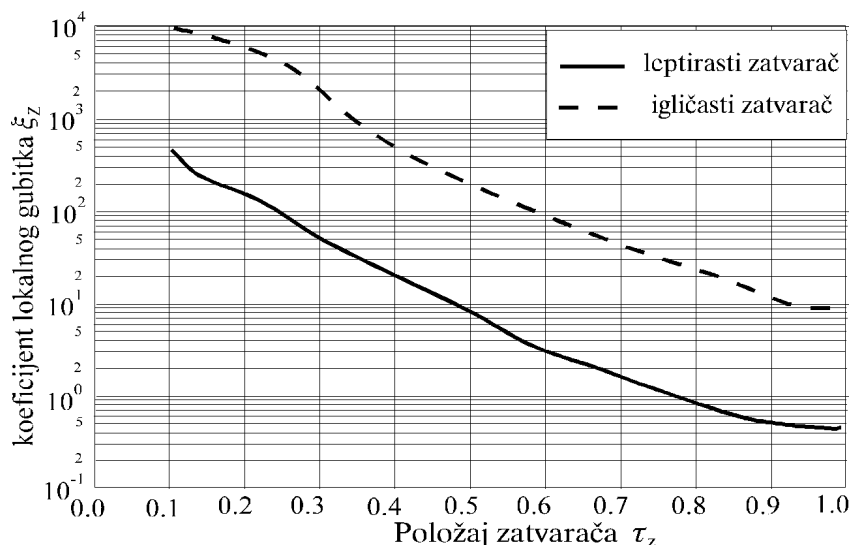
Slika 11.5: Poseban dodatak na regulacionom zatvaraču kojim se povećava gubitak energije (BERMAD)

Kao ilustracija ovih razmatranja koristeće se karakteristike dva tipa zatvarača, leptirastog, kao najčešće korišćenog, i igličastog (slika 11.4.b), kao regulacionog. Njihove tipične karakteristike, koje mogu varirati u zavisnosti od proizvođača, date su na slici 11.6 (Miller, 1987; Tullis, 1971). Na ovom dijagramu, kao i na narednim, punim linijama označeno je ono što se odnosi na leptirasti zatvarač, a isprekidanom ono što se odnosi na igličasti. Na apscisi je stepen otvorenosti zatvarača, τ_Z , bezdimenzionalna veličina, koja predstavlja relativnu vrednost hoda zatvarača.

Odmah se može uočiti velika razlika u vrednostima koeficijenata lokalnih gubitaka, što svakako određuje njihovu funkcionalnost.

Koristeći podatke za jedan hipotetički cevovod dužine 20 km, prečnika cevi 0.8 m, apsolutne hrapavosti unutrašnje obloge 1 mm i srednje denivelacije između uzvodnog i nizvodnog rezervoara, 70 m, došlo se do dijagrama na slici (11.7), koji ilustruje regulacione karakteristike dva razmatrana zatvarača. Osetljivost regulisane veličine (proticaja) na promenu položaja zatvarača odgovara nagibu linija na dijagramu. Poželjno je da nagib linija bude što bliži jedinici.

Linije nisu nacrtane za vrednosti stepena otvorenosti $[0,0.1]$ jer se zbog nestabilnog tečenja u toj oblasti ne može ostvariti precizna regulacija. Leptirasti zatvarač se u datom slučaju ne može koristiti za regulaciju, jer u oblasti



Slika 11.6: Karakteristike dva tipična zatvarača

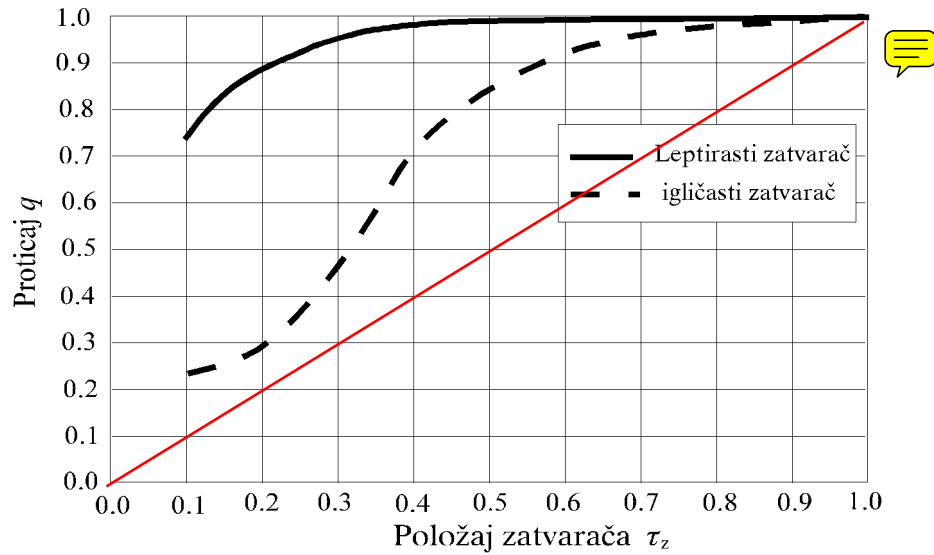
u kojoj može da radi proticaj q se menja od 1.0 do 0.7, dok pomeranje zatvarača od 1.0 do 0.4 uopšte ne dovodi do promene proticaja. Drugi zatvarač se može bez problema koristiti za regulaciju proticaja od 0.23 do 1.0 Q_{max} .

Regulacione karakteristike zatvarača mogu se popraviti redukovanjem poprečnog preseka i korišćenjem zatvarača manjeg prečnika. Na slici (11.8) prikazane su regulacione karakteristike zatvarača prečnika $D_Z = 0.5\text{m}$, na cevovodu prečnika $D = 0.8\text{ m}$.

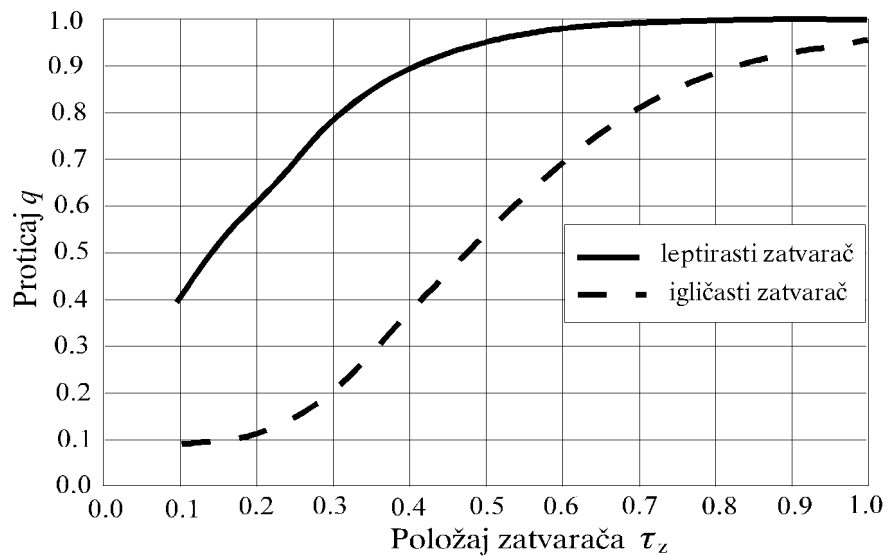
Zbog posebnih uslova u kojima rade regulacioni zatvarači na magistralnim cevovodima neophodno je obezbediti uslove da ne dodje do pojave intenzivne kavitacije, oscilacija i oštećenja zatvarača. Opasnost od kavitacije je realna kod svih tipova zatvarača, ako je denivelacija pijezometarskih kota u uzvodnom i nizvodnom preseku nekoliko desetina metara i ako je relativno mali hidrostatički pritisak sa nizvodne strane. Konstruktivna rešenja regulacionih zatvarača su takva da se posledice kavitacije minimiziraju (kavitacioni mehurići su udaljeni od čvrste granice, oslanjanje koje sprečava oscilacije itd.), ali ne i sprečavaju.

Regulacija proticaja potrebna je i u slučajevima kada su fiksni gubici energije relativno mali. Taj slučaj ilustruje se skicama na slici (11.9).

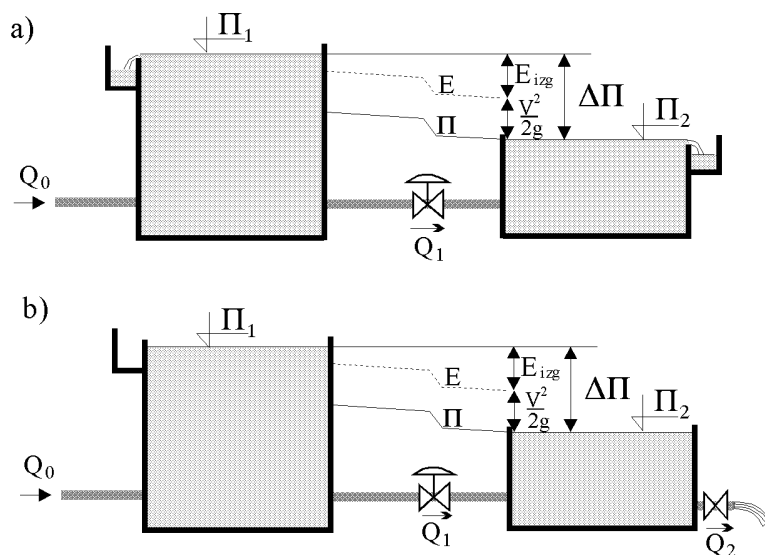
Primenljivost razmatrana dva zatvarača, leptirastog i igličastog, proverena je na hipotetičkom slučaju (slika 11.9.a), gde je $\Delta\Pi = 1.0\text{ m}$, prečnik



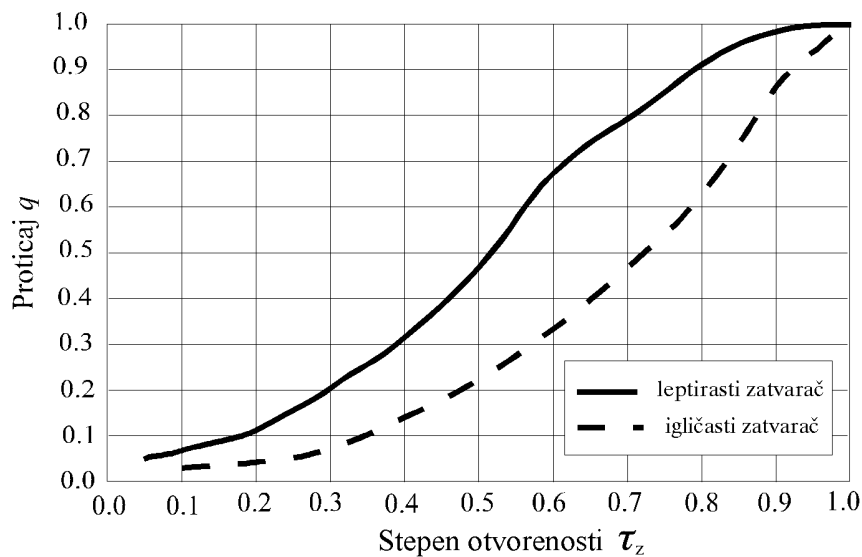
Slika 11.7: Regulacione karakteristike leptirastog i igličastog zatvarača prečnika 0.8 m, na cevi 0.8 m



