

0.1 Program Reke4T: Teorijske osnove

Sistem jednačina linijskog neustaljenog tečenja čine jednačina održanja mase (kontinuiteta) i jednačina održanja količine kretanja (dinamička jednačina), koje se mogu napisati u sledećem obliku:

$$B \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{A} \right) + \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A^2} \right) + \frac{\partial Z}{\partial x} + I_e = 0, \quad (2)$$

gde je nagib linije energije usled trenja definisan Maningovom formulom:

$$I_e = \frac{n^2 \cdot Q |Q|}{A^2 R^{4/3}} = \frac{Q |Q|}{K^2}, \quad (3)$$

u kojoj se stavljanjem znaka apsolutne vrednosti uzima u obzir smer tečenja. Sistem jednačina (1)-(2) rešava se numerički po nepoznatim $Z(x, t)$ i $Q(x, t)$.

0.1.1 Računska shema Preissmanna („4 tačke”)

Parcijalni izvodi se aproksimiraju konačnim razlikama prema shemi koja obuhvata četiri tačke, kao što je prikazano na Slici 1:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{f_i^{k+1} + f_{i+1}^{k+1}}{2} - \frac{f_i^k + f_{i+1}^k}{2} \right) \quad (4)$$

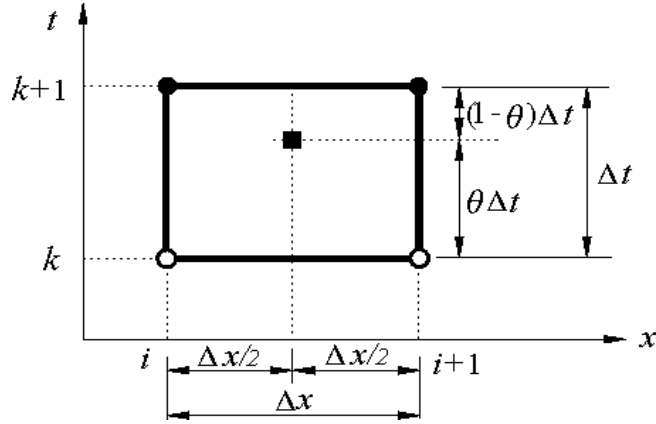
$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \theta \frac{f_{i+1}^{k+1} - f_i^{k+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{\Delta x}, \quad (5)$$

gde oznaka „ f ” predstavlja bilo koju zavisno promenljivu (Q ili Z).

Veličine koje nisu pod izvodima (na primer I_e), aproksimiraju se na ovaj način:

$$f(x, t) \approx \theta \left(\frac{f_i^{k+1} + f_{i+1}^{k+1}}{2} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{f_i^k + f_{i+1}^k}{2} \right). \quad (6)$$

Vrednosti težinskog faktora se kreću u granicama $0.5 < \theta < 1$. Iskustveno je ustanovljeno da vrednosti $\theta = 0.6 - 0.7$ obično daju rezultate sa najnižim stepenom numeričke difuzije.



Slika 1: Praismanova računska shema.

0.1.2 Linearizacija zavisno promenljivih

Linearizacija znači da se zavisno promenljiva f na vremenskom nivou $(k+1)\Delta t$ može definisati na sledeći način:

$$f^{k+1} = f^k + \Delta f, \quad (7)$$

gde Δf predstavlja priraštaj te promenljive u vremenskom intervalu Δt .

