РЕШЕЊА

$\boxed{\mathbf{1.}}$ $\dfrac{3}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}+(\sqrt{5}-\sqrt{2})=\dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}+(\sqrt{5}-\sqrt{2})=\dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}+(\sqrt{5}-\sqrt{2})=2\sqrt{5}$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ $3^{1+3\log_3 5+\log_3 2}=3^1\cdot 3^{\log_3 5^3}\cdot 3^{\log_3 2}=3\cdot 5^3\cdot 2=750$

$\boxed{\mathbf{3.}}$ $f\left(\dfrac{2x-3}{x-5}\right)=x,\ \dfrac{2x-3}{x-5}=3$, онда $2x-3=3(x-5)$ па је $x=12$. Дакле $f(3)=12$.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ За квадратну једначину $ax^2+bx+c=0$ важи да је $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ и $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ (Виетове везе).
За једначину $x^2-\log_2 9+2=0$, $a=1, b=-\log_2 9, c=2$ па је $x_1+x_2=\log_2 9$ и $x_1x_2=2$ Онда

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{\log_2 9}{2}=\frac{2\log_2 3}{2}=\log_2 3$$

$\boxed{\mathbf{5.}}$

$$\frac{x+2}{x-3}\geq 2$$
$$\frac{x+2}{x-3}-2\geq 0$$
$$\frac{(x+2)-2(x-3)}{x-3}\geq 0$$
$$\frac{8-x}{x-3}\geq 0$$
$$x\in(3,8]$$

.

$\boxed{\mathbf{6.}}$ За квадратну функцију $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ тачка екстрема је $a=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ и $b=f(a)$. Онда је $a=-\dfrac{5}{2\cdot(-2)}=\dfrac{5}{4}$ а $b=f\left(\dfrac{5}{4}\right)=-\dfrac{31}{8}$, па је $4a-8b=36$.

$\boxed{\mathbf{7.}}$ $\sqrt{x^2-1}>x$
Први случај:
$x<0$ и $x^2-1\geqslant 0$
$x<0$ и $x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
$x\in(-\infty,-1]$
Други случај:
$x\geq 0$ и $x^2-1>x^2$
нема решења
Решење је унија скупова решења из првог и другог случаја $x\in(-\infty,-1]$.

$\boxed{\mathbf{8.}}$ Има $\binom{8}{5}$ начина, што је исто што и $\binom{8}{3}$, а то је $\frac{8\cdot7\cdot6}{3!}=56$.

$\boxed{\mathbf{9.}}$ $Q(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$.
Полином $Q(x)$ дели полином $P(x)$ па је $P(-1)=P(1)=0$.

$P(-1)=a+2+b+3=0$ и $P(-1)=a-2-b+3=0$ па је $a=-3$ а $b=-2$ тј. $2a-b=-4$.

$\boxed{\mathbf{10.}}$ $z=x+yi,\ \overline{z}=x-yi,\ |z+1|=|x+yi+1|=|x+1+yi|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$
Онда $|z+1|-\overline{z}=2-i$

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}-x+yi=2-i$$

Онда је $y=-1$ и $\sqrt{(x+1)^2+y^2}-x=2$
$y=-1$ и $\sqrt{(x+1)^2+(-1)^2}=x+2$ тј $\sqrt{x^2+2x+2}=x+2$
$x^2+2x+2=(x+2)^2$ и $x+2\geqslant 0$
$x^2+2x+2=x^2+4x+4$ и $x\geqslant -2$

$x=-1$. Дакле $x+y=-2$

11. Једначина праве је $y=kx+n$. $A(1,1)$ припада правој па је $1=k\cdot 1+n$ и исто за $B(2,5)$ $5=k\cdot 2+n$. Из ове две једначине добијамо да је $k=4$ и $n=-3$. Права је $y=4x-3$.

12. Једначина $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ има по два решења на $(0,\pi)$ и $(\pi,3\pi)$. Једначина $\sin x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ има два решења на $(\pi,2\pi)$. Укупно 6 решења.

13. $\sin\dfrac{50\pi}{7}=\sin\left(6\pi+\dfrac{8\pi}{7}\right)=\sin\dfrac{8\pi}{7}=\sin(\pi+\dfrac{\pi}{7})=-\sin\dfrac{\pi}{7}=-a.$

14. $(1-i)^2=1-2i+i^2=1-2i-1=-2i$, $(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$
$(1-i)^{2019}=(1-i)^2)^{1009}(1-i)=(-2i)^{1009}(1-i)=-2^{1009}i^{1009}(1-i)$
$(1+i)^{2019}=(1+i)^2)^{1009}(1+i)=(2i)^{1009}(1-i)=2^{1009}i^{1009}(1+i)$
$\dfrac{(1-i)^{2019}}{(1+i)^{2019}}=-\dfrac{1-i}{1+i}=-\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-\dfrac{-2i}{2}=i.$

15. Бројеви дељиви са 4 чине аритметички низ тд. $a_1=4$ и $d=4$. Сума n чланова низа је $s_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ па је $s_{60}=\dfrac{60[2\cdot 4+59\cdot 4]}{2}=7320.$

16. Изводница купе и пречник њене основе чине једнакостранични троугао странице $a=12$ а полупречник уписане сфере је полупречник уписаног круга у троугао па је $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}=2\sqrt{3}$. Онда је површина сфере $P=4R^2\pi=4(2\sqrt{3})^2\pi=48\pi$.