Slika 11.8: Regulacione karakteristike zatvarača prečnika 0.5 m na cevi 0.8 m



Slika 11.9: Regulacija proticaja kroz kratku cev koja spaja dva rezervoara: a) konstantan nivo u rezervoarima, b) promenljiv nivo u rezervoarima



Slika 11.10: Regulative karakteristike leptirastog i igličastog zatvarača prečnika 0.8 m, na kratkoj cevi koja spaja dva rezervoara

zatvarača $D = 0.8$ m, i sumarni koeficijent lokalnih gubitaka energije (izuzev izlaznog) jednak 0.7. Regulacione karakteristike zatvarača prikazane su na slici (11.10). Može se videti da se slika promenila i da leptirasti zatvarač u ovom slučaju ima bolje regulacione karakteristike od igličastog zatvarača sa posebnim dodatkom za povećanje gubitka energije.²

11.3.3 Vreme odgovora sistema na akciju zatvarača

U vrlo malom broju slučajeva može se očekivati da komanda prenetá zatvaraču trenutno dovede do zahtevane promene regulisane veličine, zbog toga što je sistemu potrebno neko vreme da se prilagodi novim uslovima koje nameće zatvarač. Dinamičke karakteristike sistema se neće posebno razmatrati u ovom poglavlju, jer se o tome govori od trećeg poglavlja pa do ovog. Naime, pomoću matematičkog modela neustaljenog tečenja u sistemu može se dobiti vremenska promena bilo koje veličine u sistemu.

Kao primer daju se dve jednostavne sheme sa dva rezervoara, koje spaja kratak cevovod sa regulacionim zatvaračem na njemu (slika 11.9). U prvom slučaju, pomoću preliva nivoi u rezervoarima se održavaju konstantnim (doticaj u rezervoar 1, Q_0 , mora da bude veći od proticaja kroz cev, Q_1), dok se u drugom slučaju nivoi u rezervoarima mogu menjati.

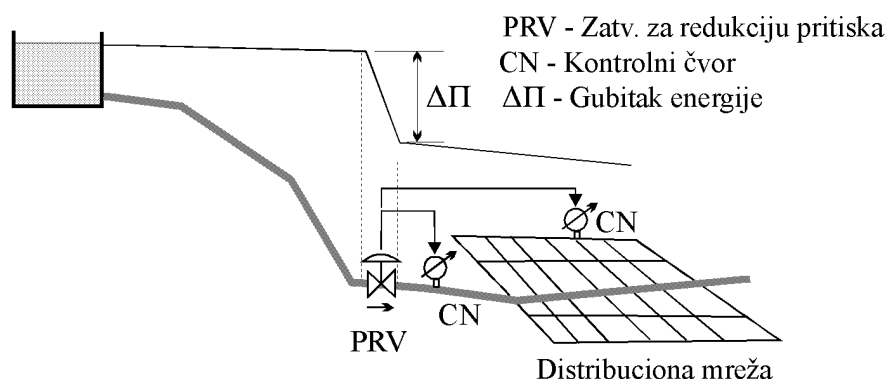
Odgovor sistema na promenu položaja zatvarača je u prvom slučaju praktično trenután, dok je u drugom slučaju odložen. Na vreme za koje će promena uslova tečenja postati efektivna utiču površine rezervoara, kao i veličina promene. Pošto se radi o kratkom cevovodu sa relativno malom masom fluída u pokretu, do odgovora se može doći primenom matematičkog modela kvazi ustaljenog tečenja.

11.4 Kontrola pritiska

Druga grupa zadataka koje regulacioni zatvarači mogu imati vezana je za održavanje pritiska. Postoje dve mogućnosti (i mnogo podvarijanti):

- Redukcija pritiska (*PRV - Pressure Reducing Valve*)
- Održavanje zadatog pritiska ili nivoa (*PSV - Pressure Sustaining Valve*)

²Treba napomenuti da bi u ovom slučaju više odgovarao standardni igličasti zatvarač.

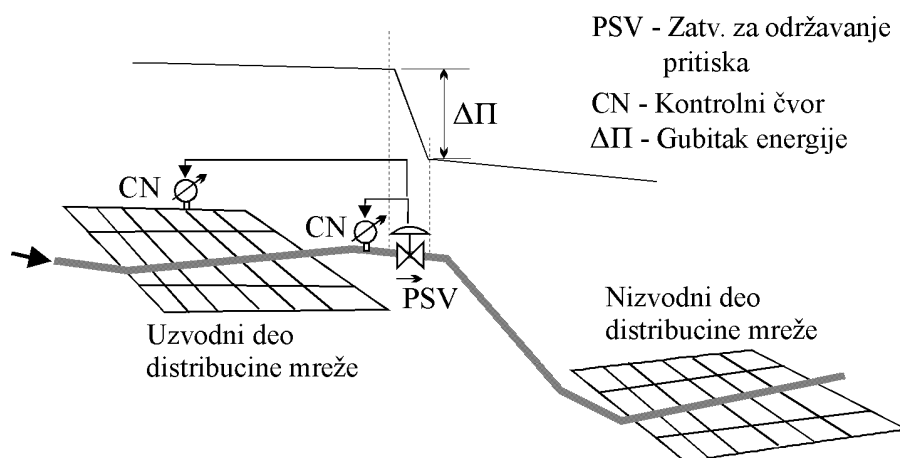


Slika 11.11: Regulacioni zatvarač za redukciju pritiska

U prvom slučaju merodavan je pritisak u nekom "kontrolnom čvoru" (CN na slici 11.11) nizvodno od zatvarača. Povećanje pritiska u njemu izaziva zatvaranje regulacionog zatvarača a smanjenje pritiska otvaranje. Koriste se mnogo u distribucionim mrežama, a mogu se postaviti i uzvodno od rezervoara umesto zatvarača sa plovkom. Kontrolni čvor može biti u preseku neposredno nizvodno od zatvarača, i tada zatvarač može da radi samostalno sa lokalnom kontrolom. Ako je kontrolni čvor udaljen od zatvarača potrebno je obezbediti vezu izmedju ta dva mesta, ili preko centralnog sistema za upravljanje, ili samo za potrebe regulacionog zatvarača.

Postoje i određena ograničenja u radu zatvarača za redukciju pritiska. Zatvarač je u funkciji samo dok je uzvodni pritisak veći od zadatog pritiska. Ako je pritisak ispod zadatog, zatvarač ne može dodati energiju vodi. Takodje, kada je zatvarač zatvoren na stanje pritiska u sistemu utiču drugi kontrolni elementi. Po funkciji PRV može da predstavlja alternativu prekidnoj komori.

U drugom slučaju kontrolni čvor se nalazi uzvodno od regulacionog zatvarača pa smanjenje pritiska u njemu dovodi do postepenog zatvaranja zatvarača (slika 11.12) da bi se održao zahtevani pritisak. PRV i PSV zatvarači mogu uspešno da ispune svoj zadatak samo ako im je radna oblast na većem delu hoda zatvarača i ako ispunjavaju iste kriterijume kao zatvarači za regulaciju proticaja na magistralnim cevovodima.



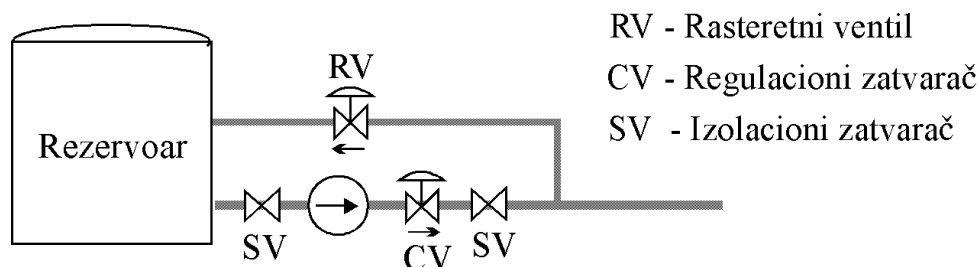
Slika 11.12: Regulacioni zatvarač za održavanje pritiska

11.5 Primeri primene regulacionih zatvarača

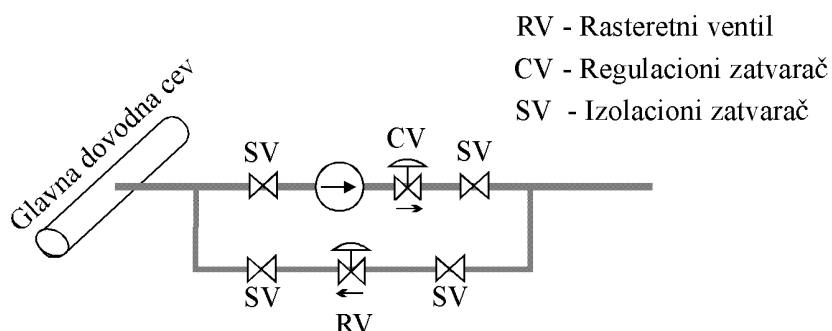
Primeri primene regulacionih zatvarača, koji se navode u nastavku, nisu iz prakse koja je odomaćena u vodovodnim sistemima u našoj zemlji. Naša praksa je, bez realnog osnova, rezervisana prema ovakvim rešenjima. Kada se govori o automatici onda se kod nas skoro isključivo misli o kontrolnoj tabli sa shemom svih objekata i cevni veza i o mogućnosti da se po želji, pritiskom na dugme, da naredba za otvaranje ili zatvaranje nekog zatvarača, a manje o stvarnoj kontroli procesa, regulaciji proticaja, nivoa i tome slično. Ako ovaj tekst doprinese bar malo da se ta slika promeni biće to veliki uspeh.