Opšti izraz (7) zamenjuje sledeće izraze:

$$Z_i^{k+1} = Z_i^k + \Delta Z_i; \quad Z_{i+1}^{k+1} = Z_{i+1}^k + \Delta Z_{i+1} \quad (8)$$

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k + \Delta Q_i; \quad Q_{i+1}^{k+1} = Q_{i+1}^k + \Delta Q_{i+1}. \quad (9)$$

Može se lako pokazati da se linearizacijom – uvođenjem izraza (7) u Preissmannove diskretizacione jednačine (4)-(6), ove jednačine svode na veze između *priraštaja* zavisno promenljivih na vremenskom nivou $(k+\theta)\Delta t$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\theta \cdot \Delta f_{i+1} + \theta \cdot \Delta f_i}{\theta \cdot \Delta t} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{(f_{i+1}^k + \theta \cdot \Delta f_{i+1}) - (f_i^k + \theta \cdot \Delta f_i)}{\Delta x} \quad (11)$$

$$f \approx \frac{1}{2} \left[(f_{i+1}^k + \theta \cdot \Delta f_{i+1}) + (f_i^k + \theta \cdot \Delta f_i) \right], \quad (12)$$

pri čemu je:

$$f^{k+\theta} = f^k + \theta \cdot \Delta f. \quad (13)$$

0.1.3 Diskretizacija članova u jednačini održanja mase

Primenom izraza (10)-(12):

$$B \frac{\partial Z}{\partial t} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{B_i \cdot \theta \cdot \Delta Z_i + B_{i+1} \cdot \theta \cdot \Delta Z_{i+1}}{\theta \cdot \Delta t} \right] \quad (14)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} [(Q_{i+1} + \theta \cdot \Delta Q_{i+1}) - (Q_i + \theta \cdot \Delta Q_i)] \quad (15)$$

i zamenom u (1) dobija se:

$$\underbrace{-\theta \Delta Q_i}_A + \underbrace{\theta \Delta Q_{i+1}}_B + \underbrace{\frac{\Delta x B_i}{2 \Delta t} \Delta Z_i}_C + \underbrace{\frac{\Delta x B_{i+1}}{2 \Delta t} \Delta Z_{i+1}}_D + \underbrace{Q_{i+1} - Q_i}_G = 0 \quad (16)$$

odnosno,

$$A \cdot \Delta Q_i + B \cdot \Delta Q_{i+1} + C \cdot \Delta Z_i + D \cdot \Delta Z_{i+1} + G = 0.$$
(17)

Koeficijenti A, B, C, D i G zavise isključivo od vrednosti zavisno promenljivih (Q, Z) na vremenskom nivou „ k ”.

0.1.4 Diskretizacija članova u jednačini održanja količine kretanja

Većina članova u ovoj jednačini su složene funkcije $f(Z, Q)$, tako da linearizacija (7), odnosno (13), podrazumeva razvoj u Taylorov red, pretpostavljajući da su te funkcije neprekidne i diferencijabilne (videti u knjizi tekst na strani 138):

$$f_i^{k+1} = f_i^k + \Delta f = f_i^k + \frac{\partial f_i}{\partial Z_i} \cdot \Delta Z_i + \frac{\partial f_i}{\partial Q_i} \cdot \Delta Q_i + \dots \quad (18)$$

$$f_i^{k+\theta} = f_i^k + \theta \Delta f = f_i^k + \frac{\partial f_i}{\partial Z_i} \cdot \theta \Delta Z_i + \frac{\partial f_i}{\partial Q_i} \cdot \theta \Delta Q_i + \dots \quad (19)$$

U nastavku se izводе izrazi za pojedine članove dinamičke jednačine (2).

• Član $\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{A} \right)$

Razvojem u Taylorov red prema izrazu (19), sledi:

$$(Q A^{-1})^{k+\theta} = (Q A^{-1})^k + A^{-1} \cdot \theta \Delta Q - A^{-2} \cdot Q \frac{\partial A}{\partial Z} \cdot \theta \Delta Z + \dots, \quad (20)$$

gde je: $\partial A / \partial Z = B$.

