

---

# Испитивање тока и скицирање графика функције

---

Анастасија Анђелковић

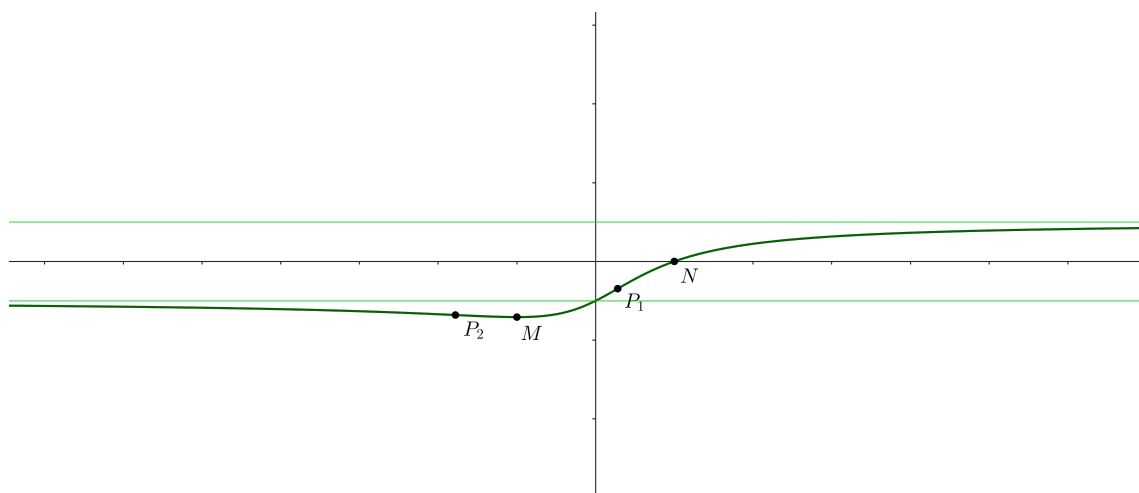
# 1 ЗАДАТАК

1. Испитати ток и скицирати график следеће функције:

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}$$

Скица решења:

Домен:	$x \in (-\infty, \infty)$
Нуле:	$N(2, 0)$
Знак:	$f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 2)$ $f(x) > 0$ за $x \in (2, \infty)$
Парност:	Није ни парна, ни непарна
Периодичност:	Није периодична
Асимптоте:	$y = -1$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow -\infty$ $y = 1$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow \infty$
Монотоност:	Функција је опадајућа за $x \in (-\infty, -2)$ Функција је растућа за $x \in (-2, \infty)$ $M(-2, -\sqrt{2})$ је локални минимум
Конвексност:	Функција је конкавна за $x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$ Функција је конвексна за $x \in \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$ Функција је конкавна за $x \in \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, \infty\right)$ Превојне тачке су: $P_1\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, f\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)\right)$ и $P_2\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, f\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)\right)$



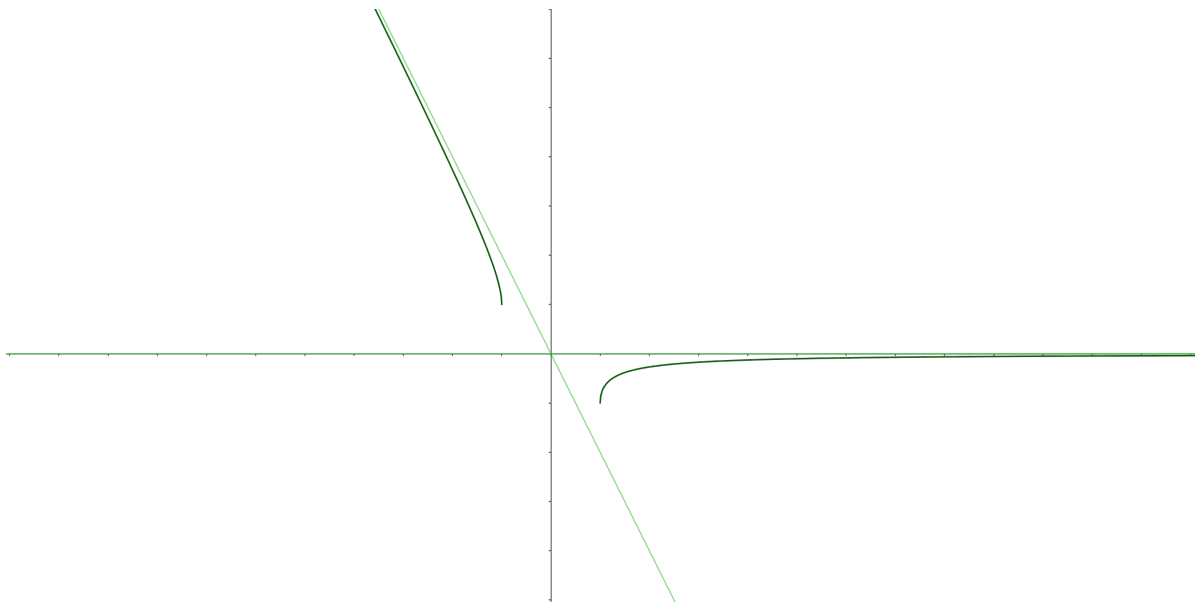
1.1: Скица графика  $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}$