11.5.1 Zatvarači u crpnim stanicama

Na slici (11.13) prikazani su glavni zatvarači u jednoj crpnoj stanici koja uzima vodu iz rezervoara. Zatvarači označeni sa (SV) su ili potpuno otvoreni ili zatvoreni (tzv. *on-off*) i imaju ulogu da izoluju pumpu kod njene popravke ili zamene. Regulacioni zatvarač označen sa (CV) ima ulogu da spreči povratni tok kroz pumpu. On se zatvara kada pumpa ispadne iz pogona. Ako je pumpa centrifugalna, prilikom njenog starta zatvarač (CV) je zatvoren. On se postepeno otvara da bi se sprečilo preopterećenje motora pumpe, kao i da bi se izbegli veliki pritisci do kojih bi moglo doći kod starta pumpe sa otvorenim zatvaračem. Ukoliko se kod ispada pumpe iz pogona zahteva zatvaranje zatvarača brže nego što to konstruktivno rešenje regulacionog zatvarača i



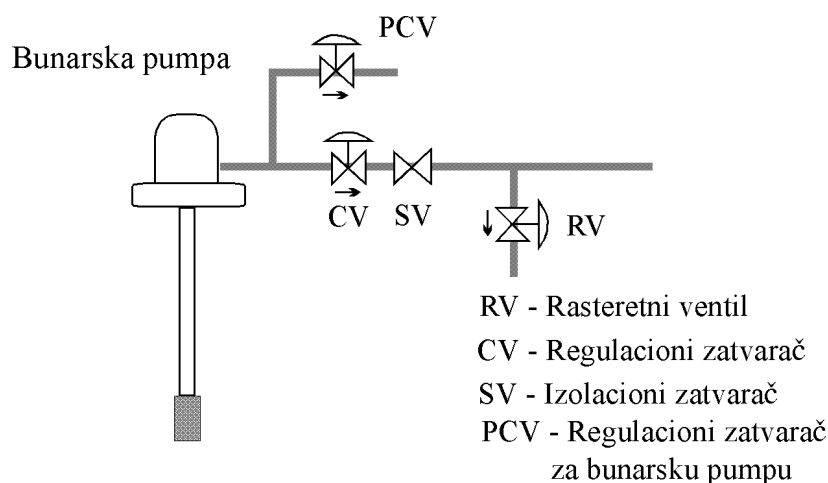
Slika 11.13: Regulatorni zatvarači u standardnoj crpnoj stanici



Slika 11.14: Regulatorni zatvarači u buster crpnoj stanici

njegovog aktuatora omogućava, postavlja se poseban zatvarač, klapna, koji taj zadatak treba da ispuni (Poglavlje 8). Zatvarač (RV), koji se zove i rasteretni ventil, ima ulogu zaštite cevovoda od hidrauličkog udara, ali i štiti sistem od tzv. *zaključanog pritiska*, pojave do koje može doći ako se tečenje u cevi zaustavlja zatvaranjem zatvarača na nizvodnom kraju cevovoda. On se otvara kada pritisak predje vrednost na koju je zatvarač podešen i vodu vraća u usisni rezervoar ili ispušta u atmosferu.

Zatvarači (CV) i (RV) mogu imati i dopunske uloge, regulacije proticaja i pritiska. Kod pumpi sa konstantnim brojem obrtaja proticaj u cevovodu se smanjuje zatvaranjem zatvarača (CV), ili otvaranjem zatvarača (RV), kada on mora biti povezan sa usisnim rezervoarom. U drugom slučaju veća je utrošena energija, ali pumpa radi u oblasti većeg stepena korisnosti. (Kod aksijalnih pumpi, prednost ima drugi način regulacije proticaja i zbog manjeg pritiska i zbog manje angažovane snage.) U buster crpnoj stanici (slika 11.14) shema je vrlo slična standardnoj crpnoj stanici. Rasteretni ventil (RV) može biti spojen na usisnu granu (što treba obavezno proveriti matematičkim modelom hidrauličkog udara) ili sa posebnim ispustom u atmosferu.



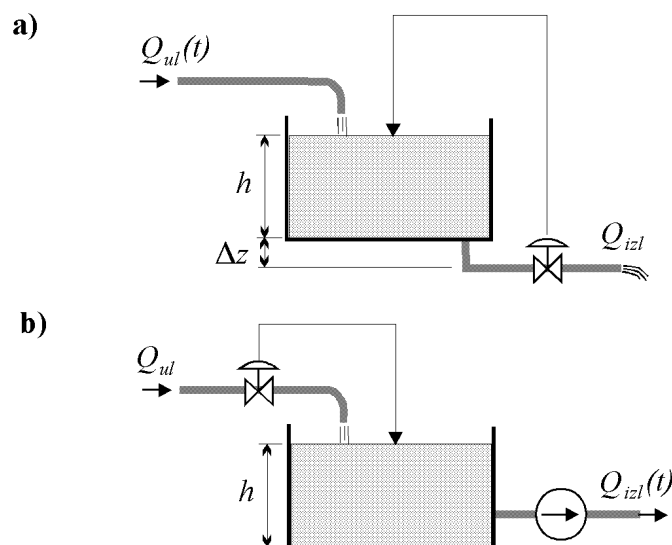
Slika 11.15: Regulacioni zatvarači uz bunarsku pumpu

Na slici 11.15 prikazani su zatvarači koji se postavljaju uz duboke bunarske pumpe. Zatvarači (CV) i (RV) imaju iste funkcije kao i u standardnoj crpnoj stanici. Zatvarač (PCV) je specifičan za ovakve instalacije jer je vertikalna cev iznad pumpe je samo delimično ispunjena vodom. Kod uključenja i isključenja pumpe zatvarač (PCV) je otvoren. Kod starta pumpe zatvarač (CV) je zatvoren, pa vazduh sa delom vode izlazi u atmosferu kroz (PCV). Tek kada se (PCV) zatvori počinje otvaranje zatvarača (CV) i postepeno povećanje brzine vode u potisnom cevovodu. Kod ispada pumpe iz pogona zatvarač (PCV) se otvara i omogućava ulaz vazduha u vertikalnu cev iznad bunarske pumpe.

11.5.2 Auto regulacija

Na slici 11.16 prikazana su dva jednostavna slučaja održavanja nivoa u rezervoaru pomoću regulacionih zatvarača. U slučaju a) nivo u rezervoaru se održava pomoću zatvarača na izlaznoj cevi iz koje voda ističe u atmosferu. Neravnomernost doticaja $Q_{ul}(t)$ dovodi do promena nivoa koje se neutrališu pomeranjem zatvarača. Povećanje proticaja $Q_{ul}(t)$ dovodi do povećanja nivoa, a to se koriguje povećanjem otvora zatvarača (*increase - increase action*). U slučaju b) reguliše se dotok u rezervoar, a izvor poremećaja je proticaj koji uzima pumpa $Q_{izl}(t)$. Povećanje nivoa u rezervoaru koriguje se smanjenjem otvora regulacionog zatvarača (*increase - decrease action*).

Postoji još jedna razlika izmedju slučajeva na slici 11.16. U drugom



Slika 11.16: Regulacioni zatvarači za održavanje nivoa u rezervoaru

slučaju, svaka razlika proticaja Q_{ul} i Q_{izl} , ma koliko mala bila, dovodi do neminovnog pražnjenja ili preliivanja rezervoara i takav sistem se ne može ostaviti bez kontrole. U prvom slučaju male razlike proticaja Q_{ul} i Q_{izl} mogu biti korigovane malim promenama nivoa, jer postoji zavisnost $Q_{izl} \propto \sqrt{h + \Delta z}$. Za takav sistem se kaže da ima osobinu *auto regulacije*, odnosno da postoji ravnotežno stanje u radnoj oblasti sistema. Takvim sistemima je lakše upravljati, ali nažalost ovih drugih je mnogo više.

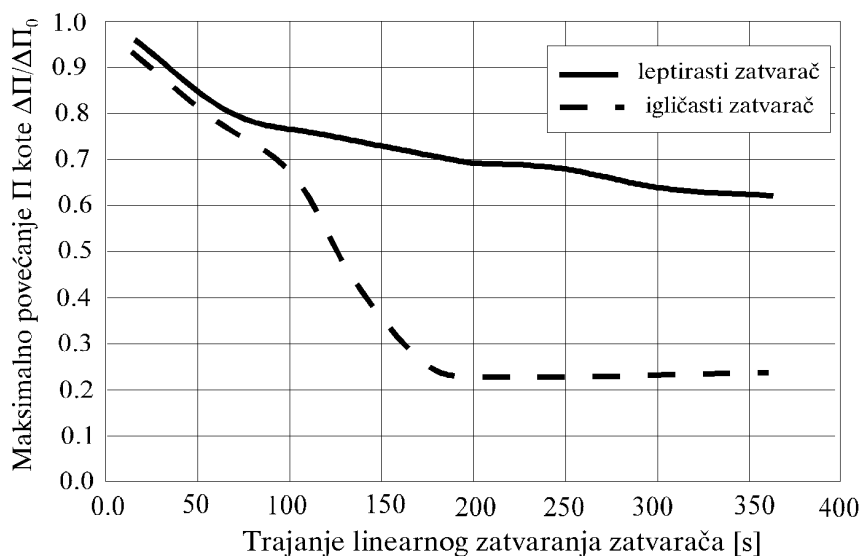
11.6 Prelazni režimi izazvani manevrima zatvarača

Svaki manevar zatvarača prate određene promene proticaja i pritiska, koje se brzinom propagacije elastičnog talasa, a , kreću duž cevovoda. U određenim situacijama, kod brzih manevara zatvarača, promene pritiska mogu biti takve da je ugrožena statička sigurnost cevovoda. U okviru svakog projekta regulacije i upravljanja vodovodnih sistema i magistralnih cevovoda, neophodno je razmotriti i ovaj aspekt problema, poznat kao hidraulički udar, i odrediti adekvatnu zaštitu. To se obično postiže definisanjem režima zatvaranja zatvarača.

