

# Numeričko modeliranje linijske disperzije u otvorenim tokovima

U ovom poglavlju se govori o modelu linijske disperzije koji se zasniva na prostornom osrednjavanju jedančina transporta mase za elementarnu zapreminu. Ključni parametar ovog modela je koeficijent linijske disperzije, koji u sebi objedinjava uticaje lateralne turbulentne difuzije i lateralne konvektivne disperzije. Kako ovi uticaji zavise od rasporeda brzine po širini korita, opisan je jedan originalan pristup za određivanje ovog rasporeda. Definisana je metodologija kalibracije koeficijenta linijske disperzije i njegove ekstrapolacije. Za primenu ove metodologije u praksi razvijen je odgovarajući softver, čije je korišćenje ilustrovano primerima.

## 1.1 Uvod

Proces disperzije u otvorenim tokovima izazvan je neravnomernim rasporedom brzine u pravcu glavnog toka, kao i raznim vrstama sekundarnog strujanja. Reč je o hidrodinamičkim svojstvima, koja su posledica *neprizmatičnosti* prirodnog rečnog korita – njegove nepravilne i promenljive geometrije po dužini toka.

Za kvantifikaciju procesa transporta mase neke materije u rečnom koritu, može se koristiti matematički model linijske disperzije, zasnovan na osnovnoj pretpostavci da je samo jedan dominantan pravac strujanja (linijsko tečenje) i da se shodno tome, raspored koncentracije duž toka može definisati srednjom profilskom koncentracijom. Ova pretpostavka se obično iskazuje termininom „daleko polje” za hidrodinamičke veličine i skalarne veličine koje se transportuju tokom.

## 1.2 Koeficijent linijske disperzije

Jedini parametar modela linijske disperzije je *koeficijent linijske disperzije*, čija vrednost zavisi od hidrodinamike toka. U nastavku se razmatra struktura ovog parametra, dosledno sledeći analizu prof. M. Radojkovića<sup>1</sup> [29].

---

<sup>1</sup>Prof. Miodrag Radojković (1945-1990), profesor hidraulike Građevinskog fakulteta u Beogradu, rodonačelnik je numeričke hidraulike kod nas.

Polazi se od jednačine koja opisuje proces linijske disperzije, pod uslovom da ne postoji fluks mase po granicama strujanja u poprečnom preseku:

$$\frac{\partial(\tilde{\tilde{C}} A)}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{\tilde{C}} Q)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( A \cdot D \cdot \frac{\partial \tilde{\tilde{C}}}{\partial x} \right), \quad (1.1)$$

gde je:  $x$  – odstojanje,  $t$  – vreme,  $Q$  – protok,  $A$  – površina poprečnog preseka,  $\tilde{\tilde{C}}$  – srednja zapreminska koncentracija neke materije u vodi<sup>2</sup>, a  $D$  – koeficijent linijske disperzije.

Rasčlanjavanje strukture koeficijenta linijske disperzije polazi od jednačine održanja mase *pasivne* (nerazgradljive) materije, napisane za elementarnu zapreminu vode, odnosno „tačku” strunog polja:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = - \frac{\partial(\overline{u' C'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v' C'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w' C'})}{\partial z}. \quad (1.2)$$

Ova jednačina je dobijena osrednjavanjem po vremenu, sa kovarijansama na desnoj strani koje potiču od fluktuacija komponenti brzine i koncentracije. Jednačinu (1.2) treba integrisati po poprečnom preseku, što se obavlja u dva koraka, najpre po dubini, a zatim po širini toka (Slika 1.1).

Lokalne vrednosti koncentracije i komponenti brzine razdvajaju se na *srednju vrednost i odstupanje po dubini*:

$$C = \tilde{C} + C^*; \quad u = \tilde{u} + u^*; \quad v = \tilde{v} + v^*; \quad w = \tilde{w} + w^*, \quad (1.3)$$

a srednje vrednosti koncentracije i komponenti brzine po dubini, na *srednju vrednost u preseku i odstupanje po širini*:

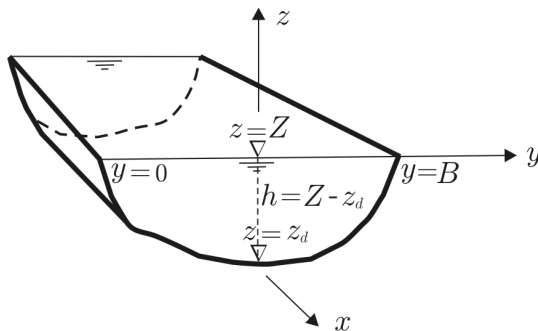
$$\tilde{C} = \tilde{\tilde{C}} + C^+; \quad \tilde{u} = \tilde{\tilde{u}} + u^+; \quad \tilde{v} = \tilde{\tilde{v}} + v^+; \quad \tilde{w} = \tilde{\tilde{w}} + w^+. \quad (1.4)$$

---

<sup>2</sup>Obratiti pažnju na način obeležavanja pojedinih veličina:

-	srednja vrednost po vremenu
'	odstupanje od srednje vrednosti po vremenu (fluktuacija)
~	srednja vrednost po dubini toka
*	odstupanje od srednje vrednosti po dubini
~	srednja profilska vrednost
+	odstupanje srednje vrednosti po dubini od srednje profilske vrednosti

Za veličine koje nisu obeležene navedenim znacima, podrazumeva se da su osrednjene po vremenu i da se odnose na tačku (elementarnu zapreminu) strujnog polja.



Slika 1.1: Rečno korito i koordinatni sistem

Primenom navedenih relacija i integracijom (1.2) uz uslov da ne postoji fluks mase po površini toka i po dnu, dobija se [29]:

$$\frac{\partial(\tilde{\tilde{C}}A)}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{\tilde{C}}Q)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^B \left[ \int_{z_d}^Z \overline{u'C'} dz + \int_{z_d}^Z u^* C^* dz + u^+ C^+ h \right] dy \right). \quad (1.5)$$

Upoređenjem jednačina (1.5) i (1.1) vidi se da su im leve strane jednake. Na osnovu toga, sledi da je koeficijent linijske disperzije:

$$D = -\frac{1}{A \frac{\partial \tilde{\tilde{C}}}{\partial x}} \cdot \int_0^B \left[ \underbrace{\int_{z_d}^Z \overline{u'C'} dz}_{I_{xdif}} + \underbrace{\int_{z_d}^Z u^* C^* dz}_{I_{xdis}} + \underbrace{u^+ C^+ h}_{I_{ydifdis}} \right] dy. \quad (1.6)$$

Posebno obeleženi članovi ove jednačine označavaju sledeće procese:

- $I_{xdif}$  — podužna (longitudinalna) turbulentna difuzija;
- $I_{xdis}$  — podužna (longitudinalna) konvektivna disperzija;
- $I_{ydifdis}$  — poprečna (lateralna) turbulentna difuzija i konvektivna disperzija.

U nastavku se odvojeno razmatraju pojedinačni uticaji.