2. Испитати ток и скицирати график следеће функције:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$$

Скица решења:

Домен:	$x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Нуле:	Нема нула
Знак:	$f(x) < 0$ за $x \in [1, \infty)$ $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -1]$
Парност:	Није ни парна, ни непарна
Периодичност:	Није периодична
Асимптоте:	$y = -2x$ је коса асимптота кад $x \rightarrow -\infty$ $y = 0$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow \infty$ $f(-1) = 1$ и $f(1) = -1$
Монотоност:	Функција је опадајућа за $x \in (-\infty, -1)$ Функција је растућа за $x \in (1, \infty)$ Нема екстремних вредности
Конвексност:	Функција је конкавна за $x \in (-\infty, -1)$ Функција је конкавна за $x \in (1, \infty)$ Нема превојних тачака



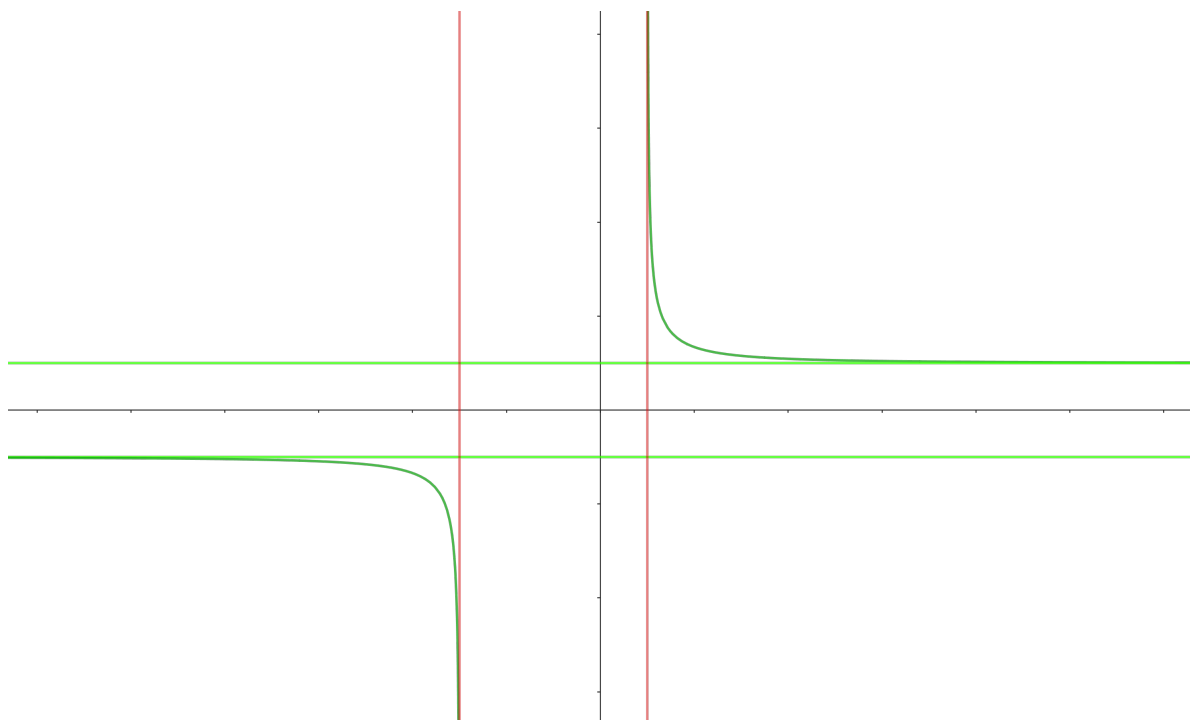
1.2: Скица графика  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$