Brzina propagacije talasa i vreme zatvaranja (ili otvaranja) zatvarača nisu

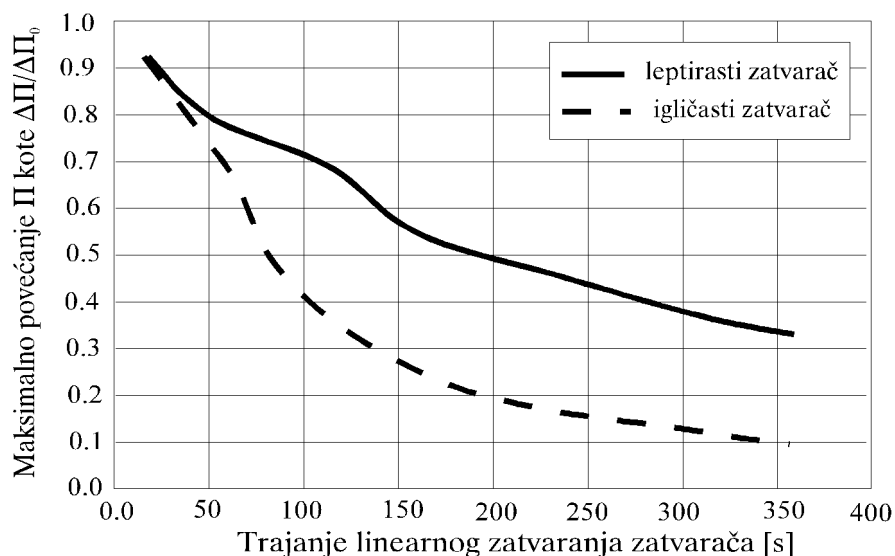
jedini parametri koji određuju povećanje pritiska nego su to i regulacione karakteristike zatvarača, u prvom redu, $dq/d\tau_Z$.

Na slikama (11.17) i 11.18) prikazani su dijagrami zavisnosti povećanja pijeziometarske kote uzvodno od zatvarača u zavisnosti od vremena trajanja zatvaranja, a za regulacione karakteristike zatvarača sa slika (11.7) i (11.8) i za isti hipotetički cevovod dužine 20 km na strani 299. $\Delta\Pi_{HU}$ predstavlja povećanje pijeziometarske kote u odnosu na stanje $Q = 0$, dobijeno numeričkom simulacijom (Ivetić, Ivetić, 1993), a $\Delta\Pi_0$, isto to po teoriji Žukovskog.



Slika 11.17: Povećanje pijeziometarske kote izazvano zatvaranjem zatvarača na magistralnom cevovodu

Značaj povoljnih regulacionih karakteristika zatvarača ovde je posebno izražen. Kao što se može videti (Slika 11.17) kod loše izabranog zatvarača postoji praktična granica do koje se može uticati na smanjenje maksimalnih pritisaka u cevovodu. Teorijski, produžavanjem vremena zatvaranja zatvarača može se pritisak smanjivati u nedogled, ali praktično, zbog rada u zoni nestabilnog tečenja, to nije moguće.



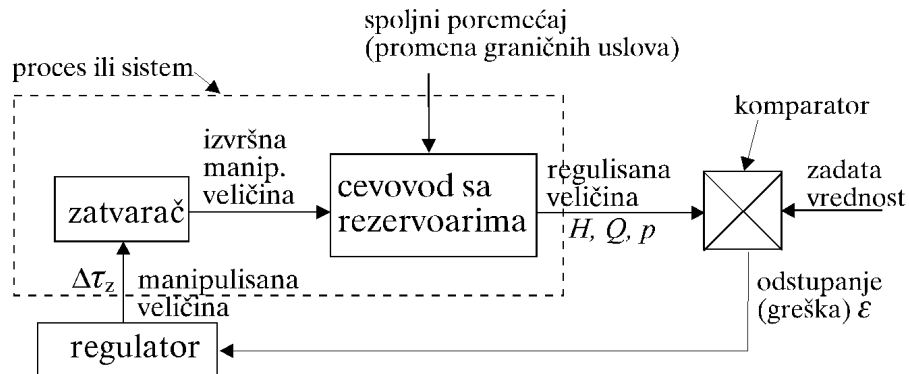
Slika 11.18: Uticaj smanjenja prečnika zatvarača na povećanje pjezometarske kote izazvano zatvaranjem zatvarača

11.7 Napomene o automatskoj regulaciji

Pouzdanost u funkcionisanju većine vodovodnih sistema, kao i njihova ekonomičnost, u velikoj meri zavise od toga kako se njima može upravljati. Kao što je već napomenuto jedan od osnovnih elemenata kojima se može menjati režim rada sistema je zatvarač. Tokom probnog pogona kada se upoznaju karakteristike delova sistema i njegove celine, utvrđuju se karakteristike i položaji jednog dela regulacionih zatvarača. Jedan deo regulacionih elemenata mora aktivno da učestvuje u neutralisanju slučajnih i neočekivanih poremećaja u radu sistema.

Postoji više načina upravljanja od kojih je verovatno najjednostavniji *negativna povratna sprega*. Suština negativne povratne sprege je uspostavljanje poremećene ravnoteže procesa³. Na slici (11.19) prikazana je regulaciona kontura (*control loop*) sa dva osnovna dela: proces (ili sistem) i regulator. Podela je napravljena prema tome što proces čini onaj deo koji inženjer automatičar ne može podešavati a regulator je onaj deo koji se može podešavati.

³ Teorijski, postoji i pozitivna povratna sprega, koja udaljava proces od ravnotežnog položaja.



Slika 11.19: Povratna sprega

U realnim sistemima "proces" sadrži mnogo elemenata, kao što su zatvarači, cevi, rezervoari, pumpe i slično. Za potrebe ovog razmatranja svi su ti elementi skupljeni i pretpostavlja se da su im karakteristike poznate. Mesto zatvarača u regulacionoj konturi prikazano je na slici. Zatvarač je deo sistema (proces) i zato se on nalazi uokviren zajedno sa drugim elementima sistema (cevovodi, rezervoari, pumpe itd.). Na sistem deluju razni poremećaji (promene graničnih uslova i slično) što dovodi do poremećaja stanja sistema. Izlaz iz sistema je regulisana veličina, proticaj, nivo ili pritisak. Vrednost izlaza se upoređuje sa zadatom vrednosti, odredi se odstupanje (ili greška) ε , i informacija o tome upućuje u regulator. U regulatoru se informacija o odstupanju analizira i upućuje neposredna komanda aktuatoru zatvarača, koja je po obliku i predznaku takva da se regulisana veličina izjednači sa zadatom vrednosti.

Jedna od važnih osobina povratne sprege je da regulator stupa u akciju tek kada se pojavilo odstupanje regulisane veličine od zadate vrednosti. Prema tome odstupanja od zadate vrednosti se ne mogu izbeći, ali se izborom parametara regulatora može učiniti da ona budu što manja.

Neke od veličina koje se koriste u razmatranjima karakteristika regulacionih kontura već su objašnjene. Pojačanje sistema predstavlja odnos promene izlaza, recimo proticaja dQ , i promene manipulisanе veličine, položaj zatvarača, $d\tau_z$

$$K_p g_p = \frac{dQ}{d\tau_z} \quad (11.6)$$

gde se proticaj Q , ili pritisak p , regulišu manipulacijom zatvaračem. Pojačanje sistema ima dva dela, K_p , statički deo, koji je definisan izrazom, (11.5), i g_p ,

dinamički deo, koji je vektor i koji ima skalarnu komponentu, G_p , i fazni ugao, ϕ_p .

Pored statičkog dela pojačanja sistema neophodno je odrediti i dinamičke karakteristike sistema da bi se mogle definisati karakteristike regulatora, koji ima svoje pojačanje i svoje dinamičke karakteristike. Pored prigušenja (ili pojačanja) oscilacija regulisane veličine, regulator utiče i na promenu periode i faznog ugla oscilovanja, pa se postavlja pitanje i stabilnosti regulacione konture. Pojačanje regulatora predstavlja odnos njegovog izlaza, promene manipulisanе veličine, $d\tau_Z$, i promene odstupanja od zadate vrednosti, $d\varepsilon$

$$K_c g_c = \frac{d\tau_Z}{d\varepsilon} \quad (11.7)$$

koji se na isti način može podeliti na statički i dinamički deo.

Osnovni zadatak regulatora je da neutrališe uticaj spoljnih poremećaja (promene graničnih uslova i slično) na regulisanu veličinu. Kao najprostija logika nameće se da u tu svrhu treba povećati pojačanje regulatora što je više moguće. Tako se povećava osetljivost regulatora, a odstupanje, ε , koje određuje manipulisanu veličinu, τ_Z , postaje manje. Nažalost, postoji gornja granica pojačanja regulatora, koja se, ili ne sme preći zbog opasnosti od neprigušenih oscilacija, ili zbog fizičkog ograničenja postizanja određenih vrednosti manipulisanе veličine. Granica stabilnosti se mora odrediti da bi se mogla oceniti efikasnost kontrole povratnom spregom.

Ponašanje regulacione konture zavisi i od karakteristika sistema i od karakteristika regulatora i po svojoj složenosti izlazi iz okvira ove knjige. Više o tome može se naći u literaturi (Shinsky, 1988).

Za sisteme regulacije koji se mogu prikazati kao na slici 11.19, najsloženija dinamička struktura regulatora je tzv., PID struktura, koja omogućuje da regulator na svom izlazu daje signal koji je jednak (Matić, 1981)

$$\Delta\tau_Z = K \left(\varepsilon + \frac{1}{T_I} \int \varepsilon dt + T_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \quad (11.8)$$

Prva komponenta u jednačini (11.8) je proporcionalna (P), druga integralna (I), a treća derivaciona (D). K , T_I i T_d su parametri podešavanja regulatora.

Proporcionalna komponenta (P) generiše manipulisanu veličinu koja deluje u cilju anuliranja odstupanja ε , ali sama nije u mogućnosti da ga u potpunosti ukloni. Integralni deo (I) ima zadatak da odstupanje ε u potpunosti ukloni, jer integral po vremenu ma koliko male veličine daje signal dovoljan za pokretanje izvršnog organa. Međutim, integralna komponenta nepovoljno deluje

na stabilnost regulacije zbog unošenja dopunskog kašnjenja u regulacionu konturu. Zbog toga se uvodi derivativna komponenta, koja ima suprotno delovanje od integralne.

Bibliografija

- [1] —, 1994, BERMAD Control Valves, catalogue, Bermad, Evron, Israel.
- [2] —, 1987, ERHARD Armaturen, Catalogue, Johannes Erhard, H. Waldenmaier Erben, Germany.
- [3] —, 1986, KUBOTA-NEYRTEC Valves, Kubota Ltd., Osaka, Japan.
- [4] —, 1986, MUESCO: Regulations and Control of Liquids, Catalogue, MUESCO Inc., Houston, Texas.
- [5] Coulbeck B., Orr C.H. (editors), 1988, *Computer Applications in Water Supply, Volume 2 - Systems Optimization and Control*, John Wiley & Sons Inc.
- [6] Ivetić Marko, Milan Ivetić, 1993, Problemi regulacije proticaja kod magistralnih cevovoda, Savetovanje "Vodovod i kanaizacija 93", Budva.
- [7] Ivetić M., 1994, Control valves - Principles of operation, poglavlje u *New Technologies for Large Water Supply Systems* eds J. Snoxell, Č. Maksimović, F. Calomino, ASI.
- [8] Matić B., 1981, Protok kao regulirajuća i regulirana veličina u regulacionom krugu, Seminar: Regulacioni ventili, JUREMA, Sarajevo.
- [9] Miller D.S., 1987, *Internal Flow Systems*, BHRA Fluid Engineering Series.
- [10] Obradović D., 1991, *Control Valves and Booster Stations*, IHE Delft.
- [11] Shinsky F.G., 1988, *Process Control Systems, Third Edition*, McGraw-Hill Publishing Company.
- [12] Tullis J.P.(ed.), 1971, *Control of Flow in Closed Conduits*, Colorado State University, Fort Collins.