Primenjujući pravilo (10), dobija se¹:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{A} \right) &\approx \frac{1}{g \theta \Delta t} \cdot \frac{1}{2} \left[\left(\frac{Q_i}{A_i} + \frac{\theta \Delta Q_i}{A_i} - \frac{Q_i}{A_i^2} B_i \theta \Delta Z_i \right) - \frac{Q_i}{A_i} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}} + \frac{\theta \Delta Q_{i+1}}{A_{i+1}} - \frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}^2} B_{i+1} \theta \Delta Z_{i+1} \right) - \frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}} \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

• Član $\frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A^2} \right)$

Razvoj u Taylorov red daje:

$$(Q^2 A^{-2})^{k+\theta} = (Q^2 A^{-2})^k + 2 Q A^{-2} \cdot \theta \Delta Q - 2 A^{-3} Q^2 \frac{\partial A}{\partial Z} \cdot \theta \Delta Z + \dots, \quad (22)$$

¹Zbog kraćeg pisanja, izostavlja se oznaka vremenskog nivoa „k”.

gde je opet: $\partial A / \partial Z = B$.

Primenjujući pravilo (11), dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^2}{A^2} \right) \approx \frac{1}{2g \Delta x} \left[\left(\frac{Q_{i+1}^2}{A_{i+1}^2} + \frac{2Q_{i+1}}{A_{i+1}^2} \theta \Delta Q_{i+1} - \frac{2Q_{i+1}^2}{A_{i+1}^3} B_{i+1} \theta \Delta Z_{i+1} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{Q_i^2}{A_i^2} + \frac{2Q_i}{A_i^2} \theta \Delta Q_i + \frac{2Q_i^2}{A_i^3} B_i \theta \Delta Z_i \right) \right]. \quad (23) \end{aligned}$$

• Član $\frac{\partial Z}{\partial x}$

Primenjujući pravilo (11):

$$\frac{\partial Z}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} [(Z_{i+1} + \theta \Delta Z_{i+1}) - (Z_i + \theta \Delta Z_i)] \quad (24)$$

• Član $\frac{Q^2}{K^2}$

Razvoj u Taylorov red daje:

$$(Q^2 K^{-2})^{j+\theta} = (Q^2 K^{-2})^k + 2Q K^{-2} \theta \Delta Q - 2K^{-3} Q^2 \frac{\partial K}{\partial Z} \theta \Delta Z + \dots \quad (25)$$

Primenjujući pravilo (12), dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{K^2} \approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{Q_i^2}{K_i^2} + \frac{2Q_i}{K_i^2} \theta \Delta Q_i - \frac{2Q_i^2}{K_i^3} \left(\frac{\partial K}{\partial Z} \right)_i \theta \Delta Z_i \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{Q_{i+1}^2}{K_{i+1}^2} + \frac{2Q_{i+1}}{K_{i+1}^2} \theta \Delta Q_{i+1} - \frac{2Q_{i+1}^2}{K_{i+1}^3} \left(\frac{\partial K}{\partial Z} \right)_{i+1} \theta \Delta Z_{i+1} \right) \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

Sabiranjem navedenih članova i grupisanjem uz nepoznate priraštaje ΔQ i ΔZ dobija se jednačina oblika:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\Delta Q_i \left[\frac{\Delta x}{2g\Delta t A_i} - \frac{\theta Q_i}{g A_i^2} + \frac{\theta \Delta x Q_i}{K_i^2} \right]}_{A'} + \\
& + \underbrace{\Delta Q_{i+1} \left[\frac{\Delta x}{2g\Delta t A_{i+1}} + \frac{\theta Q_{i+1}}{g A_{i+1}^2} + \frac{\theta \Delta x Q_{i+1}}{K_{i+1}^2} \right]}_{B'} + \\
& + \underbrace{\Delta Z_i \left[-\theta - \frac{\Delta x Q_i B_i}{2g \Delta t A_i^2} + \frac{\theta Q_i^2 B_i}{g A_i^3} - \frac{\theta \Delta x Q_i |Q_i|}{K_i^3} \left(\frac{\partial K}{\partial Z} \right)_i \right]}_{C'} + \\
& + \underbrace{\Delta Z_{i+1} \left[\theta - \frac{\Delta x Q_{i+1} B_{i+1}}{2g \Delta t A_{i+1}^2} - \frac{\theta Q_{i+1}^2 B_{i+1}}{g A_{i+1}^3} - \frac{\theta \Delta x Q_{i+1} |Q_{i+1}|}{K_{i+1}^3} \left(\frac{\partial K}{\partial Z} \right)_{i+1} \right]}_{D'} + \\
& + \underbrace{Z_{i+1} - Z_i + \frac{Q_{i+1}^2}{2g A_{i+1}^2} - \frac{Q_i^2}{2g A_i^2} + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{Q_i |Q_i|}{K_i^2} + \frac{Q_{i+1} |Q_{i+1}|}{K_{i+1}^2} \right)}_{G'} = 0, \quad (27)
\end{aligned}$$