3. Испитати ток и скицирати график следеће функције:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$

Скица решења:

Домен:	$x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$
Нуле:	Нема нула
Знак:	$f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -3)$ $f(x) > 0$ за $x \in (1, \infty)$
Парност:	Није ни парна, ни непарна
Периодичност:	Није периодична
Асимптоте:	$y = -1$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow -\infty$ $y = 1$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow \infty$ $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$
Монотоност:	Функција је опадајућа за $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ Нема екстремних вредности
Конвексност:	Функција је конкавна за $x \in (-\infty, -3)$ Функција је конвексна за $x \in (1, \infty)$ Нема превојних тачака



1.3: Скица графика  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

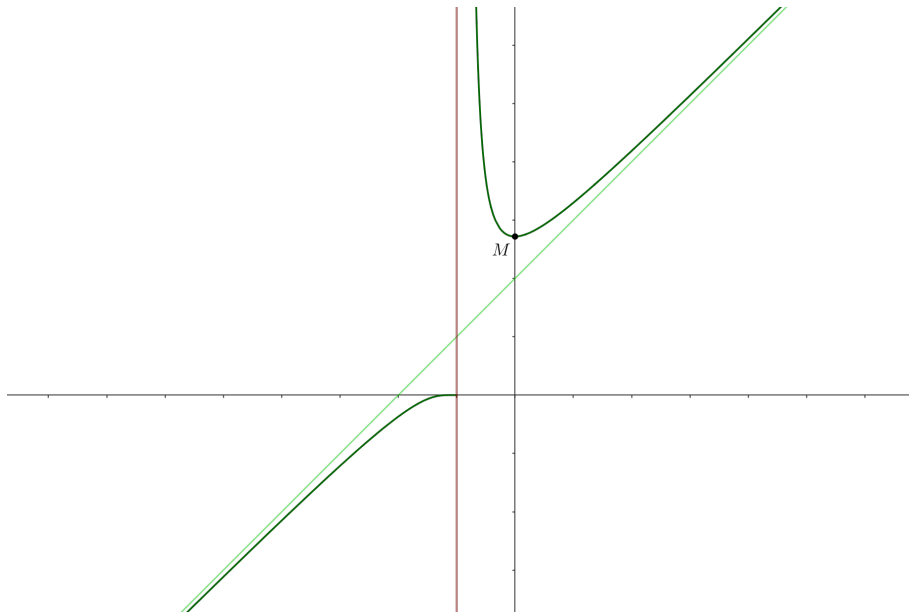
## 2 ЗАДАТАК

1. Испитати ток и скицирати график следеће функције:

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$$

Скица решења:

Домен:	$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
Нуле:	Нема нула
Знак:	$f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -1)$ $f(x) > 0$ за $x \in (-1, \infty)$
Парност:	Није ни парна, ни непарна
Периодичност:	Није периодична
Асимптоте:	$y = x + 2$ је коса асимптота кад $x \rightarrow -\infty$ $y = x + 2$ је коса асимптота кад $x \rightarrow \infty$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$
Монотоност:	Функција је растућа за $x \in (-\infty, -1)$ Функција је опадајућа за $x \in (-1, 0)$ Функција је растућа за $x \in (0, \infty)$ $M(0, e)$ је локални минимум
Конвексност:	Функција је конкавна за $x \in (-\infty, -1)$ Функција је конвексна за $x \in (-1, \infty)$ Нема превојних тачака