Appendix A

Stabilnost numeričkog modela oscilacija vodostana

Posmatraju se jednačine (5.1) i (5.3) iz Poglavlja 5 za oscilacije vode u tunelu sa cilindričnim vodostanom na nizvodnom kraju. Trenje je zanemareno.

$$\frac{dQ_T}{dt} = \frac{g A}{L}(\Pi_R - \Pi_V) ,$$

$$\frac{d\Pi_V}{dt} = \frac{1}{A_V}(Q_T - Q_{turb}) .$$

Primenom razlike unapred za aproksimaciju izvoda u prethodne dve jednačine, dolazi se do jednostavnog numeričkog modela i Ojlerove metode:

$$\frac{Q_T^{n+1} - Q_T^n}{\Delta t} = \frac{g A}{L}(\Pi_R - \Pi_V^n) , \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\Pi_V^{n+1} - \Pi_V^n}{\Delta t} = \frac{1}{A_V}(Q_T^n - Q_{turb}) . \quad (\text{A.2})$$

Stabilnost ove metode ispituje se proverom uticaja greške na vremenskom nivou (n) na grešku na narednom vremenskom nivou ($n + 1$). Ovde postoje dve zavisno promenljive veličine, i pretpostavlja se da na vremenskom nivou, (n), znamo vrednosti, \tilde{Q}_T i $\tilde{\Pi}_V$, koje se od tačnih razlikuju za, ε_Q^n i ε_{Π}^n . Kao rezultat toga, na narednom vremenskom nivou dobiće se pogrešna vrednost:

$$\frac{(Q_T^{n+1} + \varepsilon_Q^{n+1}) - (Q_T^n + \varepsilon_Q^n)}{\Delta t} = \frac{g A}{L}(\Pi_R - (\Pi_V^n + \varepsilon_{\Pi}^n)) , \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{(\Pi_V^{n+1} + \varepsilon_{\Pi}^{n+1}) - (\Pi_V^n + \varepsilon_{\Pi}^n)}{\Delta t} = \frac{1}{A_V} \cdot ((Q_T^n + \varepsilon_Q^n) - Q_{turb}) \quad (\text{A.4})$$

Ako je numerički model zadovoljen za tačne vrednosti zavisno promenljivih, sledi:

$$\frac{\varepsilon_Q^{n+1} - \varepsilon_Q^n}{\Delta t} = -\frac{g A}{L} \varepsilon_{\Pi}^n, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\varepsilon_{\Pi}^{n+1} - \varepsilon_{\Pi}^n}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_Q^n}{A_V}, \quad (\text{A.6})$$

odnosno,

$$\varepsilon_Q^{n+1} = \varepsilon_Q^n - \frac{g A \Delta t}{L} \varepsilon_{\Pi}^n, \quad (\text{A.7})$$

$$\varepsilon_{\Pi}^{n+1} = \varepsilon_{\Pi}^n + \frac{\Delta t}{A_V} \varepsilon_Q^n. \quad (\text{A.8})$$

Prethodne jednačine se mogu napisati u matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_Q \\ \varepsilon_{\Pi} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{gA}{L}\Delta t \\ \frac{\Delta t}{A_V} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_Q \\ \varepsilon_{\Pi} \end{bmatrix}^n. \quad (\text{A.9})$$

Za stabilnost numeričkog modela zahteva se da se greška uvedena na početku proračuna, smanjuje. Taj uslov će biti zadovoljen ako su sopstvene vrednosti matrice koeficijentata manje od 1. Sopstvene vrednosti se dobijaju iz sledeće jednačine:

$$\left| \begin{array}{cc} 1 - \lambda & -\frac{gA}{L}\Delta t \\ \frac{\Delta t}{A_V} & 1 - \lambda \end{array} \right| = (1 - \lambda)^2 + \Delta t^2 \frac{gA_T}{LA_V} = 0, \quad (\text{A.10})$$

odakle sledi:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{gA_T}{LA_V}} \Delta t = 1 \pm \frac{2\pi\Delta t}{T}, \quad (\text{A.11})$$

gde je T sopstvena perioda oscilovanja tunela i vodostana. Kao što se vidi jedna od sopstvenih vrednosti je veća od 1, pa je metoda bezuslovno nestabilna.

Malom modifikacijom dinamičke jednačine, dolazi se do sledećeg numeričkog modela:

$$\frac{Q_T^{n+1} - Q_T^n}{\Delta t} = \frac{g A}{L} \left(\Pi_R - \frac{\Pi_V^{n+1} + \Pi_V^n}{2} \right), \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\Pi_V^{n+1} - \Pi_V^n}{\Delta t} = \frac{1}{A_V} (Q_T^n - Q_{turb}). \quad (\text{A.13})$$

Na isti način dolazi se do jednačina propagacije grešaka numeričkog modela (A.1):

$$\varepsilon_Q^{n+1} = \left(1 - \frac{(\Delta t)^2 g A_T}{A_V L}\right) \varepsilon_Q^n - \frac{g A \Delta t}{L} \varepsilon_{\Pi}^n, \quad (\text{A.14})$$

$$\varepsilon_{P_i}^{n+1} = \varepsilon_{\Pi}^n + \frac{\Delta t}{A_V} \varepsilon_Q^n. \quad (\text{A.15})$$

Prethodne jednačine se mogu napisati u matičnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_Q \\ \varepsilon_{\Pi} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{(\Delta t)^2 g A_T}{A_V L}\right) & -\frac{g A \Delta t}{L} \\ \frac{\Delta t}{A_V} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_Q \\ \varepsilon_{\Pi} \end{bmatrix}^n. \quad (\text{A.16})$$

Sopstvene vrednosti matrice koeficijenata su jednake:

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2 \pm \frac{\Delta t}{2T} \sqrt{\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2 - 4}, \quad (\text{A.17})$$

odnosno

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2 \pm i \frac{\Delta t}{T} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2}. \quad (\text{A.18})$$

Modul sopstvenih vrednosti (jer se radi o kompleksnim brojevima) je uvek jednak 1, što znači da se greška ne povećava tokom proračuna (ali ni ne smanjuje!) bez obzira na veličinu Δt .

Za $0 < \Delta t < T$, što jedino ima smisla, numerički model prikazan jednačinama (A.12) i (A.13), može se koristiti za računanje oscilacija vode u vodostanima. Zbog tačnosti proračuna, odnosno zbog potrebe prihvatljive aproksimacije oscilatornog rešenja, vremenski priraštaj, Δt , treba da bude znatno manji od periode oscilovanja, T . To se kod ove metode, koja je neutralno stabilna, može ostvariti, dok kod Ojlerove to nije moguće, jer je numerički model (A.1) i (A.2) bezuslovno nestabilan.

Appendix B

Vremenski i frekventni domen

B.1 Prikazivanje periodičnih veličina funkcijama kompleksne promenljive

U nekoliko oblasti Računske hidraulike koriste se metode koje se zasnivaju na rešavanju problema u frekventnom domenu. Kod tečenja u cevima to je oscilatorno kretanje i vibracije, kod tečenja u otvorenim tokovima, talasno kretanje itd. U prvom delu poglavlja 10 akcentat je stavljen na analitičke metode, dok se na kraju pokazuje kako se i pomoću standardnih metoda za proračun hidrauličkog udara i naknadnom analizom rezultata proračuna, može doći do zadovoljavajućeg odgovora. U numeričkim simulacijama turbulentnog tečenja koriste se tzv. spektralne metode. Sa druge strane, u analizi vremenskih serija potrebno je znati da li postoji periodičnost i kako je koja perioda zastupljena. Takodje, neki pokazatelji, kao što su koeficijenti autokorelacije, kroskorelacije, najefikasnije se računaju pomoću direktne i inverzne Furijeove transformacije (transformacije za prevodjenje iz vremenskog u frekventni domen i obratno).

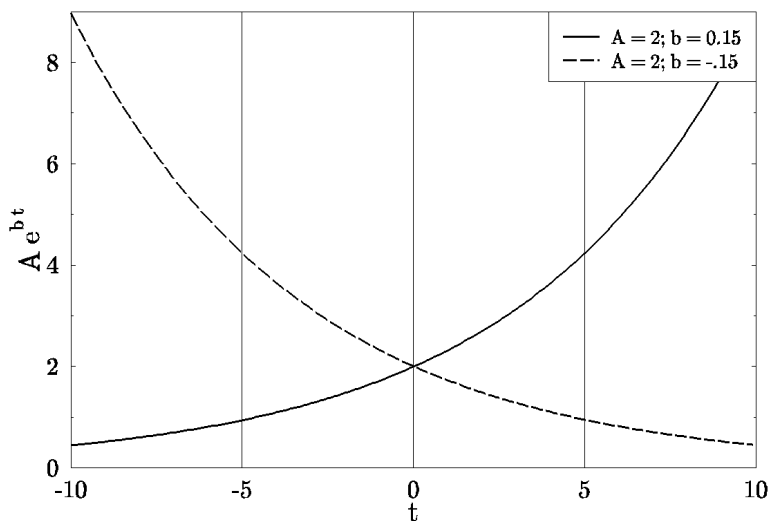
Eksponecijalna funkcija kompleksne promenljive u obliku

$$h(t) = A e^{b t}, \quad (\text{B.1})$$

gde su A i b kompleksni brojevi, koristi se za prikazivanje periodičnih pojava. U zavisnosti od vrednosti koje imaju kompleksni brojevi, eksponecijalna funkcija može imati različite osobine.

Ako su A i b realni brojevi onda je i $h(t)$ realna eksponecijalna funkcija. U zavisnosti od znaka eksponenta b , postoje dva oblika funkcionalne zavis-

nosti $h(t)$. Ako je b pozitivno, sa porastom t , raste i funkcija $h(t)$, a ako je b negativno, opada i funkcija $h(t)$ (slika B.1).