### 1.2.1 Podužna turbulentna difuzija

Razvoj člana  $I_{xdif}$  zahteva modeliranje kovarijanse  $\overline{u'C'}$ , koja se naziva Rejnoldsov (Reynolds) napon<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Reč je o veličini koja je posledica vremenskog osrednjavanja Navie-Stoksovih (Navier-Stokes) jednačina i nije pravi napon, već odražava uticaj turbulentnih fluktuacija, sa efektom unutrašnjeg smičućeg (tangencijalnog) „napona” [11].

Ako se, po analogiji sa Fikovim (Fick) zakonom, usvoji najjednostavniji Businesskov (Boussinesq) model [16]-2.5-35:

$$\overline{u'C'} = -\epsilon_s \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (1.7)$$

gde je  $\epsilon_s = \nu_t / S_c$  – koeficijent turbulentne difuzije, ili koeficijent mešanja materije i fluidnih delića. Ovaj koeficijent je ustvari tenzorska veličina (ima komponente u sva tri koordinatna pravca), ali ako se pretpostavi da je turbulencija izotropna (u sva tri pravca jednaka), onda koeficijent  $\epsilon_s$  postaje skalarna veličina. Ako se dalje, pretpostavi da je vrednost Šmitovog (Schmidt) broja  $S_c = 1$ , koji uspostavlja vezu između difuzionog koeficijenta i koeficijenta turbulentne viskoznosti, sledi da je difuzioni koeficijent jednak koeficijentu turbulentne (vrtložne) viskoznosti:  $\epsilon_s = \nu_t$ . Slična aproksimacija se obično uvodi i kada je u pitanju koeficijent mešanja fluidnih delića<sup>4</sup>.

Razmatrajući strujanje u proizvoljnoj vertikalnoj ravni  $(x, z)$  (široko korito, daleko od obala), može se, primenom Businesskovog modela turbulencije, napisati izraz za raspored Rejnoldsovog (Reynolds) tangencijalnog napona po dubini toka:

$$\tau_{xz} \equiv \tau = \rho \cdot \nu_t \frac{du}{dz}. \quad (1.8)$$

Prelaskom na bezdimenzionu vertikalnu koordinatu:  $\xi = z/h \in (0, 1)$ , odakle sledi:  $dz = h d\xi$ , dobija se zavisnost difuzionog koeficijenta po dubini:

$$\epsilon_s(\xi) \equiv \nu_t(\xi) = h \frac{\tau(\xi)/\rho}{\frac{du(\xi)}{d\xi}}. \quad (1.9)$$

Da bi se dalje konkretizovao izraz (1.9), neophodno je prepostaviti određen raspored po dubini funkcije tangencijalnog napona  $\tau(\xi)$  i brzine  $u(\xi)$ .

**Raspored tangencijalnog napona po dubini.** Ovaj raspored je *linearan* [16]-2.3-32:

$$\tau = \tau_o(1 - z/h) = \rho \cdot u_*^2(1 - z/h), \quad (1.10)$$

gde je:  $\tau_o$  – lokalni tangencijalni napon na dnu,  $h$  – lokalna dubina toka, a  $u_* = \sqrt{\tau_o/\rho}$  – lokalna smičuća brzina, odnosno lokalni tangencijalni napon na dnu ( $\tau_o$ ) izražen u jedinicama brzine [m/s].

---

<sup>4</sup>Treba se podsetiti da je Businesskov model turbulencije:  $\epsilon = \nu_t/\beta$ , gde je  $\epsilon$  – koeficijent mešanja *fluidnih delića*, a  $\beta$  – korekcionni koeficijent; ovaj koeficijent se zove Šmitov broj kada se radi o rastvorenoj materiji ( $S_c$ ), a Prandtlov (Prandtl) broj, kada se radi o toploti [15].

Prelazeć na bezdimenzione koordinate, jednačina (1.10) postaje:

$$\tau(\xi) = \rho \cdot u_*^2 (1 - \xi). \quad (1.11)$$

**Raspored brzine po dubini.** U teoriji se za definiciju ovog rasporeda koriste logaritamska ili eksponencijalna funkcija [16]2.6-37, 2.11-49. Ovaj drugi raspored je analitički povoljniji, jer nema singularitet za  $z = 0$ ):

$$u(z) = \tilde{u} \cdot \left( \frac{1+m}{m} \right) \left( \frac{z}{h} \right)^{1/m}, \quad (1.12)$$

pri čemu eksponent  $m$ , kao kalibracioni parametar, obično uzima vrednosti 5, 6 i 7. Odgovarajući bezdimenzioni oblik ovog rasporeda je:

$$u(\xi) = \tilde{u} \cdot \left( \frac{1+m}{m} \right) \cdot \xi^{1/m}, \quad (1.13)$$

a odgovarajući gradijent:

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \tilde{u} \left( \frac{1+m}{m} \right) \xi^{\frac{1-m}{m}}. \quad (1.14)$$

Ako se primeni Businesskov model turbulencije, član koji odražava uticaj turbulentne difuzije po dužini toka dobija ovaj oblik:

$$I_{xdif} = \int_{z_d}^Z \overline{u'C'} dz = \int_{z_d}^Z \left[ \epsilon_s(z) \frac{\partial C}{\partial x} \right] dz = \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right) \int_{z_d}^Z \epsilon_s(z) dz. \quad (1.15)$$

Pretpostavljajući da je gradijent lokalne koncentracije približno jednak gradijentu srednje koncentracije:  $\partial C / \partial x \approx \partial \tilde{C} / \partial x$  i prelazeći na bezdimenzione koordinate pomoću izraza (1.9), (1.11) i (1.14), integral (1.15) postaje [29]:

$$I_{xdif} = \left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) \left( \frac{h^2 \cdot u_*^2}{\tilde{u}} \right) \int_0^1 \frac{1-\xi}{\left( \frac{1+m}{m} \right) \xi^{\frac{1-m}{m}}} d\xi = \left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) \left( \frac{h^2 \cdot u_*^2}{\tilde{u}} \right) P_1(m), \quad (1.16)$$

gde je:

$$P_1(m) = \frac{m^4}{(m+1)(2m-1)(3m-1)}. \quad (1.17)$$

Tabela 1.1: Vrednosti funkcije  $P_1$  u zavisnosti od parametra  $m$  [29].

$m$	5	6	7
$P_1(m)$	0,83	0,99	1,15

Neke vrednosti funkcije  $P_1(m)$  date su u Tabeli 1.1.

Integral (1.16) se može napisati u preglednijem obliku:

$$I_{xdif} = \tilde{\epsilon}_s \cdot h \cdot \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}, \quad (1.18)$$

gde „novi” parametar:

$$\tilde{\epsilon}_s = (h u_*) \left( \frac{u_*}{\tilde{u}} \right) P_1(m) \quad (1.19)$$

predstavlja *po dubini osrednjen* koeficijent mešanja materije u rečnoj vodi pod uticajem turbulentne difuzije.