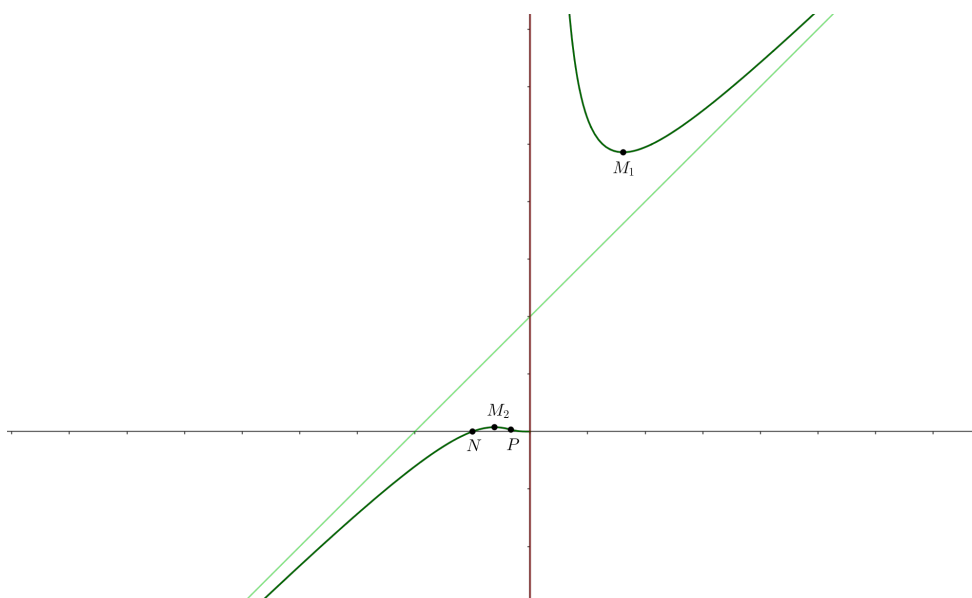
2.1: Скица графика  $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$

2. Испитати ток и скицирати график следеће функције:

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$$

Скица решења:

Домен:	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Нуле:	$N(-1, 0)$
Знак:	$f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -1)$ $f(x) > 0$ за $x \in (-1, \infty)$
Парност:	Није ни парна, ни непарна
Периодичност:	Није периодична
Асимптоте:	$y = x + 2$ је коса асимптота кад $x \rightarrow -\infty$ $y = x + 2$ је коса асимптота кад $x \rightarrow \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$
Монотоност:	Функција је растућа за $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ Функција је опадајућа за $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ Функција је растућа за $x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$ $M_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ је локални максимум $M_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ је локални минимум
Конвексност:	Функција је конкавна за $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ Функција је конвексна за $x \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ $P\left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ превојних тачака