Slika B.1: Dijagrami realne eksponencijalne funkcije $Ae^{\pm bt}$

Druga klasa eksponencijalnih funkcija kompleksne promenljive dobija se ako je b imaginarno

$$h(t) = e^{i\omega_0 t} \quad (\text{B.2})$$

Osnovna osobina ovih funkcija je periodičnost, odnosno,

$$e^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0(t+T_0)} \quad (\text{B.3})$$

gde je T_0 , osnovna perioda funkcije $h(t)$, odnosno, to je najmanji broj za koji važi jednakost

$$e^{i\omega_0 T_0} = 1. \quad (\text{B.4})$$

Iste karakteristike ima i sinusna funkcija

$$h(t) = A \cos(\omega_0 t) \quad (\text{B.5})$$

gde je A amplituda oscilacija, a ω_0 , osnovna ugaona frekvencija (u jedinicama rad/s) i ona je inverzno proporcionalna osnovnoj periodi

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|} \quad (\text{B.6})$$

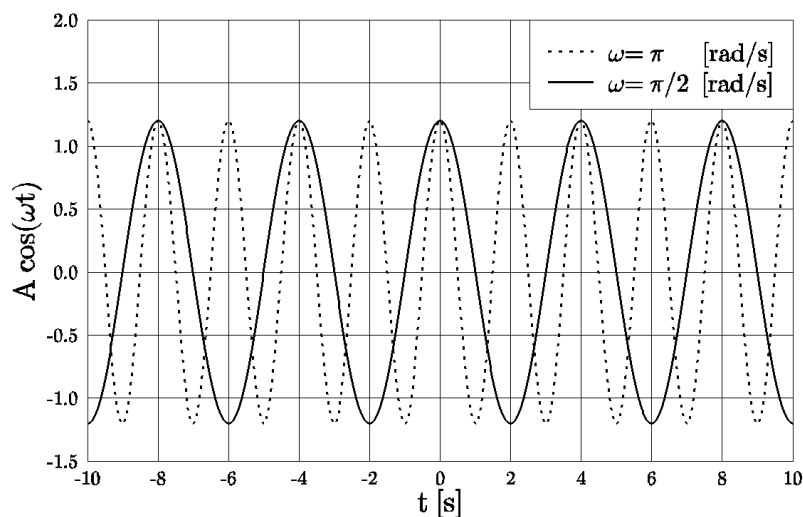
B.1. Prikazivanje periodičnih veličina funkcijama kompleksne promenljive 323

Na slici (B.2) prikazane su dve funkcije sa različitim periodama, 2 i 4 s. Većoj periodi odgovara manja frekvencija i obrnuto, pa su odgovarajuće ugaone frekvencije π i $\pi/2$ [rad/s]. Umesto ugaone frekvencije ω , koristi se i frekvencija f , koja je jednaka

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{B.7})$$

i koja predstavlja broj krugova koje napravi funkcija $h(t)$ u polarnim koordinatama. Jedinica je Hz (Hertz - broj krugova u jednoj sekundi). Perioda oscilovanja je jednaka $T_0 = 1/|f_0|$.

Ako je nezavisno promenljiva dužina, x , onda periodi oscilovanja T_0 , odgovara talasna dužina, L_0 , a frekvenciji f , talasni broj k , broj talasa na jedinici dužine.



Slika B.2: Dijagrami funkcija $A \cos \omega t = \text{Re}[Ae^{i\omega t}]$

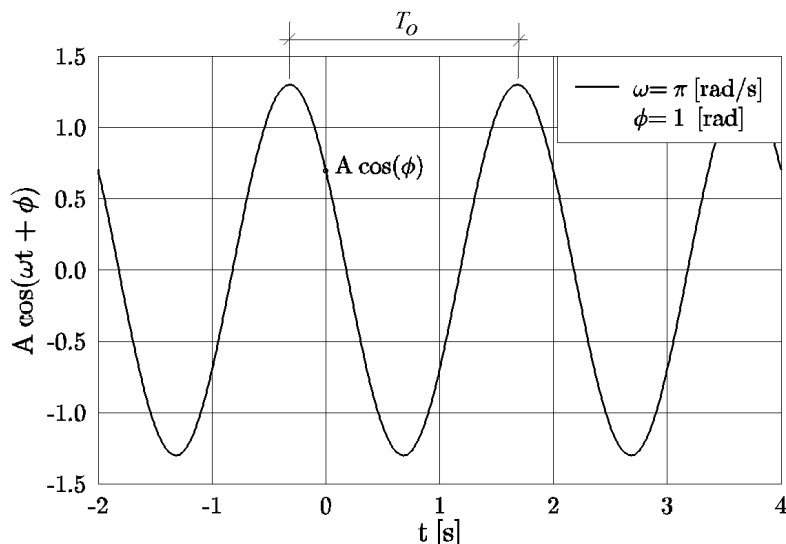
Izraz (B.5) u opštem slučaju glasi $h(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$, gde ϕ ima dimenzije radijana i zove se fazni ugao (slika B.3).

Korišćenjem Ojlerove relacije, funkcija $h(t)$ se može napisati u trigonometrijskom obliku

$$e^{i 2\pi f_0 t} = \cos 2\pi f_0 t + i \sin 2\pi f_0 t, \quad (\text{B.8})$$

a direktna veza izmedju sinusnog (B.5) i eksponencijalnog (B.1) zapisa realne periodične funkcije definisana je na sledeći način

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = A \text{Re}[e^{i(2\pi f_0 t + \phi)}] \quad (\text{B.9})$$

Slika B.3: Dijagram funkcije $A \cos(\omega_0 t + \phi)$

gde, ako je Z kompleksan broj, $Re[Z]$ označa realni deo kompleksnog broja Z .

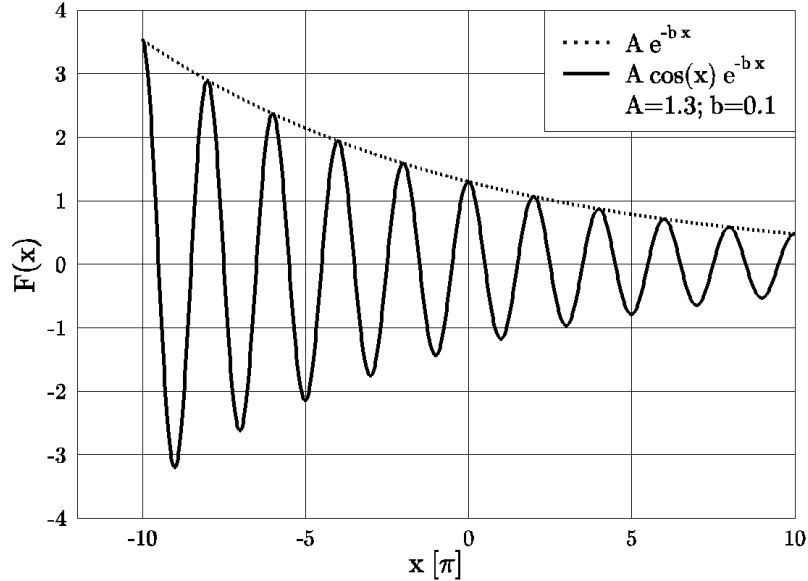
I konačno, ako je b kompleksan broj, $b = b_1 + i2\pi f_0$, onda je

$$Ae^{(b_1 + i2\pi f_0)t + \phi} = Ae^{b_1 t} (\cos(2\pi f_0 t + \phi) + i \sin(2\pi f_0 t + \phi)) \quad (\text{B.10})$$

Na osnovu napred prikazanog nije teško zaključiti kakav oblik će imati funkcionalna zavisnost. Na slici (B.4) prikazana je funkcija koja predstavlja proizvod sinusne funkcije i opadajuće eksponencijalne funkcije. Ona je karakteristična za prigušene oscilacije, koje su analizirane u poglavljima 4 i 5. Primena ovih funkcija nije ograničena samo na periodične procese, koji zadovoljavaju uslove (B.4) i (B.5), nego i na one koji se mogu aproksimirati izrazom

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i) \quad (\text{B.11})$$

gde ima bar jedan slučaj gde je $\omega_i/\omega_n \neq R$, gde je R racionalan broj. Ako se ne vodi računa o faznim uglovima, takva funkcija se može prikazati na dijagramu (B.5) Na istom dijagramu funkcija (B.5) bila bi prikazana samo jednom vrednošću (f_0, A) .

Slika B.4: Prigušene sinusne oscilacije $Ae^{-bt} \cos(\omega t)$

B.2 Furijeova transformacija

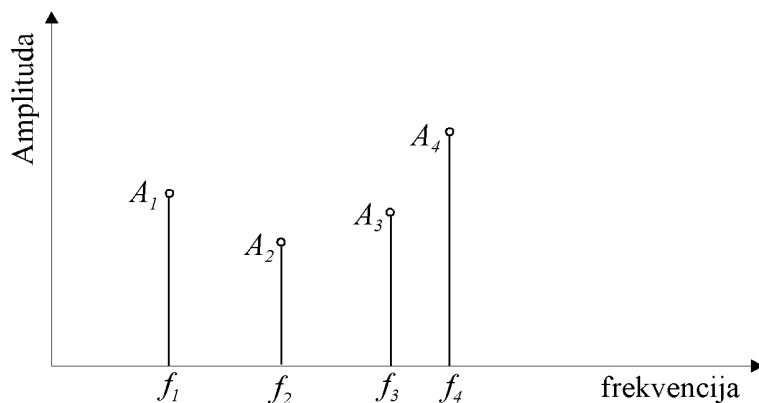
Jedan fizički proces može se opisati ili u vremenskom domenu, preko neke veličine h u funkciji vremena t , $h(t)$, ili u frekventnom domenu, preko vrednosti amplitude H u funkciji frekvencije f , odnosno, $H(f)$. H je u opštem slučaju kompleksna veličina, tako da se može prikazati i fazni ugao periodične funkcije. Polazi se od pretpostavke da su $h(t)$ i $H(f)$ dva različita načina da se prikaže jedna te ista funkcija. Iz jednog u drugi način prikazivanja prelazi se Furijeovom transformacijom koja je definisana sledećim izrazima

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{i 2\pi f t} dt \quad (\text{B.12})$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{-i 2\pi f t} df \quad (\text{B.13})$$

Postupak definisan izrazom (B.13) zove se inverzna Furijeova transformacija. Ako se vreme meri u sekundama, onda se dobija frekvencija f u Hercima [Hz]. Mogu se koristiti i druge jedinice. U funkciji ugaone frekvencije, jednačine (B.12) i (B.13) glase

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{i \omega t} dt \quad (\text{B.14})$$