17. Нека је $3^x=t$, онда је $9^x=t^2$ и неједначина
$t^2+t-6>0$, $(t+3)(t-2)>0$ па $t\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$
t је позитивно па је $t\in(2,+\infty)$ тј. $x\in(\log_3 2,+\infty)$.

18. Најближа и најдаља тачка круга су тачке пресека праве нормалне на дату праву кроз центар и круга. Права нормална на дату праву је $4x-3y+n=0$. Она садржи центар круга $C(1,2)$ па $4\cdot 1-3\cdot 2+n=0$. Онда је $n=2$ и $4x-3y+2=0$ тј. $y=\frac{4x}{3}+\frac{2}{3}$.
Када ово заменимо у једначину круга добијамо

$$(x-1)^2+(\frac{4x}{3}+\frac{2}{3}-2)^2=25$$

$$(x-1)^2+(\frac{4x}{3}-\frac{4}{3})^2=25$$

$$(x-1)^2+\frac{16}{9}(x-1)^2=25$$

$$\frac{25}{9}(x-1)^2=25$$

$$(x-1)^2=9$$

$x-1=3$ или $x-1=-3$ тј. $x=4$ или $x=-2$. $y=\frac{4x}{3}+\frac{2}{3}$ па је $y=6$ или $y=-2$.
Добијамо тачке $A(4,6)$ и $B(-2,-2)$.
Растојсње од дате праве је $d=\dfrac{|3x+4y+34|}{3^2+4^2}$.
$d(A)=14$ а $d(B)=4$ па је најда1ја тачка A.

19. Нека је $\log_x(6-x)=t$. Решавамо једначину $|t+1|+|t-1|=2$.
Први случај: $t\leq -1$
$-(t+1)-(t-1)=2$ дакле $t=-1$.
Други случај: $-1<t<1$
$(t+1)-(t-1)=2$ дакле $-1<t<1$.
Трећи случај $t\geq 1$
$(t+1)+(t-1)=2$ дакле $t=1$.
Коначно, решења су $-1\leq t\leq 1$.
$\log_x(6-x)=t$ па $x>0$ и $x\neq 1$ и $6-x>0$ тј $x<6$.
Решавамо неједначину $-1\leq\log_x(6-x)\leq 1$

Први случај: $0 < x < 1$
$x \leq 6 - x$ и $x^{-1} \geq 6 - x$
$x \leq 3$ и $x^2 - 6x + 1 \geq 0$
$x \leq 3$ и $x \in (-\infty, 3 - 2\sqrt{2}] \cup [3 + 2\sqrt{2}, \infty)$
Пресек је $x \in (0, 3 - 2\sqrt{2}]$.
Други случај: $x \in (1, 6)$
$x \geq 6 - x$ и $x^{-1} \leq 6 - x$
$x \geq 3$ и $x^2 - 6x + 1 \leq 0$
$x \geq 3$ и $x \in [3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]$
Пресек је $x \in [3, 3 + 2\sqrt{2}]$.
Унија решења из оба случаја је $x \in (0, 3 - 2\sqrt{2}] \cup [3, 3 + 2\sqrt{2}$.

20.

$$2^{1+2\cos 6x} + 16^{\sin^2 3x} = 9$$

$$2 \cdot 2^{2\cos 6x} + 4^{2\sin^2 3x} = 9$$

Из адиционе формуле $2\sin^2 3x = 1 - \cos 6x$, па

$$2 \cdot 4^{\cos 6x} + 4^{1-\cos 6x} = 9$$

нека је $t = 4^{\cos 6x}$, онда

$$2t + \frac{4}{t} = 9$$

$$2t^2 - 9t + 4 = 0$$

$t = 1$ или $t = -\dfrac{1}{2}$
$\cos 6x = 0$ или $\cos 6x = -\dfrac{1}{2}$
$6x = 2k\pi$ или $6x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ или $6x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$
$x = \dfrac{k\pi}{3}$ или $x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k\pi}{3}$ или $x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{k\pi}{3}$

За $k = 0, 1, 2$ добијамо решења из интервала $(0, \pi)$ и то $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{2\pi}{3}$, $x_4 = \frac{\pi}{9}$, $x_5 = \frac{4\pi}{9}$, $x_6 = \frac{7\pi}{9} + \pi$, $x_7 = \frac{2\pi}{9}$, $x_8 = \frac{5\pi}{9}$, $x_9 = \frac{8\pi}{9}$ и јос $x_10 = \pi$. Њихов збир је 5π.