2.2: Скица графика  $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$

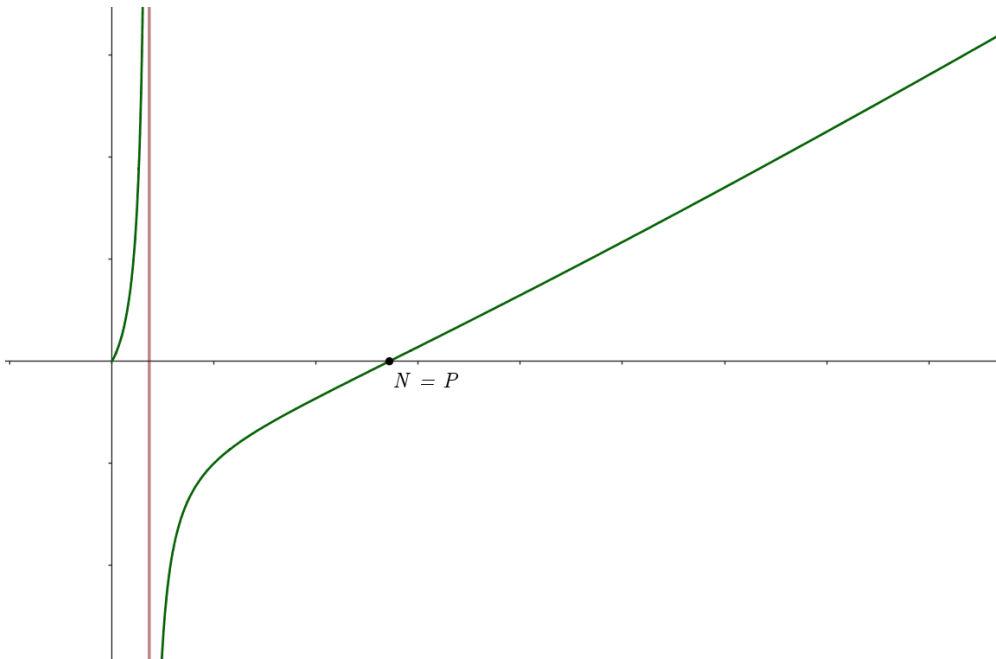
### 3 ЗАДАТАК

1. Испитати ток и скицирати график следеће функције:

$$f(x) = x \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$$

Скица решења:

Домен:	$x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, \infty)$
Нуле:	$N(e, 0)$
Знак:	$f(x) < 0$ за $x \in (\frac{1}{e}, e)$ $f(x) > 0$ за $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e, \infty)$
Парност:	Није ни парна, ни непарна
Периодичност:	Није периодична
Асимптоте:	Нема ни хоризонталну, ни косу асимптоту кад $x \rightarrow \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x) = -\infty$
Монотоност:	Функција је растућа за $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, \infty)$
Конвексност:	Функција је конвексна за $x \in (0, \frac{1}{e})$ Функција је конкавна за $x \in (\frac{1}{e}, e)$ Функција је конвексна за $x \in (e, \infty)$ $P(e, 0)$ је превојна тачка



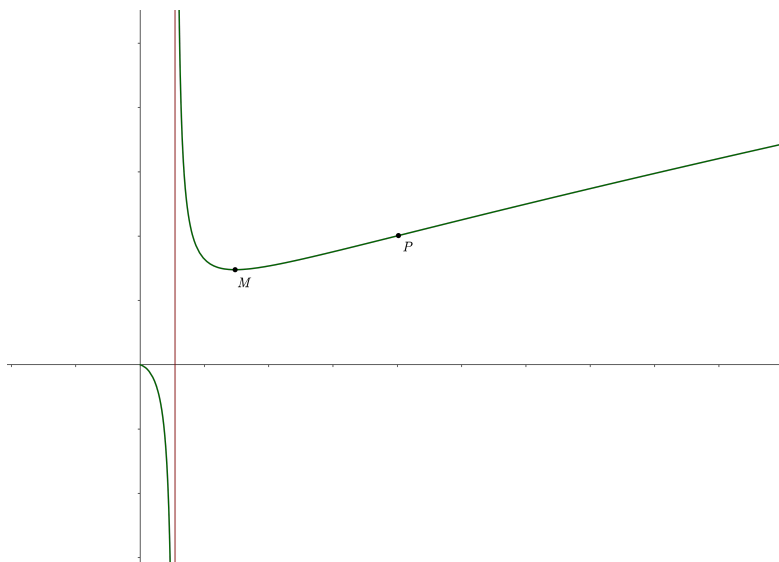
3.1: Скица графика  $f(x) = x \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$

2. Испитати ток и скицирати график следеће функције:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$$

Скица решења:

Домен:	$x \in (0, e) \cup (e, \infty)$
Нуле:	Нема нула
Знак:	$f(x) < 0$ за $x \in (0, e)$ $f(x) > 0$ за $x \in (e, \infty)$
Парност:	Није ни парна, ни непарна
Периодичност:	Није периодична
Асимптоте:	Нема ни хоризонталну, ни косу асимптоту кад $x \rightarrow \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \infty$
Монотоност:	Функција је опадајућа за $x \in (0, e) \cup (e, e^2)$ Функција је растућа за $x \in (e^2, \infty)$ $M(e^2, e^2)$ је локални минимум
Конвексност:	Функција је конкавна за $x \in (0, e)$ Функција је конвексна за $x \in (e, e^3)$ Функција је конкавна за $x \in (e^3, \infty)$ $P(e^3, \frac{e^3}{2})$ је превојна тачка