odnosno,

$$A' \cdot \Delta Q_i + B' \cdot \Delta Q_{i+1} + C' \cdot \Delta Z_i + D' \cdot \Delta Z_{i+1} + G' = 0. \quad (28)$$

Koeficijenti A', B', C', D' i G' zavise isključivo od poznatih vrednosti zavisno promenljivih (Q, Z) na vremenskom nivou „ k ”.

Izvod $\partial K / \partial Z$ se može napisati u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial Z} &= \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{n} A R^{2/3} \right) = \frac{1}{n} \left(R^{2/3} \frac{\partial A}{\partial Z} + A \frac{\partial R^{2/3}}{\partial Z} \right) = \\
&= \frac{1}{n} \left(R^{2/3} B + A \frac{\partial R^{2/3}}{\partial Z} \right). \quad (29)
\end{aligned}$$

U slučaju prirodnog korita sa poprečnim presekom nepravilnog oblika, vrednost izraza (29) mora se odrediti numeričkim diferenciranjem. U slučaju da

poprečni presek korita ima prost geometrijski oblik, koristi se analitičko diferenciranje, pa za trapezni presek važi izraz:

$$\frac{\partial K}{\partial Z} = \frac{R^{2/3}}{n} \frac{1}{3} (5B - 4R\sqrt{1+m^2}), \quad (30)$$

ako su kosine kanala pod nagibom 1: m .

0.1.5 Rešavanje sistema algebarskih jednačina metodom „dvostrukog prolaza”

Za svaku kontrolnu zapreminu ograničenu profilima „ i ” i „ $i+1$ ” mogu se napisati dve jednačine tipa (17) i (28):

$$\left. \begin{aligned} A_i \cdot \Delta Q_i + B_i \cdot \Delta Q_{i+1} + C_i \cdot \Delta Z_i + D_i \cdot \Delta Z_{i+1} + G_i &= 0 \\ A'_i \cdot \Delta Q_i + B'_i \cdot \Delta Q_{i+1} + C'_i \cdot \Delta Z_i + D'_i \cdot \Delta Z_{i+1} + G'_i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Na deonici sa NP profila, broj nepoznatih iznosi $2NP$. Kako je broj kontrolnih zapremina $NP-1$, može se napisati $2(NP-1)=2NP-2$ jednačina. Dakle, nedostaju 2 jednačine za zatvaranje sistema. Te dve jednačine se obezbeđuju iz graničnih uslova.

U knjizi se u tačkama 5.4.2.5 i 12.2.1.3 govori o rešavanju sistema nelinearnih algebarskih jednačina. Opisane su Metoda zamene i Metoda Newton-Raphson, a spomenuta je i Metoda dvostrukog prolaza, koja će se detaljnije obrazložiti u nastavku².

Osnovna pretpostavka Metode dvostrukog prolaza je da je za dovoljno malu vrednost računskog koraka Δt , veza između nepoznatih ΔQ i ΔZ u posmatranom profilu „ i ” linearna:

$$\Delta Q_i = E_i \cdot \Delta Z_i + F_i. \quad (32)$$

Ova pretpostavka važi samo ako priraštaji nepoznatih ispunjavaju uslov: $\Delta Q_i \ll Q_i$ i $\Delta Z_i \ll Z_i$. Koeficijenti E_i i F_i imaju konstantnu vrednosti u datom vremenskom trenutku.