Izraz (1.19) omogućava objašnjenje nekih empirijskih izraza iz literature. Na primer, prema nikim ruskim izvorima kod velikih ravničarskih reka je:

$$\tilde{\epsilon}_s = \frac{\tilde{u} h}{200}, \quad (1.20)$$

što se lako može pokazati ako se pretpostavi da je vrednost ekponenta zakona brzine  $m = 6$  ( $P_1 \approx 1$ ) i vrednost Šezijevog (Chézy) koefijenta rapavosti  $C = 45 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ , pa se iz Šezijeve jednačine dobija:  $u_*/\tilde{u} = \sqrt{g}/C \approx 0,07$ .

### 1.2.2 Podužna konvektivna disperzija

Podužna (longitudinalna) disperzija izazvana konvekcijom glavnog toka manifestuje se odstupanjem po dubini koncentracije od odgovarajuće srednje vrednosti. Kvantifikacija ove pojave iziskuje rešenje:

$$I_{xdis} = \int_{z_d}^Z u^* C^* dz = ?$$

Da bi se navedeni integral izračunao, potrebno je poznavati brzine i raspored koncentracije po dubini toka.

Za pretpostavljeni eksponencijalni raspored brzine 1.12:

$$u(\xi) = \tilde{u} \left( \frac{1+m}{m} \right) \xi^{1/m}, \text{ sledi:}$$

$$u = \tilde{u} + u^* \Rightarrow u^* = u - \tilde{u} = \tilde{u} \left( \frac{1+m}{m} \xi^{1/m} - 1 \right). \quad (1.21)$$

Ruski autor Šarenkov je predložio da se raspored veličine  $C^*$  pod dubini odredi rešavanjem jednačine za transport ove veličine u pravcu  $z$ , pri čemu se data transportna jednačina dobija oduzimanjem od jednačine (1.2) iste jednačine osrednjene po dubini [35]. Rešenje transportne jednačine je [29]:

$$C^*(z) = \left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) \int_{z_d}^Z \frac{1}{\tilde{\epsilon}_s} \int_{z_d}^Z u^*(z) dz dz. \quad (1.22)$$

Prelaskom na bezdimenzionu vertikalnu koordinatu:

$$I_{xdis} = \left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) h^2 \frac{\tilde{u}^3}{u_*^2} \cdot P_2(m) = h \left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) \underbrace{(hu_*) \left( \frac{\tilde{u}}{u_*} \right)^3}_{D_x} P_2(m) \quad (1.23)$$

gde je:

$$P_2(m) = \int_0^1 \left( \frac{1+m}{m} \xi^{1/m} - 1 \right) \int_0^\xi \frac{\frac{1+m}{m} \xi^{(1-m)/m}}{1-\xi} \int_0^\xi \left( \frac{1+m}{m} \xi^{1/m} \right) d\xi d\xi d\xi. \quad (1.24)$$

Integral  $P_2$  se rešava numerički i neke vrednosti su date u Tabeli 1.2.

Tabela 1.2: Vrednosti funkcije  $P_2$  u zavisnosti od parametra  $m$  [29].

$m$	5	6	7
$P_1(m) \times 10^{-3}$	2,51	1,51	0,98

Konačno, dakle, može se napisati:

$$I_{xdis} = D_x \cdot h \left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right). \quad (1.25)$$

Parametar  $D_x$  zove se „*koeficijent podužne (longitudinalne) konvektivne disperzije*”, ili samo „*koeficijent podužne disperzije*”. Struktura ovog koeficijenta se vidi iz izraza (1.23):

$$D_x = (hu_*) \left( \frac{\tilde{u}}{u_*} \right)^3 P_2(m). \quad (1.26)$$

U literaturi se za proračun ovog koeficijenta često preporučuje izraz Eldera (Elder) [7]:

$$D_x = 5,9 \cdot h \cdot u_*. \quad (1.27)$$

Medjutim, ovaj izraz se ne sme prihvatiti sa bezrezervnim poverenjem. Naime, vrednost konstante 5,9 odgovara uslovima tečenja po hidrauličko glatkoj podlozi. Izraz (1.26) uzima u obzir uticaj hidraulički rapavog rečnog dna, tako da daje veće vrednosti, reda veličine  $10 \div 15$ , što je u skladu sa eksperimentalnim podacima [9].

### 1.2.3 Poprečna turbulentna difuzija i konvektivna disperzija

Integral  $I_{ydfdis}$  sadrži odstupanja srednjih brzina i koncentracija po dubine od srednje profilske vrednosti. Raspored brzine po širini korita ne može se sprovesti analitičkom aproksimacijom, kao kod rasporeda brzine po dubini. Ukoliko ne postoje merenja, može se primeniti metoda koju je predložio M. Radojković [28, 29], a koja će biti opisana kasnije.

Raspored koncentracije po širini korita može se odrediti iz jednačine za transport veličine  $C^+$  u pravcu „ $y$ ”, čije je rešenje [29]:

$$C^+ = \left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) \int_0^y \frac{1}{(\tilde{\epsilon}_s + D_y) h} \int_0^y u^+ h dy dy. \quad (1.28)$$

U navedenom izrazu je  $D_y$  – „*koeficijent poprečne (lateralne) disperzije*” koja nastaje pod uticajem sekundarnih strujanja u profilu, pre svega, u krivinama.

## 1.3 Uprošćeni izraz za koeficijent disperzije

Ako se prepostavi da je gradijent srednje koncentracije po dubini približno jednak gradijentu srednje koncentracije po poprečnom preseku:

$$\left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) \approx \left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right),$$



iz (1.6) konačno sledi:

$$D = -\frac{1}{A} \int_0^B \left[ \underbrace{\tilde{\epsilon}_s \cdot h}_{k_1} + \underbrace{D_x \cdot h}_{k_2} + u^+ h \int_0^y \underbrace{\frac{1}{(\tilde{\epsilon}_s + D_y) h}}_{k_3} \int_0^y u^+ h \, dy \, dy \right] dy. \quad (1.29)$$

Istraživanja pokazuju da je relativni odnos:  $k_1 \ll k_2 \ll k_3$  u približnoj srazmeri 1:100:1000. Prva nejednakost se, na osnovu (1.19) i (1.26), može lako dokazati<sup>5</sup>. Druga nejednakost je proizašla iz eksperimenata Fišera (Fischer):  $k_3/k_2 = 10^3 \div 10^4$  [8].

Imajući navedene relativne odnose, može se definitivno formulisati izraz za proračun koeficijenta poprečne disperzije u modelima linijskog tečenja:

$$D = -\frac{1}{A} \int_0^B u^+ h \int_0^y \frac{1}{(\tilde{\epsilon}_s + D_y) h} \int_0^y u^+ h \, dy \, dy \, dy. \quad (1.30)$$

Ovaj izraz važi za „daleko polje”, gde je u potpunosti uspostavljeno mešanje u poprečnom preseku.