3.2: Скица графика  $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$

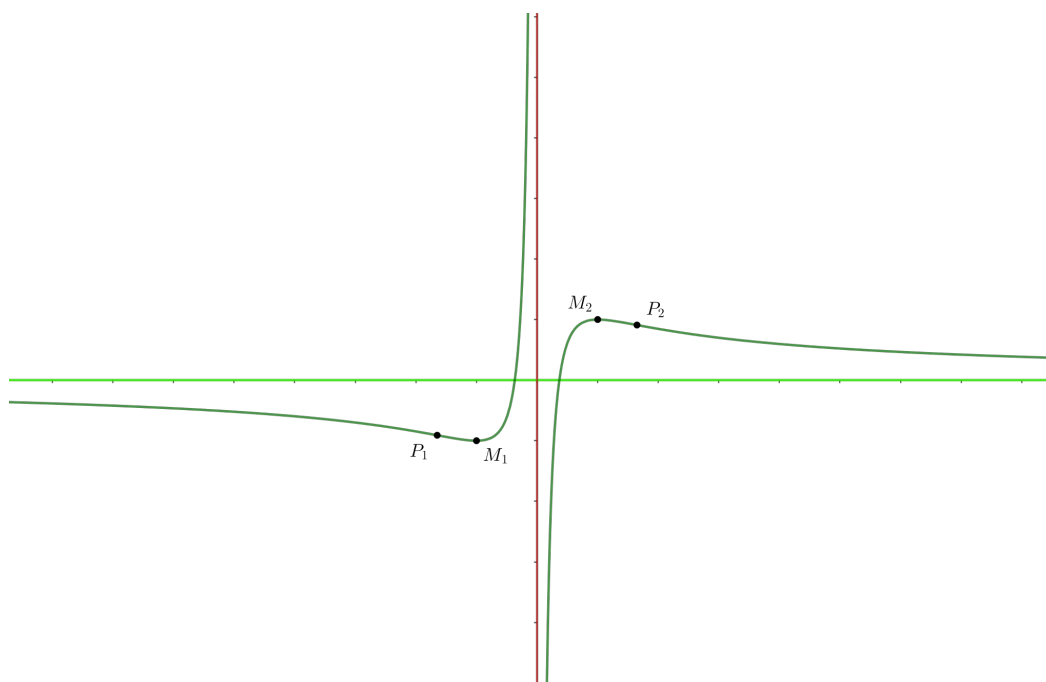


3. Испитати ток и скицирати график следеће функције:

$$f(x) = \frac{1 + \ln|x|}{x}$$

Скица решења:

Домен:	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Нуле:	$N_1(-\frac{1}{e}, 0)$ и $N_2(\frac{1}{e}, 0)$
Знак:	$f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -\frac{1}{e}) \cup (0, \frac{1}{e})$ $f(x) > 0$ за $x \in (-\frac{1}{e}, 0) \cup (\frac{1}{e}, \infty)$
Парност:	Непарна је
Периодичност:	Није периодична
Асимптоте:	$y = 0$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow -\infty$ $y = 0$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
Монотоност:	Функција је опадајућа за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ Функција је растућа за $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ $M_1(-1, -1)$ је локални минимум $M_2(1, 1)$ је локални максимум
Конвексност:	Функција је конкавна за $x \in (-\infty, -\sqrt{e}) \cup (0, \sqrt{e})$ Функција је конвексна за $x \in (-\sqrt{e}, 0) \cup (\sqrt{e}, \infty)$ $P_1(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}})$ и $P_2(-\sqrt{e}, -\frac{3}{2\sqrt{e}})$ су превојне тачке