²Opis ove metode može se naći i u knjizi M. Jovanovića *Osnove numeričkog modeliranja ravanskih otvorenih tokova*, Građevinski fakultet, Beograd, 1998., u tački 5.5.1.7. pod naslovom „Thomasov TDMA algoritam”.

Ako se veza (32) uvrsti u drugu (dinamičku) jednačinu sistema (31), može se iz nje eliminisati veličina ΔQ_i :

$$A'_i (E_i \cdot \Delta Z_i + F_i) + B'_i \cdot \Delta Q_{i+1} + C' \cdot \Delta Z_i + D' \cdot \Delta Z_{i+1} + G' = 0. \quad (33)$$

Rešavanjem po ΔZ_i dobija se:

$$\Delta Z_i = L_i \cdot \Delta Z_{i+1} + M_i \cdot \Delta Q_{i+1} + N_i, \quad (34)$$

gde je:

$$L_i = D'_i / H_{pom} \quad (35)$$

$$M_i = B'_i / H_{pom} \quad (36)$$

$$N_i = (A'_i \cdot F_i + G'_i) / H_{pom} \quad (37)$$

$$H_{pom} = -(A'_i \cdot E_i + C'_i). \quad (38)$$

Ako se izrazi (32) i (34) uvrste u prvu jednačinu (kontinuiteta) sistema (31), mogu se iz nje eliminisati nepoznate ΔQ_i i ΔZ_i :

$$\begin{aligned} A_i (E_i \cdot \Delta Z_i + F_i) + B_i \cdot \Delta Q_{i+1} + C_i (L_i \cdot \Delta Z_{i+1} + M_i \cdot \Delta Q_{i+1} + N_i) + \\ + D_i \cdot \Delta Z_{i+1} + G_i = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

a rešavajući po ΔQ_{i+1} sledi:

$$\Delta Q_{i+1} = E_{i+1} \cdot \Delta Z_{i+1} + F_{i+1}, \quad (40)$$

gde je:

$$E_{i+1} = (A_i \cdot E_i \cdot L_i + C_i \cdot L_i + D_i) / J_{pom} \quad (41)$$

$$F_{i+1} = (A_i (E_i \cdot N_i + F_i) + C_i \cdot N_i + G_i) / J_{pom} \quad (42)$$

$$J_{pom} = -(A_i \cdot E_i \cdot M_i + B_i + C_i \cdot M_i). \quad (43)$$

Dakle, priraštaji se definišu sledećim izvedenim izrazima:

$$\Delta Q_i = E_i \cdot \Delta Z_i + F_i \quad (44)$$

$$\Delta Z_i = L_i \cdot \Delta Z_{i+1} + M_i \cdot \Delta Q_{i+1} + N_i \quad (45)$$

$$\Delta Q_{i+1} = E_{i+1} \cdot \Delta Z_{i+1} + F_{i+1}. \quad (46)$$

Da bi se proračun mogao realizovati, neophodno je definisati 2 granična uslova. U mirnom režimu tečenja ovi uslovi se zadaju na uzvodnoj i nizvodnoj granici računске oblasti (deonice).

• Uzvodni granični uslov ($i = 1$):

Ako je zadat ulazni hidrogram $Q_1(t)$, vrednost priraštaja $\Delta Q_1 = Q_1^{k+1} - Q_1^k$ je uvek poznata, jer je vrednost Q_1^k poznata iz prethodnog računskog koraka, a vrednost Q_1^{k+1} , iz zadatog hidrograma.

Tada je na osnovu (44): $E_1 = 0$, a $F_1 = Q_1^{k+1} - Q_1^k$.

Na osnovu vrednosti $E_1, F_1, A'_1, B'_1, C'_1, D'_1$ i G'_1 računaju se pomoću (35), (36) i (37) koeficijenti L_1, M_1 i N_1 .

Zatim se na osnovu vrednosti $L_1, M_1, N_1, A_1, B_1, C_1, D_1$ i G_1 , računaju vrednosti koeficijenata E_2 i F_2 u nizvodnom profilu $i = 2$.