## 1.4 Proračun koeficijenta linijske disperzije

Jednačina (1.30) pokazuje da je za određivanje vrednosti koeficijenta linijske disperzije u poprečnom preseku neophodno raspolagati sledećim podacima:

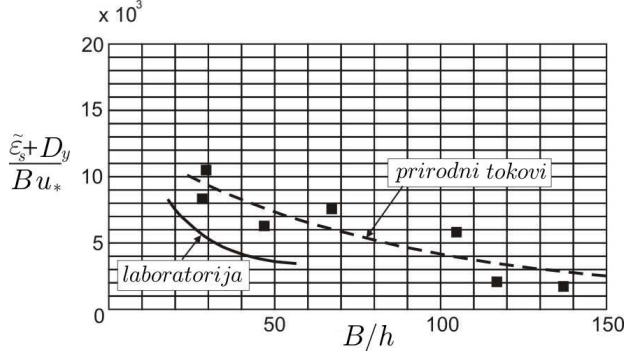
- geometrijom poprečnog preseka:  $z_d(y)$ ;
- rasporedom brzina osrednjenih po dubini, po širini korita:  $\tilde{u}(y)$ ;
- zbirom vrednosti koeficijenata  $(\tilde{\epsilon}_s + D_y)$ .

Geometrija poprečnog preseka se dobija terenskim merenjem pomoću ehosondera. Savremenim ADCP uredjajima [16]-10.5.1-290 može se, u kratkom roku, efikasno i detaljno izmeriti strujno polje, pa prema tome i tražni raspored srednjih brzina po dubini  $\tilde{u}(y)$ . U nedostatku merenja, može se primeniti računski postupak koji će se kasnije razmotriti.

Zbir koeficijenata  $(\tilde{\epsilon}_s + D_y)$  se takodje određuje na osnovu terenskih merenja. Naime, vrednost koeficijenta  $\tilde{\epsilon}_s$  se može sračunati pomoću jednačine (1.19), ali je procena vrednosti koeficijenta  $D_y$  problematična. Zato se navedeni koeficijenti ne razdvajaju, već se vrednosti njihovog zbira procenjuje na osnovu merenja ili

<sup>5</sup>Na primer, za  $m = 6$ ,  $h = 8$  m i  $n = 0,026$  m<sup>-1/3</sup>s, dobija se:  $P_1 = 0,99$ ,  $P_2 = 1,51 \times 10^{-3}$ ,  $(u_*/\tilde{u}) = \sqrt{g}n/h^{1/3} = 0,057$ , pa je:  $\tilde{\epsilon}_s/D_x = 0,0072 \approx 1/140$ .

podataka iz literature. Na Slici 1.2 prikazan je dijagram koji objedinjuje rezultate merenja u laboratoriji i na terenu [20, 21].



Slika 1.2: Empirijske zavisnosti za procenu vrednosti zbira koeficijenata turbulentne difuzije i poprečne konvektivne disperzije [20, 21]; podaci se odnose na pravolinijske deonice, dok kod tokova u krivinama treba računati sa većim vrednostima [9].

Ovaj dijagram se može koristiti u preliminarnim analizama primenom jednačine (1.30), pod uslovom da je reč o disperzionom procesu u „dalekom polju”.

U literaturi se mogu naći rezultati eksperimentalne provere uprošćene jednačine (1.30). Upoređenjem rezultata merenja i proračuna pomoću izraza (1.30) u većini slučajeva dobijeno je zadovoljavajuće slaganje [9].

Kalibracija koeficijenta linijske disperzije podrazumeva da se na osnovu izmerenih koncentracija, inverznim rešavanjem jednačine (1.1), odredi vrednost koeficijenta  $D$ . Na osnovu ove vrednosti, iz (1.30) se može utvrditi vrednost  $(\tilde{\epsilon}_s + D_y)$ . Uvodeći širinu korita  $B$  i srednju profilsku smičuću brzinu  $V_*$  kao veličine koje reprezentuju konkretnu deonicu vodotoka (odnosno njene poprečne profile), kao i hidrauličke uslove na toj deonici, treba računati sa odnosom  $(\tilde{\epsilon}_s + D_y)/(BV_*)$  kao merodavnim parametrom, pa ovaj parametar koristiti za ekstrapolaciju u uslovima kada nema merenja (a ne koeficijent  $D$ ) [9, 29].

U nemogućnosti kalibracije, zbir koeficijenata  $(\tilde{\epsilon}_s + D_y)$  može se proceniti pomoću empirijskog izraza Fišera [9]:

$$\epsilon_T = (0,6 \pm 50\%) \cdot h \cdot u_*, \quad (1.31)$$

gde je  $\epsilon_T$  – „koeficijent transversalnog mešanja” koji objedinjuje zbir navedenih koeficijenata.

Prema pomenutom autoru, vrednost koeficijenta  $\epsilon_T$  se povećava sa nepravilnošću trase i oblika rečnog korita. Naime, najmanja vrednost faktora koji množi veličine  $h \cdot u_*$  (0,6) odgovara laboratorijskim kanalima i pravolinijskim deonicama sa ko-

ritom simetričnog poprečnog preseka, a najveća vrednost (0,9), meandrirajućim vodotocima, sa prečnicima krivina manjim od  $6 \div 7$  km.

Ponovo se naglašava da sve što je prethodno rečeno u vezi sa linijskom disperzijom važi isključivo ako je ispunjen osnovni uslov „dalekog polja” – potpuno mešanje po porečnom preseku. Ako to nije slučaj, disperzioni proces se opisuje opštom jednačinom (1.2). U praksi, strujanje u blizini izvora zaganjenja, takozvanom „bliskom polju” rešava se najčešće primenom *ravanskih* modela za plitke oblasti, zasnovanim na jednačinama osrednjenim po dubini toka [15, 13] i dr.

### 1.4.1 Odredjivanje rasporeda brzine po širini korita

Kalibracija modela linijskog tečenja podrazumeva odredjivanje vrednosti Maning-ovog *koeficijenta otpora deonice* na osnovu snimljene linije nivoa [16]-3.5-71, 6.7-166. U slučaju prostog preseka, reprezentativna kinematička veličina je srednja profilska brzina.

U slučaju složenog preseka sa neravnomernim rasporedom rapavosti duž okvašenog obima, presek se deli na veći broj hidraulički homogenih delova – „segmenata”, a pod pretpostavkom da je nivo u profilu horizontalan i uzdužni nagib linije energije isti za sve segmente, računaju se srednje profilske brzine po segmentima [16]-6.4-156.

Za proračun linija nivoa, podela poprečnih preseka na segmente daje rezultate prihvatljive tačnosti. Međutim, u problemima hidrauličkog transporta, zahteva se veća tačnost, sa velikim brojem vertikalna u kojima treba sračunati brzinu, da bi raspored brzina po širini korita bio dovoljno dobro definisan za potrebe proračuna vrednosti koeficijenta disperzije. Veća tačnost takodje podrazumeva kvalitetne topografske podloge, na osnovu kojih se zadaju koordinate poprečnih profila.