3.3: Скица графика  $f(x) = \frac{1 + \ln|x|}{x}$

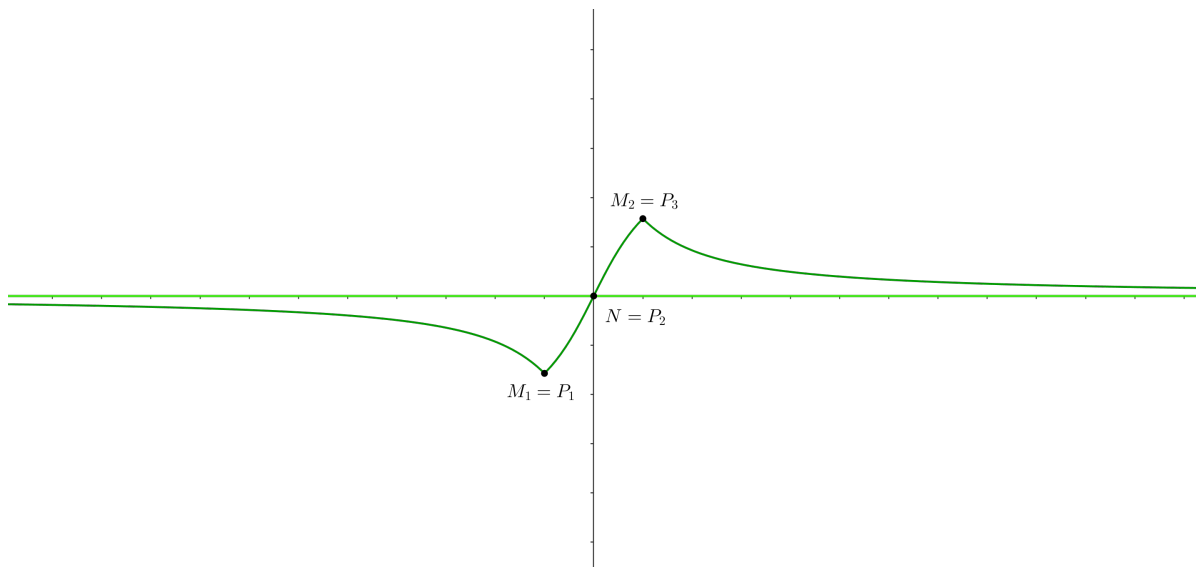
## 4 ЗАДАТАК

1. Испитати ток и скицирати график следеће функције:

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

Скица решења:

Домен:	$x \in (-\infty, \infty)$
Нуле:	$N(0,0)$
Знак:	$f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 0)$ $f(x) > 0$ за $x \in (0, \infty)$
Парност:	Непарна је
Периодичност:	Није периодична
Асимптоте:	$y = 0$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow -\infty$ $y = 0$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow \infty$
Монотоност:	Функција је опадајућа за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ Функција је растућа за $x \in (-1, 1)$ $M_1(-1, -\frac{\pi}{2})$ је локални минимум $M_2(1, \frac{\pi}{2})$ је локални максимум
Конвексност:	Функција је конкавна за $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ Функција је конвексна за $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$ $P_1(-1, -\frac{\pi}{2})$ , $P_2(0,0)$ и $P_3(1, \frac{\pi}{2})$ су превојне тачке



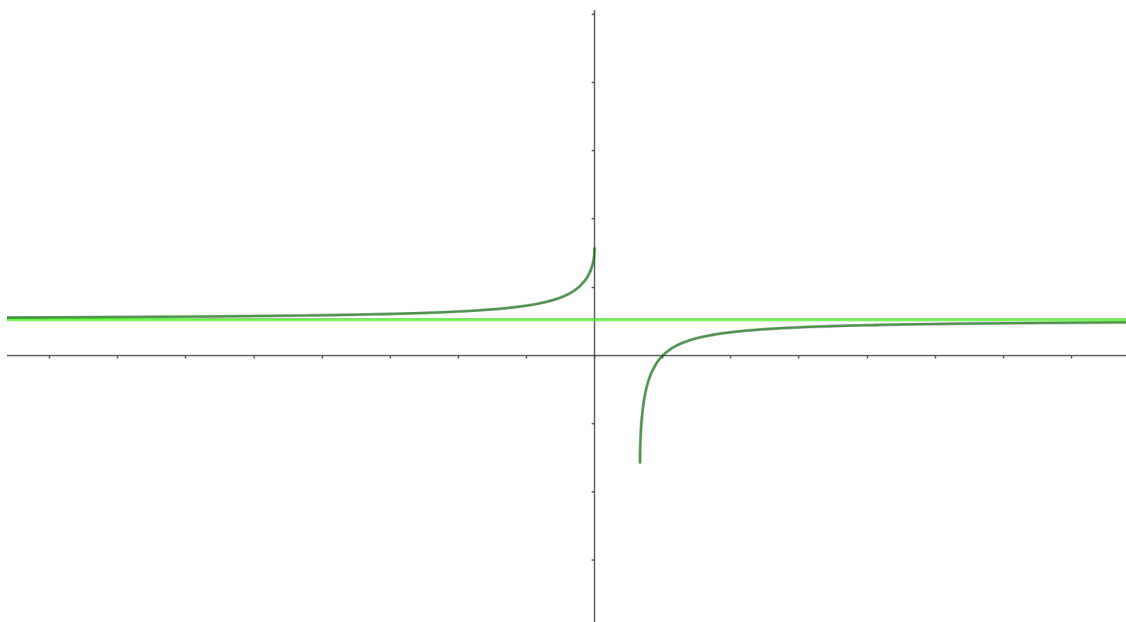
4.1: Скица графика  $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