Postupak se sukcesivno ponavlja za profile $i = 3, 4, \dots, NP$. Ovaj redosled proračuna predstavlja „*prolaz unapred*” u kome se proračun koeficijenata simbolički može prikazati: $L, M, N \rightarrow E, F$.

• Nizvodni granični uslov ($i = NP$):

Ovaj uslov se uvodi nakon prolaza unapred, kada su sračunate vrednosti svih koeficijenata E i F , uključujući E_{NP} i F_{NP} . Nizvodni granični uslov može biti zadat u vidu hidrograma, nivograma, ili krive protoka.

(i) Hidrogram: $Q_{NP}(t)$

Direktno se računa priraštaj $\Delta Q_{NP} = Q_{NP}^{k+1} - Q_{NP}^k$, a na osnovu (44) sledi: $\Delta Z_{NP} = (\Delta Q_{NP} - F_{NP})/E_{NP}$.

(ii) Nivogram: $Z_{NP}(t)$

Direktno se računa priraštaj $\Delta Z_{NP} = Z_{NP}^{k+1} - Z_{NP}^k$, a na osnovu (44) sledi:
 $\Delta Q_{NP} = E_{NP} \cdot \Delta Z_{NP} + F_{NP}$.

(iii) Kriva protoka: $Q_{NP} = \varphi(Z_{NP})$

Razvijanjem navedene funkcije u Taylorov red dobija se:

$$Q_{NP}^{k+1} = Q_{NP}^k + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Z} \right)^k \Delta Z_{NP} + \dots \quad (47)$$

S druge strane, iz (44) je:

$$Q_{NP}^{k+1} = Q_{NP}^k + E_{NP} \cdot \Delta Z_{NP} + F_{NP}. \quad (48)$$

Izjednačenjem (47) i (48) i rešavanjem po ΔZ_{NP} dobija se:

$$\Delta Z_{NP} = \frac{Q_{NP}^k - \varphi(Z_{NP}^k) + F_{NP}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial Z} \right)^k - E_{NP}}, \quad (49)$$

dok je na osnovu (44):

$$\Delta Q_{NP} = E_{NP} \cdot \Delta Z_{NP} + F_{NP}. \quad (50)$$

Izloženo pokazuje kako se uvode granični uslovi na nizvodnom kraju računске deonice i kako se računaju nepoznate ΔZ_{NP} i ΔQ_{NP} . Na osnovu vrednosti ovih priraštaja, kao i poznatih vrednosti koeficijenata L, M i N (koje su prethodno sračunate u prolazu unapred), računaju se primenom (45) i (44) vrednosti:

$$\Delta Z_{NP-1} = L_{NP-1} \cdot \Delta Z_{NP} + M_{NP-1} \cdot \Delta Q_{NP} + N_{NP-1} \quad (51)$$

$$\Delta Q_{NP-1} = E_{NP-1} \cdot \Delta Z_{NP-1} + F_{NP-1}, \quad (52)$$

a zatim idući „unazad” računaju se rekursivno sve ostale vrednosti ΔZ i ΔQ , do profila $i = 2$.

Na kraju se određuju vrednosti nepoznatih kota nivoa i protoka:

$$Z_i^{k+1} = Z_i^k + \Delta Z_i \quad (53)$$

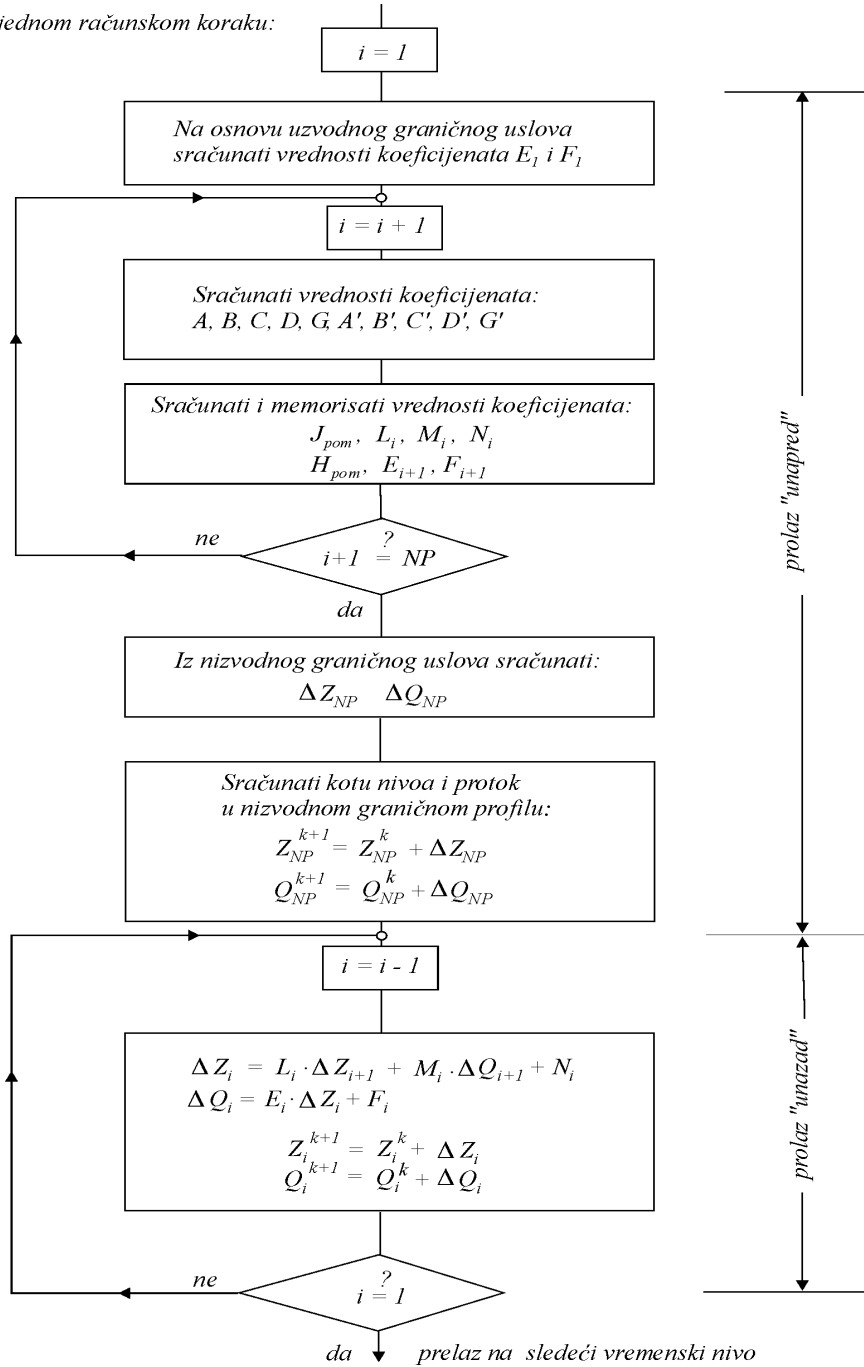
$$Q_i^{k+1} = Q_i^k + \Delta Q_i. \quad (54)$$

Blok shema algoritma Metode dvostrukog prolaza data je na Slici 2.

0.1.6 Odlike računske sheme

Implicitnu Preissmannovu računsku sheme odlikuje stabilnost i ekonomičnost, pa je postala standardna shema proračuna linijskog neustaljenog tečenja u velikim prirodnim vodotocima. Iako je bezuslovno stabilna (što znači da računski korak Δt nije ograničen Courantovim uslovom), treba ipak voditi računa da zbog linearizacije i obuhvatanja vrha ulaznog hidrograma taj korak ne bude previše velik.

U jednom računskom koraku:



Slika 2: Metoda dvostrukog prolaza.