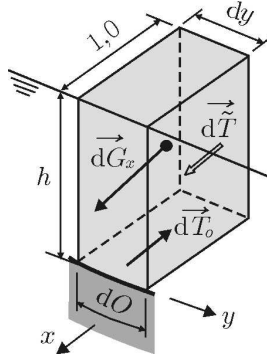
Pristup Radojkovića [29] za definisanje rasporeda brzine po širini korita, koji se opisuje u nastavku, polazi od pretpostavke ustaljenog, jednolikog tečenja. U tom slučaju, komponenta težine u pravcu toka jednaka je sili trenja, odakle sledi poznati izraz za tangencijalni napon na dnu [16]-2.3-33:

$$\tilde{\tau}_o = \rho \cdot g \cdot R \cdot I_d, \quad (1.32)$$

Ovako definisan napon na dnu je osrednjen po okvašenom obimu, jer je dat u funkciji hidrauličkog radijusa ( $R$ ), kao globalnog parametra poprečnog preseka.

Na osnovu izraza (1.32) sledi da je uzdužni nagib dna (jednak uzdužnom nagibu linije nivoa, odnosno linije energije):

$$I_d = \frac{\tilde{\tau}_o}{\rho \cdot g \cdot R} = \frac{\tilde{\tau}_o \cdot O}{\rho \cdot g \cdot A}. \quad (1.33)$$



Slika 1.3: Elementarna zapremina i sile koje deluju na fluid unutar te zapremine

Na Slici 1.3 prikazana je elementarna zapremina i sile koje deluju na fluid unutar te zapremine.

- Komponenta elementarne sile težine u pravcu toka ( $x$ ) je:  $dG_x = \rho \cdot g \cdot h \cdot dy \cdot 1,0 \cdot I_d$ ;
- Elementarna sila trenja je:  $dT_o = \tau_o \cdot dO \cdot 1,0$ ;
- Elementarne smičuće sile na bočnim stranicama ( $h \cdot 1,0$ ) javljaju se usled turbulencije i sekundarnih strujanja. Razlika ovih sila odražava neto efekat turbulencije i sekundarnih strujanja u pravcu  $y$ , na odstojanju  $dy$ :  $dT = d(\tilde{\tau} \cdot h \cdot 1,0)$ .

Uslov ravnoteže sila u pravcu  $x$ :  $dG_x + dT - dT_o = 0$  daje:

$$\rho \cdot g \cdot h \cdot dy \cdot 1,0 \cdot I_d + d(\tilde{\tau}(y) \cdot h \cdot 1,0) - \tau_o \cdot dO \cdot 1,0 = 0. \quad (1.34)$$

Ako se uzdužni nagib  $I_d$  u prvom članu ove jednačine zameni izrazom (1.33):

$$h \cdot dy \frac{\tilde{\tau}_o \cdot O}{A} + d(\tilde{\tau}(y) \cdot h) - \tau_o \cdot dO = 0, \quad (1.35)$$

a zatim obe strane podele sa  $h \cdot dy$ , dobija se jednostavniji izraz:

$$\frac{\tilde{\tau}_o}{R} + \frac{1}{h} \cdot \frac{d(\tilde{\tau}(y) \cdot h)}{dy} - \frac{\tau_o}{r} = 0, \quad (1.36)$$

gde je  $r = (dy \cdot h)/dO$  – lokalni hidraulički radijus.

Može se primetiti da izvedena jednačina (1.36) sadrži tangencijalni napon na dnu izražen lokalno, u vertikali ( $\tau_o$ ) i osrednjavanjem po poprečnom preseku ( $\tilde{\tau}_o$ ), kao i lokalni tangencijalni napon osrednjen po dubini ( $\tilde{\tau}$ ).

Prvi i poslednji član u jednačini (1.36) mogu se transformisati pomoću Maningove jednačine za otpor trenja, vodeći računa da u prvom članu figurišu globalne (profilske), a u drugom, lokalne veličine [16]-3.1-57,58:

$$\frac{\tilde{\tau}_o}{R} = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \tilde{C}_\tau \cdot V^2 \right) = \frac{\rho \cdot g \cdot \tilde{n}^2 \cdot V^2}{R^{4/3}}, \quad (1.37)$$

$$\frac{\tau_o}{r} = \frac{\rho \cdot g \cdot n^2 \cdot \tilde{u}^2}{r^{4/3}}, \quad (1.38)$$

gde su  $\tilde{n}$  i  $n$  – globalni i lokalni Maningov koeficijent rapavosti, a  $V$  i  $\tilde{u}$  – globalna i lokalna brzina, osrednjena po profilu i po dubini toka.

Već je rečeno da drugi član u jednačini (1.36) odražava uticaje turbulencije i sekundarnih strujanja. Pri pomeni tubulencije, odmah je jasno da se njen uticaj mora „modelirati”, kako bi korišćenje fizičkih veličina osrednjih po vremenu i prostoru bilo moguće. U konkretnom slučaju, može se primeniti model Šerenkova, koji, lokalni tangencijalni napon osrednjen po dubini modelira na sledeći način [35]:

$$\tilde{\tau}(y) = \tau_o \left( C_\nu \cdot \frac{d\tilde{u}}{dy} \right), \quad (1.39)$$

gde je  $C_\nu$  – empirijski parametar neravnomernosti rasporeda brzine *po dubini* toka.

Zamenom (1.37), (1.38) i (1.39) u osnovnu jednačinu (1.36) dobija se:

$$\frac{\rho \cdot g \cdot \tilde{n}^2 \cdot V^2}{R^{4/3}} + \frac{1}{h} \cdot \frac{d}{dy} \left[ \tau_o \left( C_\nu \cdot h^2 \cdot \frac{d\tilde{u}}{dy} \right) \right] - \frac{\rho \cdot g \cdot n^2 \cdot \tilde{u}^2}{r^{4/3}} = 0. \quad (1.40)$$

Ako se izvrši deljenje obe strane ove jednačine sa  $\rho$ , u drugom članu se javlja lokalna smičuća brzina:  $\tau_o/\rho = u_*^2 = \sqrt{g} \cdot n \cdot \tilde{u}/r^{1/6}$ , tako da ovaj član postaje:

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{d}{dy} \left( \frac{\sqrt{g} n \tilde{u}}{r^{1/6}} C_\nu \cdot h^2 \frac{d\tilde{u}}{dy} \right) = \frac{C_\nu \cdot \sqrt{g} \cdot n}{2h} \cdot \frac{d}{dy} \left( \frac{h^2}{r^{1/6}} \cdot \frac{d\tilde{u}^2}{dy} \right).$$

Definitivno, jednačina (1.40) dobija ovaj oblik:

$$\underbrace{\frac{g \cdot \tilde{n}^2 \cdot V^2}{R^{4/3}}}_{M_4} + \underbrace{\left( \frac{C_\nu \cdot \sqrt{g} \cdot n \cdot h}{2r^{1/6}} \right) \cdot \frac{d^2 \tilde{u}^2}{dy^2}}_{M_1} + \underbrace{\left[ \frac{C_\nu \cdot \sqrt{g} \cdot n}{2h} \cdot \frac{d}{dy} \left( \frac{h^2}{r^{1/6}} \right) \right] \frac{d\tilde{u}^2}{dy}}_{M_2} - \underbrace{\frac{g \cdot n^2 \cdot \tilde{u}^2}{r^{4/3}}}_{M_3} = 0, \quad (1.41)$$

odnosno,

$$M_1 \cdot \frac{d^2 \tilde{u}^2}{dy^2} + M_2 \cdot \frac{d\tilde{u}^2}{dy} + M_3 \cdot \tilde{u}^2 + M_4 = 0. \quad (1.42)$$