2. Испитати ток и скицирати график следеће функције:

$$f(x) = \arcsin \frac{1-x}{1-2x}$$

Скица решења:

Домен:	$x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{2}{3}, \infty)$
Нуле:	$N(1, 0)$
Знак:	$f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ $f(x) < 0$ за $x \in [\frac{2}{3}, 1)$
Парност:	Није ни парна, ни непарна
Периодичност:	Није периодична
Асимптоте:	$y = \frac{\pi}{6}$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow -\infty$ $y = \frac{\pi}{6}$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow \infty$ $f(0) = \frac{\pi}{2}$ и $f(\frac{2}{3}) = \frac{\pi}{2}$
Монотоност:	Функција је растућа за $x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{2}{3}, \infty)$
Конвексност:	Функција је конвексна за $x \in (-\infty, 0]$ Функција је конкавна за $x \in [\frac{2}{3}, \infty)$



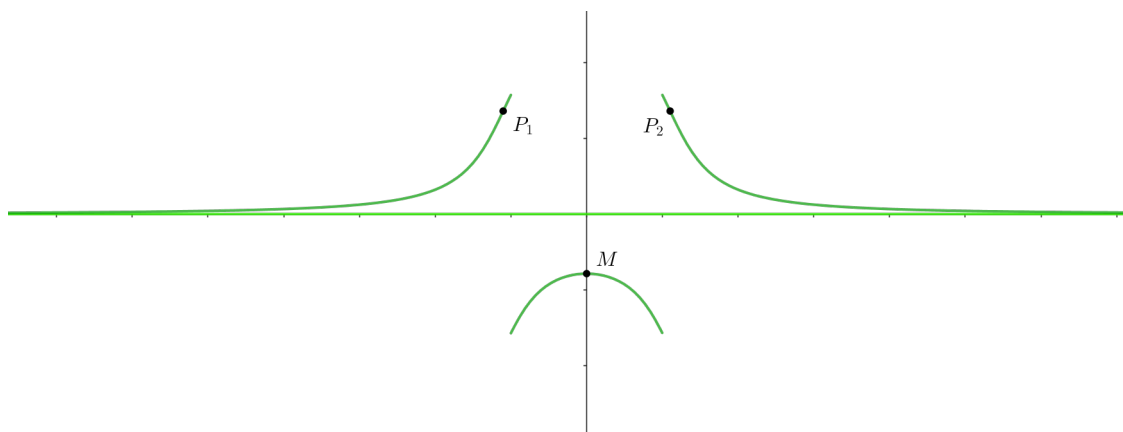
4.2: Скица графика  $f(x) = \arcsin \frac{1-x}{1-2x}$

3. Испитати ток и скицирати график следеће функције:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1}$$

Скица решења:

Домен:	$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$
Нуле:	Нема нула
Знак:	$f(x) < 0$ за $x \in (-1, 1)$ $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Парност:	Парна је
Периодичност:	Није периодична
Асимптоте:	$y = 0$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow -\infty$ $y = 0$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow \infty$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$ и $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ и $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$
Монотоност:	Функција је растућа за $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ Функција је опадајућа за $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ $M(0, -\frac{\pi}{4})$ је локални максимум
Конвексност:	Функција је конвексна за $x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$ Функција је конкавна за $x \in (-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$ Функција је конвексна за $x \in (\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \infty)$ $P_1(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, f(\sqrt{-\frac{1+\sqrt{7}}{3}}))$ , $P_2(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, f(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}))$ су превојне тачке



4.3: Скица графика  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1}$