Slika B.5: Prikazivanje funkcije u frekventnom domenu

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{B.15})$$

B.2.1 Konvolucija i korelacija

Za dve funkcije $h(t)$ i $g(t)$, i njihove Furijeove transformacije, $H(f)$ i $G(f)$, mogu se definisati dve kombinacije koje su od praktičnog značaja. Konvolucija dve veličine, koja se obeležava kao $g * h$, jednaka je

$$g * h \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{B.16})$$

Može se pokazati da je Furijeova transformacija konvolucije dve funkcije jednaka proizvodu pojedinačnih Furijeovih transformacija, odnosno

$$g * h \iff G(f)H(f) \quad (\text{B.17})$$

gde \iff obeležava par funkcija od kojih je jedna dobijena Furijeovom transformacijom druge. Svojstvo iskazano izrazom (B.17) koristi se kod analize sistema i kod određivanja prenosne funkcije sistema, odnosno veze ulaza i izlaza u frekventnom domenu. Ako su $x(t)$ i $y(t)$ ulaz u sistem i odgovarajući izlaz iz prostog sistema, onda se njihova zavisnost može prikazati kao

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (\text{B.18})$$

gde je $h(\tau)$ prenosna funkcija posmatranog sistema. U frekventnom domenu relacija (B.18) glasi

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \quad (\text{B.19})$$

Prenosna funkcija sistema $H(f)$ je kompleksna veličina, koja se može prikazati kao

$$H(f) = |H(f)|e^{-i\Phi(f)} \quad (\text{B.20})$$

gde je $|H(f)|$ faktor pojačanja, koji predstavlja odnos amplituda dela izlaza i ulaza za frekvenciju f , a $\Phi(f)$ fazni pomak izmedju izlaza i ulaza. Prenosna funkcija sistema može se odrediti merenjem ulaza i izlaza i njihovom Furijeovom transformacijom (Ivetić i dr., 1981; Ivetić, Maksimović, 1984).

Cevovodi i složene cevne mreže mogu se posmatrati na isti način, a veličine kao hidraulička impedansa (10.27) i slično, mogu se odrediti preko Furijeovih transformacija izmerenih pjezometarskih kota i proticaja.

Korelacija dve funkcije $g(t)$ i $h(t)$, koja se obeležava kao $Kor(g, h)$, definiše se na sledeći način

$$Kor(g, h) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau + t) h(\tau) d\tau \quad (\text{B.21})$$

Korelacija je funkcija nezavisno promenljive t , koja se zove kašnjenje. Furijeova transformacija korelacije dve funkcije jednaka je proizvodu Furijeove transformacije jedne od njih i kompleksno konjugovane Furijeove transformacije druge funkcije (ako su g i h realne funkcije onda je $H(-f) = H^*(f)$)

$$Kor(g, h) \iff G(f)H^*(f) \quad (\text{B.22})$$

Korelacija jedne funkcije sa samom sobom zove se autokorelacija, i za nju se može napisati

$$Kor(g, g) \iff |G(f)|^2 \quad (\text{B.23})$$

Od interesa je i sledeća relacija (Parsevalova teorema) o ukupnoj energiji signala, koja je ista bez obzira da li se računa u vremenskom ili frekventnom domenu, odnosno,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (\text{B.24})$$

Veličina pod integralom na desnoj strani jednačine predstavlja energiju na intervalu izmedju f i $f + df$, i zove se funkcija spektralne gustine. Ako se radi o funkciji koja je definisana na intervalu $-\infty < t < \infty$, ukupna energija signala je takodje beskonačna. Zbog toga se radi sa dovoljno dugačkim vremenskim intervalom veličine $h(t)$, za koji se sračuna funkcija spektralne gustine i podeli sa dužinom vremenskog intervala. Dobija se funkcija spektralne gustine po jedinici vremena, a integral u izrazu (B.24) jednak je srednjem kvadratnom odstupanju amplitude funkcije $h(t)$.

B.2.2 Funkcija spektralne gustine

Za prikazivanje frekventnog sastava nepriodične funkcije koristi se funkcija spektralne gustine, koja predstavlja vrednost kvadrata amplitude komponente funkcije u intervalu f i $f + \Delta f$, podeljeno sa Δf , odnosno,

$$G_x(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t, f, \Delta f) dt \right], \quad (\text{B.25})$$

gde je T dužina vremenskog zapisa funkcije x , $x(t, f, \Delta f)$ deo funkcije $x(t)$ u intervalu frekvencija od f do $f + \Delta f$.

Funkcija spektralne gustine se može proceniti preko Furijeove transformacije

$$G_x(f) = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [|X(f, T)|^2], \quad (\text{B.26})$$

gde je $E[\]$ matematičko očekivanje.

B.3 Diskretna Furijeova transformacija

U većini slučajeva veličina $h(t)$ se *uzorkovanjem* prevodi u niz brojevanih vrednosti na podjednakom vremenskom razmaku Δt . Ukoliko se radi o rezultatima proračuna, onda se oni već nalaze u takvom obliku

$$h_n = h(n \Delta t) \quad n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.27})$$

Recipročna vrednost vremenskog intervala Δt zove se frekvencija uzorkovanja.

Kada se radi sa diskretnim zapisom funkcije h_n , postoje određena ograničenja o kojima se mora voditi računa. Vremenski interval uzorkovanja određuje tzv. Najkvistovu (*Nyquist*) kritičnu frekvenciju f_c , koja je jednaka

$$f_c \equiv \frac{1}{2\Delta t} \quad (\text{B.28})$$

i koja predstavlja granicu do koje se može prepoznati frekvencija u vremenskom nizu. Ako se desi da u funkciji $h(t)$ postoje i više frekvencije one će biti lažno predstavljene u frekvencijama nižim od Najkvistove (ovaj fenomen se zove *aliasing*).

Funkcija spektralne gustine se može proceniti na osnovu konačnog broja vrednosti funkcije $h(t)$ u N tačaka

$$h_j = h(t_j) \quad t_j = j\Delta t \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (\text{B.29})$$

Na osnovu vrlo efikasnog postupka, tzv. Brze Furijeove transformacije (*FFT - Fast Fourier Transform*) (Press et al. 1989), može se doći do diskretnih Furijeovih transformacija

$$C_k \sum_{j=0}^{N-1} h_j e^{2\pi i j k/N} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (\text{B.30})$$

Procene funkcije spektralne gustine definisane su u $N/2 + 1$ tačaka

$$P(0) = P(f_0) = \frac{1}{N^2} |C_0|^2$$

$$P(f_k) = \frac{1}{N^2} [|C_k|^2 + |C_{N-k}|^2] \quad k = 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \quad (\text{B.31})$$

$$P(f_c) = P(f_{N/2}) = \frac{1}{N^2} |C_{N/2}|^2 \quad (\text{B.32})$$

gde je f_k može biti samo nula i veće od nule

$$f_k = \frac{k}{N \Delta t} = 2f_c \frac{k}{N} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (\text{B.33})$$

Formula za inverznu Furijeovu transformaciju, kojom se od C_k dobijaju vrednosti h_j , glasi

$$h_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{-2\pi i k_j/N} . \quad (\text{B.34})$$

Takodje, postoje i odgovarajući izrazi za računanje konvolucije i korelacije na osnovu diskretno zadatih vrednosti vremenske serije. O svemu tom može se naći u obimnoj literaturi iz ove oblasti, od koje je navedeno samo nekoliko odrednica u spisku literature.

Bibliografija

- [1] Bendat J.S., Piersol A.G., 1971, *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Wiley-Interscience.

- [2] Bloomfield P., 1976, *Fourier Analysis of Time Series: An Introduction*, John Wiley & Sons.
- [3] Ivetić M., Maksimović Č. i Čukić Lj., 1981, Neki aspekti primene brze Fourier-ove transformacije za spektralnu analizu, 15. jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Kupari.
- [4] Ivetić M., Maksimović Č., 1984, Dinamičke karakteristike jednog sistema za merenje nivoa, 16. jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Bečići.
- [5] Oppenheim A.V., Willsky A.S., Young I.T., 1983, *Signals and Systems*, Prentice-Hall Signal Processing Series.
- [6] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., 1989, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press.
- [7] Prodanović D., Špoljarić A., Ivetić M., Č. Maksimović, 1985, Dynamic characteristics of a pressure measuring system, International Symposium on Measuring Techniques in Hydraulic Research, Delft, Balkema, Holland.

Index

- Adams-Bašfort-Multonova metoda 13, 57, 100, 105
- aktuatori (električni, pneumatski i hidraulički) 272
- algoritam
 - dvostrukog prolaza (*double sweep*) 160-5
 - računski 45, 49
- Alijevijske jednačine 61, 124
- analitičke metode 2, 5, 173, 244, 293
- analitičko rešenje matematičkog modela 7, 14, 69, 76, 78, 80, 84, 90, 93, 124, 222, 260
- analogni modeli 2, 244
- aproksimacija
 - člana sa trenjem 135-6, 245, 255
 - greška 18
 - integrala 12
 - izvoda 9-11, 127, 132
 - centralne razlike 9-11, 164
 - razlike unapred 9-12, 14, 289
 - razlike unazad 9-11, 164
 - jednačine 14, 17, 40
 - koeficijenta trenja 29, 33
- auto regulacija 283
- automatska regulacija 285-8

- Bernulijeva jednačina 27, 45, 84, 103, 123, 142, 271
- Blazijusov izraz 28-9
- blenda (dijafragma) 252
- brzina prostiranja (talasa) poremećaja 61-2, 153, 155
 - mere za smanjenje 21
 - uticaj suspendovanih čestica 219-20
 - uticaj vazduha 214-9
- brzina trenja u_* 28
- brzinska visina 23, 30-1, 45, 140, 145, 148, 152, 175, 226, 252, 271
- Bulirš-Šterova metoda 13

- cev 21
- crpne (pumpne) stanice 45-51, 54-5, 167, 180-1, 184-5, 193, 198, 204-6, 223, 230-1, 238-0, 281-2
 - granični uslovi 184, 186-7, 192, 204
 - kavitacija 181
 - paralelno vezane pumpe 49, 180, 182, 185, 198, 204
 - pumpe sa promenljivim brojem obrtaja 180-1, 185-6
 - serijski vezane pumpe 49, 180, 183, 185, 198, 204
 - usisna visina pumpe *NPSH* 181

- čvor 21, 146
- čvorna potrošnja 22

- diferencijalne jednačine
 - obične 6
 - parcijalne (eliptičke, hiperboličke i paraboličke) 123
- diferencijalni pristup 5, 114
- dinamička jednačina *vidi* jednačina održanja količine kretanja