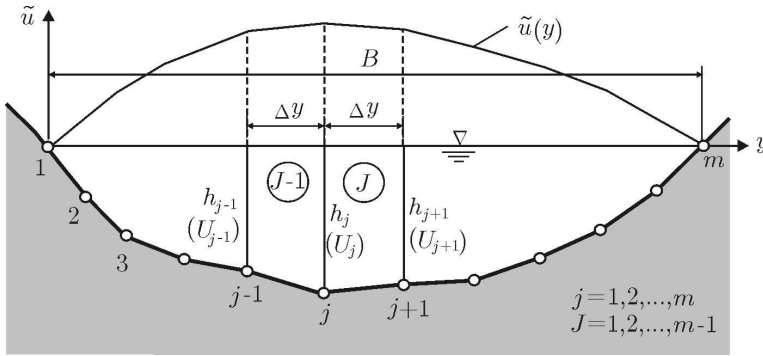
Može se konstatovati da je rezultat izvodjenja obična diferencijalna jednačina drugog reda po  $\tilde{u}^2$ .

Smenom:  $U = \tilde{u}^2$ , ova jednačina postaje:

$$M_1 \cdot \frac{d^2 U}{dy^2} + M_2 \cdot \frac{dU}{dy} + M_3 \cdot U + M_4 = 0. \quad (1.43)$$

Rešenje ove jednačine, sa odgovarajućim graničnim uslovima, daje raspored promenljive  $U(y)$ , a odavde i raspored brzine  $\tilde{u}(y)$ , što je cilj proračuna.

**Numeričko rešavanje.** Diferencijalna jednačina (1.43) sa graničnim uslovima:  $U(0) = U(B) = 0$ , gde je  $B$  – širina vodenog ogledala, rešava se numerički, shodno diskretizaciji na Slici 1.4.



Slika 1.4: Računski čvorovi i segmenti u poprečnom preseku; čvoru „j” ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) odgovara segment „J” ( $J = 1, 2, \dots, m - 1$ ).

Numeričko rešavanje se obavlja se metodom konačnih razlika. Izvodi u jednačini (1.43) aproksimiraju se *centralnim razlikama*:

$$\frac{dU}{dy} \approx \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta y}; \quad \frac{d^2 U}{dy^2} \approx \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{\Delta y^2}, \quad (1.44)$$

pa se dobija algebarska jednačina u obliku:

$$M_{1j} \cdot \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{\Delta y^2} + M_{2j} \cdot \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta y} + M_{3j} \cdot U_j + M_{4j} = 0 \quad (1.45)$$

$(j = 2, 3, \dots, m-1)$

Mogu se uvesti „novi” koeficijenti:

$$C_{1j} = \frac{M_{1j}}{\Delta y^2} = \frac{C_\nu \cdot \sqrt{g} \cdot n_j \cdot h_j}{\Delta y^2 \cdot r_J^{1/6}} \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} C_{2j} &= \frac{M_{2j}}{2\Delta y} = \frac{1}{2\Delta y} \cdot \frac{C_\nu \cdot \sqrt{g} \cdot n_j}{2h_j} \cdot \frac{d}{dy} \left( \frac{h^2}{r^{1/6}} \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2\Delta y} \cdot \frac{C_\nu \cdot \sqrt{g} \cdot n_j}{2h_j} \cdot \frac{(h^2/r^{1/6})_J - (h^2/r^{1/6})_{J-1}}{\Delta y} \approx \\ &\approx C_{1j} \cdot \frac{r_J^{1/6}}{2h_j^2} \left[ (h^2/r^{1/6})_J - (h^2/r^{1/6})_{J-1} \right] \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$C_{3j} = M_{3j} = \frac{-g \cdot n_j^2}{r_J^{4/3}} \quad (1.48)$$

$$C_4 = M_{4j} = \frac{g \cdot \tilde{n}^2 \cdot V^2}{R^{4/3}}, \quad (1.49)$$

gde indeks „j” označava vrednosti koje se računaju u čvorovima, a indeks „J”, u odgovarajućim segmentima (uočiti ovu razliku u oznakama); na primer, srednja dubina u segmentima je:  $h_J = (h_j + h_{j+1})/2$ ;  $h_{J-1} = (h_j + h_{j-1})/2$ , a lokalni hidraulički radijus:  $r_J = A_J/O_J$ ;  $r_{J-1} = A_{J-1}/O_{J-1}$ .

Jednačina (1.45) postaje:

$$C_{1j} (U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}) + C_{2j} (U_{j+1} - U_{j-1}) + C_{3j} \cdot U_j + C_4 = 0, \quad (1.50)$$

ili:

$$U_{j-1} (C_{1j} - C_{2j}) + U_j (C_{3j} - 2C_{1j}) + U_{j+1} (C_{1j} + C_{2j}) = -C_4 \quad (1.51)$$

$(j = 2, 3, \dots, m-1)$

Može se primetiti da koeficijent  $C_4$  ima konstantnu vrednost jer se računa na osnovu globalnih parametara profila (srednje profilske brzine  $V$  i hidrauličkog radijusa  $R$ ), određenih proračunom linije nivoa.

Sistem jednačina (1.51) ima tridijagonalnu strukturu matrice koeficijenata. Ako se, radi kraćeg pisanja, uvedu oznake:  $a_1 = (C_{1j} - C_{2j})$ ,  $a_2 = (C_{3j} - 2C_{1j})$ ,  $a_3 = (C_{1j} + C_{2j})$  i  $b = -C_4$  i ako se, primera radi, uzme  $m = 7$ , sistem (1.51) se može shematski prikazati u matričnom obliku:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 3 & 4 & j=4 & 5 & 6 & 7 \\
 1 & \times & \times & & & & & \\
 2 & \times & \times & \times & & & & \\
 3 & & \times & \times & \times & & & \\
 j=4 & & & a_1 & a_2 & a_3 & & \\
 5 & & & & \times & \times & \times & \\
 6 & & & & & \times & \times & \times \\
 7 & & & & & & \times & \times
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} b \\ b \\ b \\ b \\ b \\ b \\ b \end{array} \right|
 \end{array}
 \end{array}$$

Za sisteme algebarskih jednačina sa tridijagonalnom strukturom postoji poseban algoritam rešavanja. Na osnovu vektora rešenja  $U_j$  dobija se vektor traženih brzina:  $\tilde{u}_j = U_j^{1/2}$  ( $j = 1, 3, \dots, m$ ). Time je određen raspored brzine po širini korita  $\tilde{u}(y)$ . Kontrola je:

$$Q = \int_0^B \tilde{u}(y) \cdot h(y) dy \approx \sum_{j=1}^m \tilde{u}_j \cdot h_j \cdot \Delta y. \quad (1.52)$$

### 1.4.2 Računski algoritam

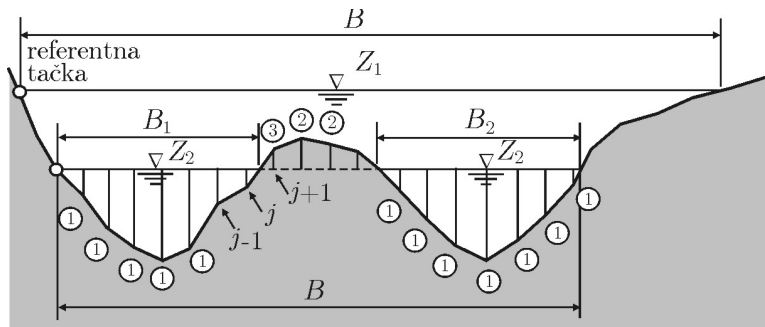
Proračun linijskog koeficijenta disperzije podrazumeva da je prethodno obavljen proračun linijskog ustaljenog tečenja za dati protok i da su u svim računskim profilima poznate vrednosti svih hidrauličkih parametara: kote nivoa, širine vodenog ogledala, površine, hidrauličkog radijusa, srednje profilske brzine itd. Za ovaj proračun se koristi kalibrisan Maningov koeficijent otpora, kao globalni parametar deonice [16]-3.5, 71 i 6.7, 166-169.

Za proračun linijske disperzije potrebno je posebno definisati vrednosti Maningovog koeficijenta rapavosti za svaki profil, kao i lokalne vrednosti ovog koeficijenta za svaku tačku (vertikalnu) profila. Vrednosti u profilima se usvajaju na osnovu inženjerske procene. Lokalne vrednosti se u prvoj iteraciji usvajaju da su sve jednake profilske vrednosti. Tokom proračuna, lokalne vrednosti će se podešavati, dok se globalna vrednost za profil ne menja.

Proračun disperzije obavlja se u dve etape. U prvoj se računa raspored brzine po poprečnom preseku  $\tilde{u}(y)$ , a u drugoj, integriše linijski koeficijent disperzije u svim profilima.



**Raspored brzine po širini korita.** Na osnovu učitane geometrije i hidrauličkih parametara profila, najpre se određuje merodavna širina vodenog ogledala, kao što je pokazano na Slici 1.5.



Slika 1.5: Širina vodenog ogledala  $B$  koja se koristi u proračunu rasporedu brzine po širini korita. U slučaju kote nivoa  $Z_1$ , nema ada, pa je merodavna širina  $B$  jednaka širini vodenog ogledala iz proračuna linije nivoa. U slučaju kote  $Z_2$ , u koritu se javlja ada, a merodavna širina  $B$  je veća od širine vodenog ogledala iz proračuna linije nivoa  $B_1 + B_2$ . Kodiranje koordinatnih tačaka prema tipu: „mokra” (1), „suva” (2) i „polusuva” (3). Generisane vertikale su na jednakom odstojanju.

Za proračun koeficijenta disperzije neophodno je uzeti u obzir *ukupnu* širinu korita na koti nivoa vode ( $B$ ), obuhvatajući i širinu ada, ako ova postoji. (Pod „adom” se podrazumeva i deo korita koji ostaje na „suvom” pri niskim protocima.) Kada se širina  $B$  odredi u svim profilima, proračun se obavlja po sledećem redosledu:

(1) Polazeći od referentne tačke (Slika 1.5), generiše se novi niz ekvidistantnih koordinatnih tačaka, koje određuju položaj računskih vertikala. (Izabrani broj vertikala  $m$  obično je znatno veći od ukupnog broja tačaka kojima su profili bili definisani u proračunu linije nivoa.) Skupu od  $j = 1, 2, \dots, m$  tačaka odgovara  $J = 1, 2, \dots, m - 1$  segmenata jednake širine  $\Delta y = B/(m - 1)$ , gde je  $B$  – ukupna širina korita.

(2) U svakoj tački (vertikali) računa se dubina  $h_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Ukoliko u profilu postoji ada, jedan broj tačaka (vertikala) biće na „suvom”, a odgovarajuće dubine imaće negativne vrednosti u odnosu na nivo vode. Shodno tome, neophodno je da se tačke (vertikale) kodiraju prema tipu (Slika 1.5):

Tip tačke	kod	Kriterijum
„mokra”	1	$h_j > 0$
„suva”	2	$h_j \leq 0, \quad h_{j-1} < 0$
„polusuva”	3	$h_j \leq 0, \quad h_{j-1} > 0$

(3) Za svaki segment računaju se: srednja dubina:  $h_J = (h_j + h_{j+1})/2$ , površina:  $A_J = h_J \cdot \Delta y$ , okvašeni obim  $O_J = \sqrt{|h_{j+1} - h_j|^2 + \Delta y^2}$ , hidraulički radijus  $r_J = A_J/O_J$  itd. ( $J = 1, 2, \dots, m-1$ ).

(4) Računaju se vrednosti koeficijenata  $C_{1j}$ ,  $C_{2j}$ ,  $C_{3j}$  i  $C_4$  ( $J = 1, \dots, m-1$ ).

(5) Rešava se sistem algebarskih jednačina po promenljivoj  $U_j$ , odakle slede vrednosti brzine:  $\tilde{u}_j = \sqrt{U_j}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

(6) Računa se protok pomoću izraza (1.52) i upoređuje sa zadatim protokom. Ako je razlika manja od usvojene male vrednosti (recimo 1%), prelazi se na sledeći profil; ako to nije slučaj, koriguju se lokalne vrednosti Maningovog koeficijenta i to se ponavlja sve dok uslov po protoku ne bude zadovoljen. Korekcije se obavljaju tako što se vrednosti Maningovog koeficijenta množe faktorom  $0,5 \div 1,9$  (početna vrednost faktora je 1,0). Pri tome globalna vrednost Maningovog koeficijenta za profil ostaje nepromenjena.

**Koeficijent disperzije.** Na osnovu (1.30) i (1.31), proizilazi da treba numerički rešiti sledeći trostruki integral:

$$D = -\frac{1}{A} \int_0^B u^+ \cdot h \underbrace{\int_0^y \frac{1}{\epsilon_T \cdot h} \underbrace{\int_0^y u^+ \cdot h dy}_{F_1(y)} dy}_{F_2(y)} dy \quad (1.53)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{F_3}$

U tom cilju, preduzima se sledeći niz računskih koraka:

(1) Na osnovu prethodno određenog rasporeda brzine  $\tilde{u}(y)$ , računaju se lokalne smičuće brzine:  $u_{*,j} = \sqrt{g} \cdot n_j \cdot \tilde{u}_j / h_j^{1/6}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

(2) U svakom profilu se računa vrednost Fišerovog koeficijenta tranverzalnog mešanja  $\epsilon_T$ . U profilima na pravolinijskim deonicama (poluprečnik krivine  $R_k = \infty$ ) proizvod  $h \cdot u_*$  se množi faktorom 0,6. U krivinama, vrednost faktora se određuje interpolacijom u intervalu  $(0,6 \div 0,9)$ , shodno poluprečniku krivine koji se nalazi u unapred zadatom intervalu  $(R_{k,\max}, R_{k,\min})$ . Ovo iziskuje da se u ulazne podatke o profilima uvrste i vrednosti popuprečnika krivina.