- dinamička struktura (diferencijalna, integralna i proporcionalna) regulatora 287-8
- diskretizacija 5, 8, 14, 91, 127, 132-6, 163, 244
- distribuciona mreža 6, 30, 33, 39, 45, 51, 54-7, 125, 140, 142, 164, 179, 279
- elastični udar *vidi* hidraulički udar
- empirijske metode 2, 27, 29
- energetska jednačina za pumpu 195-6
- faktor disperzije metode karakteristika 155, 158
- faktor nadrelaksacije 43
- faktor prigušenja (pojaćanja) 160-1, 298
- fazni pomak 100, 250
- fazni ugao 249, 251-2, 265, 287, 295, 297
- fiksni gubici energije 271-6
- fizičke karakteristike vode 64
- fizički modeli 3
- frekventni domen 65, 244, 293, 297-8
- funkcija spektralne gustine 265-7, 299-301
- Furijeova transformacija 244, 262, 297
brza 265, 301
direktna 293, 297
diskretna 300
inverzna 293, 298
- Gaus-Zajdelova metoda 40-1
- granični uslovi 5, 53, 84, 86, 88, 124-5, 137, 157-8, 163, 213
kavitet 223-4
pumpa 137, 141, 184-6, 255
rezervoar 140-1, 251
spoj dve (ili više) cevi 145-7, 252-3
vazdušna komora 230-3, 254
vodostan 95-8, 226, 253
zatvarač 142, 148, 251
- gravitacioni cevovod 145, 270-1
- Hardi Krosova metoda
čvorova, II metoda, 37, 42
prestenova, ΔQ metoda, 36-7
- hidranti 45-6, 142
- hidraulički obrtni moment 169, 174, 187, 193, 196-7
- hidraulički radijus 26, 59
- hidraulički udar 4, 53, 59, 86, 103, 108, 174, 179, 181, 210
matematički model 111-125
numerički model 130-165
- hrapavost cevi 27-9, 32-3, 76, 145, 269
- Hukovo (elastično) telo 119
- impedansa
hidraulička 248-58, 299
karakteristična 247-50, 258
- inercijalna sila 26, 167-8
- integralni pristup 5
- interpolacija 8, 160
- ispad pumpe iz pogona 174, 186, 192-7
- Jangov modul elastičnosti 63, 120, 219
- jedinični rad kola pumpe 171
- jedinični strujni rad 171
- jednačina kontinuiteta 4, 22-4, 34-42, 50, 54, 61, 77, 79, 88, 103, 117-22, 145, 147, 195, 226-8, 233, 252-4
- jednačina obrtanja pumpe 196
- jednačina održanja količine kretanja 23, 27, 58, 60, 71, 115-7
- jednačina održanja momenta količine kretanja 168-72
- jednačine prostiranja električne struje kroz provodnike (podužna induktivnost, kapacitivnost, otpornost, inertansa i kapacitansa) 244-5
- jednosmerni vodostan 213, 228-30, 233

- karakteristike, pozitivna i negativna, 129-34
 karakteristike pumpe u 4 kvadranta 187-192
 Karmanova konstanta 28
 kavitacija u prelaznim režimima 221-5
 kinematička svojstva strujanja 4
 klapne (nepovratni ventili) 198-201
 Knapov dijagram 188, 191
 koeficijent lokalnog gubitka energije 30-1, 45, 142, 148, 196, 227, 252, 271, 274
 koeficijent nadrelaksacije 43
 koeficijent neravnomernosti potrošnje 54
 koeficijent prostiranja 246-7, 258, 260
 koeficijent tangencijalnog napona 25-6
 koeficijent trenja 2, 26-33, 59, 74-7, 271
 koeficijenti pumpe 173
 koeficijent napora 175
 koeficijent prečnika 176
 koeficijent proticaja 175, 187
 koeficijent snage 175, 202
 koeficijent umanjenja napora pumpe 172
 specifična brzina (brzohodost) 175, 177
 Kolbruk Vajtov obrazac 29
 kompaktna implicitna metoda 162
 konsistentnost 17
 kontinualna simulacija 54, 56, 142
 kontrola pritiska *vidi* regulacija
 kontrolna zapremina 60-2, 115-8, 168-9
 konvergencija 15, 17, 38, 41-3, 51, 93
 konvolucija 298-9
 korelacija 298-9
 kruti udar 53, 58-9, 65, 69, 84-5, 90, 98, 114, 116, 123, 144, 159, 165, 222, 228
 Kurantov (*Courant*) broj Cr 165
 kvazi-ustaljeno tečenje 53-7, 65, 67, 82-3, 123, 165, 184, 203, 279
 laminarno tečenje 27, 246
 Laplasova promenljiva, $s = \sigma + i\omega$ 246
 linearizacija 49, 245
 lopatice radnog kola pumpe 169-72
 matematički modeli 1-5, 17, 21-2, 53-65, 86, 90-1, 96, 98, 111, 114, 122-4, 127, 135, 159, 184, 191, 227-8, 232
 meridijanska komponenta brzine (kod pumpe) 168-71
 metoda frekventnog odziva 65, 250
 metoda karakteristika 127-159
 interpolacije po prostoru 153
 interpolacije po vremenu 158
 metoda konačnih razlika 6, 9-11, 14, 127
 metoda slobodnih vibracija 65
 metoda sukcesivnih nadrelaksacija (*SOR*) 40
 metoda Šnider-Beržerona 125
 metoda Runge-Kuta 13, 57
 modifikovana jednačina
 modul kompleksne pijezometarske kote 249, 251, 258
 moment inercije pumpe 197, 202-3
 Mudijev dijagram 29-30
 Navije-Stoksove jednačine 4
 neustaljeno tečenje 4, 27, 53, 65, 96, 116, 121, 133, 142, 160, 203, 240, 278
 Nikuradzeovi eksperimenti 2, 27-9
 numerička (približna) integracija 8, 11, 56, 90-1, 132
 leap-frog metoda 13, 91, 94, 228, 232
 mid-point rule 12-3
 trapezno pravilo 12-3, 18, 91

- numerički modeli 3, 6, 14-8, 69, 84,
 91, 107, 130, 134-7, 152-4, 210,
 232-3, 239, 189-91
- Njutn-Rafsonova metoda 38, 43
- obilazni vod (*by-pass*) 204, 239-40
 odbijanje talasa 112-4, 222
 Ojlerova metoda 12-7, 56-7, 84, 91-3,
 100, 132, 137, 189-91
- oscilacije
 amplituda 73, 78, 89, 90, 103
 bez trenja 71-2, 88
 perioda oscilacija 73, 78, 89-91,
 113, 295
 prigušenje 76, 82, 95, 154, 296
 prinudne 250
 sopstvene 90, 243, 250
 sa trenjem 73-6
 tečnosti u cevima 71, 85
 tečnosti u spojenim rezervoarima
 77-8, 86, 289
- oscilatorno kretanje i vibracije 53, 64,
 243, 267, 293
- piježometarska kota 22, 25-6, 34-5, 38-
 46, 50, 60, 71, 88, 103, 111,
 116, 122-4, 133, 140, 147-8,
 222-8, 244
- Pikarova (*Pickard*) metoda 39, 43
 Poasonov koeficijent 120, 219
 pojačanje (procesa) sistema 286-7
 pojačanje regulatora 287
 pokretni koordinatni sistem 60-2
 politropski koeficijent m 232, 255
 povratna sprega 285-7
 Prajsmanova metoda 163
 Prantlov univerzalni zakon 28
 prelazni režimi 54, 114, 158, 167
 prenosna funkcija 244, 248, 259, 265,
 298
- pritisak
 u težištu preseka 25
 vazduha u vazdušnoj komori 232
- prskači 45
 pseudo cev (prsten) 35-6
 pumpe 47-51, 167-206
 aksijalne (propelerne) 168, 177
 dinamičke 167
 poluaksijalne 168
 radijalne (centrifugalne) 168, 177,
 188, 255
 zapreminske 141, 167
- radno kolo pumpe 168-70
 rasteretni ventili 204, 238-9, 281
 razdvajanje stuba tečnosti (*column sep-
 aration*) 221
 redukcija pritiska 279-80
 referentni čvor 41, 179
 regulacija i održavanje nivoa (pritiska)
 279
 regulacija proticaja 177, 180-1, 269-
 78
 regulacija rada turbine 95-103, 227
 konstantan proticaj 96
 konstantan otvor regulatora 96
 konstantna snaga 96-7, 100
 regulaciona kontura (*control loop*) 286
 regulacioni zatvarač 213, 230, 251, 272-
 82
- Rejnoldsov broj 27-9, 173, 246
 Rejnoldsove jednačine 4
 rezonanca 243
 Ričardsonova metoda 13
 Rimanova rešenja 124, 133
- sila kočenja 105-7
 sila pritiska 25-6, 58, 60-1, 70-1, 115-6
 sila težine 25-6, 58, 71, 116
 sila trenja 25-7, 58, 73, 116
 snaga
 pogonskog motora pumpe 172, 174,
 185, 196
 pumpe 172, 177
 radnog kola pumpe 171-2
 sopstvene vrednosti matrice koeficije-
 nata 123, 127

- stabilnost numeričkog modela 160, 290
 - uslovna 15
 - bezuslovna 17, 291
 - neutralna 291
- stabilnost rada vodostana 95-102
- start pumpe 177, 186, 196, 203-4
- stepen korisnosti pumpe 172-4, 177-81, 181
- Suterove relacije 191-2

- tačnost 18, 134-5
- talasni dužina 160
- tangencijalna (obimska) komponenta brzine (kod pumpe) 168
- teorijsko rešenje Žukovskog 61, 111, 133-4, 137, 284
- Tomin kriterijum 97, 108
- trougao brzina (kod pumpe) 173
- turbine 85-6, 91, 169
- turbomašine 168-73
- turbulentno tečenje 27-9, 53, 76, 246, 293

- ugaona brzina obrtanja pumpe 174
- ustaljeno tečenje 21, 53, 71
- uzroci hidrauličkog udara 210-1

- vazдушna komora 205, 230-3
- vazdušni ventil 233-8
- visina dizanja (napor) pumpe 47-8, 172, 177-81, 195, 255
 - dinamička 179
 - statička (geodetska) 48, 179
- vodostani 85-109, 226-30
 - diferencijalni 86, 107
 - obični 86, 90, 108, 226
 - sa prigušivačem 86, 103-4, 227
- vremenski domen 293-7

- zaključani pritisak 137
- zakon zatvaranja zatvarača 213
- zapreminski modul stišljivosti 62-4, 119, 215-7
- zaštita od hidrauličkog udara 209-41

- zatvarači 45-6, 142-5, 148-9, 195-7, 251-2
- zbacivanje snage (*load rejection*) 85
- zona zavisnosti tačke 130
- zona uticaja tačke 130