(3) Obavlja se osrednjavanje brzine po segmentima:  $u_J = (\tilde{u}_j + \tilde{u}_{j+1})/2$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $J = 1, 2, \dots, m-1$ ). Zatim se računaju odstupanja tako dobijenih brzina od srednje profilske brzine:  $u_J^+ = u_J - V$ , kao i odgovarajuće vrednosti protoka:  $q_J^+ = u_J^+ \cdot A_J$  ( $J = 1, 2, \dots, m-1$ ).

(4) Računa se prvi integral:

$$F_1 \approx \sum_1^J u_J^+ \cdot A_J = \sum_1^J q_J^+$$

(5) Računa se drugi integral trapeznim pravilom:

$$F_2 \approx \sum_1^J \left( \frac{1}{\epsilon_T \cdot h} \right)_J \frac{1}{2} (F_{1,J} + F_{1,J+1}) \Delta y.$$

(6) Računa se treći integral trapeznim pravilom:

$$F_3 = \sum_{J=1}^{m-1} \frac{1}{2} (F_{2,J} + F_{2,J+1}) \Delta y.$$

(7) Računa se vrednost linijskog koeficijenta disperzije:  $D = -F_3/A$ .

## Literatura

- [1] Anderson, D.A., Tannehill, J.C., Pletcher, R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Co. New York, 1984.
- [2] Chang, H.H., *Fluvial Processes in River Engineering*, John Wiley & Sons, 1988.
- [3] Chanson, H., *The Hydraulics of Open Channel Flow - An Introduction*, Arnold, London, 1999.
- [4] Chow, V.T., *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, International Student Edition, Tokyo, 1959.
- [5] Chung, T.J., *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, 1978.
- [6] Cunge, J.A., Holly, F.M., Verwey, A., *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman, 1980.
- [7] Elder, J.W., *The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow*, J. Fluid Mech., No. 4, 1959.
- [8] Fischer, H.B., *The Mechanics of Dispersion in Natural Streams*, J. Hydraul. Div., ASCE, Vol. 93, HY6, 1967.
- [9] Fischer, H.B., *Longitudinal Dispersion and Turbulent Mixing in Open Channel Flow*, Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 5, 1973.
- [10] French, R.H., *Open Channel Hydraulics*, McGraw Hill, New York, 1986.
- [11] Hajdin, G., *Mehanika fluida*, Gradjevinski fakultet, Beograd, 2002.
- [12] Henderson, F.M., *Open Channel Flow*, Macmillan Publishing Co., New York, 1966.
- [13] Hervouet, J-M., *Hydrodynamics of Free Surface Flows - Modelling with the Finite Element Method*, Wiley, 2007.
- [14] Hydrologic Eng. Center, HEC-RAS *River Analysis System*, User's Manual, USCOE, 2002.
- [15] Jovanović, M., *Osnove numeričkog modeliranja ravanskih otvorenih tokova*, Gradjevinski fakultet, Beograd, 1998.
- [16] Jovanović, M., *Regulacija reka – rečna hidraulika i morfologija*, drugo izdanje, Gradjevinski fakultet, Beograd, 2008.
- [17] Jovanović, M., Kapor, R., Prodanović, D., Zindović, B. *Numerical simulation of concentrated release of dredged material into the river*, Journal "Vodoprivreda", 0350-0519, 39, 2007 (in Serbian).

- [18] Julien, P.Y., *River Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [19] Lai, Ch., *Numerical Modeling of Unsteady Open-Channel Flow*, Advances in Hydrosience, Volume 14-1986, Academic Press, New York, 1986.
- [20] Lam Lau, Y., Krishnappan, B.G., *Transverse Dispersion in Rectangular Channels*, J. Hydraul. Division, ASCE, HY2, 1977.
- [21] Lam Lau, Y., Krishnappan, B.G., *Modeling Transverse Mixing in Natural Streams*, J. Hydraul. Division, ASCE, HY2, 1981.
- [22] Launder, B.E., Spalding, D.B., *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, London, 1972.
- [23] Liu, H., *Predicting Dispersion Coefficient of Streams*, J. Envir. Division, ASCE, Vol. 103, 1977. (+Discussion by F.M., Holly).
- [24] Mahmood, K., Yevjevich, V., (ed.) *Unsteady Flow in Open Channels*, Water Resources Publications, Fort Collins, 1975.
- [25] Pinder G.F, Gray, W.G., *Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology*, Academic Press, 1977.
- [26] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1986.
- [27] Pudar, R., *Računski model linijske disperzije u otvorenim tokovima*, diplomski rad, Građevinski fakultet, Beograd, 1987.
- [28] Pudar, R., Radojković, M., *Neke mogućnosti za unapredjenje hidrodinamičke interpretacije terenskih merenja disperzije u otvorenim tokovima*, 1987.
- [29] Radojković, M., *Struktura parametara matematičkog modela linijske disperzije u otvorenim tokovima*, VIII. Savetovanje JDHI, Portorož, 1982.
- [30] Radojković, M., *Neki problemi numeričkog rešavanja jednačine disperzije*, Posebna izdanja Akademije nauka BiH, Knjiga 10, Sarajevo, 1981.
- [31] Radojković, M., *Matematički model kretanja vode u otvorenim tokovima*, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd, 1981.
- [32] Rastogi, A.K., Rodi, W., *Prediction of Heat and Mass Transfer in Open Channels*, J. Hydraul. Div. ASCE, HY3, 1978.
- [33] Roache, P.J., *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, 1972.
- [34] Rodi, W., *Turbulence models and their application in hydraulics*, Institut für Hydromechanik, University of Karlsruhe, 1980.

- [35] Šerenkov, I.A., *Prikladnije planovie zadači gidravliki spokojnih potokov*, Energija, Moskva, 1978.
- [36] Toro, E.F., *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2001.
- [37] US Army Corps of Engineers, HEC-RAS Documentation, Davis, 2002.
- [38] US Army Corps of Engineers, RMA2 WES, Documentation, WexTech Systems, New York, 1997.
- [39] Vreugdenhil, C.B., *Computational Hydraulics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Numeričko modeliranje linijske disperzije u otvorenim tokovima</b>	<b>1</b>
1.1	Uvod . . . . .	1
1.2	Koeficijent linijske disperzije . . . . .	1
1.2.1	Podužna turbulentna difuzija . . . . .	3
1.2.2	Podužna konvektivna disperzija . . . . .	6
1.2.3	Poprečna turbulentna difuzija i konvektivna disperzija . . . . .	8
1.3	Uprošćeni izraz za koeficijent disperzije . . . . .	8
1.4	Proračun koeficijenta linijske disperzije . . . . .	9
1.4.1	Odredjivanje rasporeda brzine po širini korita . . . . .	11
1.4.2	Računski algoritam . . . . .	16
	<b>Literatura</b> . . . . .	<b>20</b>