0.1 Program Reke3T: Teorijske osnove

Koriste se jednačine linijskog neustaljenog tečenja napisane u *konzervativnom obliku*:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

gde je:

$$\boldsymbol{U} = \left\{ \begin{array}{c} A \\ Q \end{array} \right\}; \qquad \boldsymbol{F} = \left\{ \begin{array}{c} Q \\ \dfrac{Q^2}{A} + g\,A\,\hat{h} \end{array} \right\}; \qquad \boldsymbol{S} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -g\,(I_d - I_e) \end{array} \right\}. \tag{2}$$

Veličina $\hat{h}$ predstavlja odstojanje težišta poprečnog preseka do nivoa vodnog ogledala, a proizvod $A \cdot \hat{h}$, statički moment te površine u odnosu na nivo vode. Konzervativni oblik osnovnih jednačina se preporučuje jer smanjuje parazitske efekte numeričkog rešenja (numeričku difuziju i disperziju).

Za numeričko rešenje jednačina (1) u programu Reke3T primenjuju se dve eksplicitne računske sheme koje nose imena autora: Lax-Wendroff i MacCormack.

0.1.1 Računska shema Lax-Wendroff

Principi zamene izvoda konačnim razlikama izloženi su u tački 5.4.2.4, na str. 130 knjige. U vektorskom obliku, aproksimacija izvoda može se definisati ovim izrazima:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left\{ \boldsymbol{U}_i^{k+1} - \left[\theta \cdot \boldsymbol{U}_i^k + (1-\theta)\,\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{U}_{i+1}^k + \boldsymbol{U}_{i-1}^k) \right] \right\} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} \approx \frac{1}{2\,\Delta x} \left(\boldsymbol{F}_{i+1}^k - \boldsymbol{F}_{i-1}^k \right), \tag{4}$$

gde je $\theta \in (0,1)$ - težinski faktor. Vrednosti $\theta = 0$ odgovara tzv. „Laxova difuzivna shema”. Za vrednost $\theta = 1$ shema je nestabilna.

Zamenom u osnovnu jednačinu (1) dobija se:

$$\frac{1}{\Delta t}\left\{\boldsymbol{U}_i^{k+1}-\left[\theta\,\boldsymbol{U}_i^k+(1-\theta)\,\frac{1}{2}\,\left(\boldsymbol{U}_{i+1}^k+\boldsymbol{U}_{i-1}^k\right)\right]\right\}+ \tag{5}$$

$$+\frac{1}{2\,\Delta x}\,\left(\boldsymbol{F}_{i+1}^k-\boldsymbol{F}_{i-1}^k\right)+\boldsymbol{S}^*=\boldsymbol{O}, \tag{6}$$

ili,

$$\boldsymbol{U}_i^{k+1}=\theta\,\boldsymbol{U}_i^k+(1-\theta)\,\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}_{i+1}^k+\boldsymbol{U}_{i-1}^k\right)-\frac{\Delta t}{2\,\Delta x}\,\left(\boldsymbol{F}_{i+1}^k-\boldsymbol{F}_{i-1}^k\right)-\boldsymbol{S}^*\cdot\Delta t, \tag{7}$$

gde je:

$$\boldsymbol{S}^*=\frac{1}{2}\,\left(\boldsymbol{S}_{i+1}^k+\boldsymbol{S}_{i-1}^k\right). \tag{8}$$

U razvijenom obliku, vektorska jednačina (7) daje dve jednačine koje se eksplicitno rešavaju po porvršini A i protoku Q:

$$A_i^{k+1} = \theta\,A_i^k+(1-\theta)\,\frac{1}{2}\,\left(A_{i+1}^k+A_{i-1}^k\right)-\frac{\Delta t}{2\,\Delta x}\,\left(Q_{i+1}^k-Q_{i-1}^k\right) \tag{9}$$

$$Q_i^{k+1} = \theta\,Q_i^k+(1-\theta)\,\frac{1}{2}\,\left(Q_{i+1}^k+Q_{i-1}^k\right)- \tag{10}$$

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\left(Q^2/A+g\,A\,\hat{h}\right)_{i+1}^k-\left(Q^2/A+g\,A\,\hat{h}\right)_{i-1}^k\right]+ \tag{11}$$

$$+g\cdot\Delta t\cdot\frac{1}{2}\,\left\{\left[A\,(I_d-I_e)\right]_{i-1}^k+\left[A\,(I_d-I_e)\right]_{i+1}^k\right\} \tag{12}$$

Napisani izrazi važe za unutrašnje tačke računskog domena: $i=2,\ldots,N-1$, gde je N - broj profila. Na granicama se primenjuju granični uslovi o kojima će kasnije biti reči.

0.1.2 Računska shema MacCormack

Ova shema se zasniva na etapnom rešavanju, razdvajanjem operatora po vremenu na etape ,,predikor" i ,,korektor".

Etapa ,,prediktor". U ovoj etapi se izvodi zamenjuju konačnim razlikama na ovaj način:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} \approx \frac{\boldsymbol{U}_i^* - \boldsymbol{U}_i^k}{\Delta t} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} \approx \frac{\boldsymbol{F}_i^k - \boldsymbol{F}_{i-1}^k}{\Delta x}, \tag{14}$$

gde simbol ,,$*$" označava vrednosti koje se dobijaju kao rešenje u etapi ,,prediktor".

Zamenom u osnovni sistem jednačina (1) i sredjivanjem, dobija se:

$$\boldsymbol{U}_i^* = \boldsymbol{U}_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\boldsymbol{F}_i^k - \boldsymbol{F}_{i-1}^k\right) - \boldsymbol{S}_i^k\,\Delta t. \tag{15}$$

Rešenje $\boldsymbol{U}_i^*$ daje vrednosti A^* i $Q^* = (V \cdot A)^*$, odkle se računaju nepoznate V^* i h^*. To se obavlja za sve unutrašnje čvorove ($i = 2, \ldots, N-1$). Sa tako dobijenim vrednostima se prelazi u drugu etapu – ,,korektor" da bi se sračunale elementi vektora $\boldsymbol{F}^*$ i $\boldsymbol{S}^*$.

Etapa ,,korektor". U ovoj etapi se primenjuje aproksimacija:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} \approx \frac{\boldsymbol{U}_i^{**} - \boldsymbol{U}_i^k}{\Delta t} \tag{16}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} \approx \frac{\boldsymbol{F}_{i+1}^* - \boldsymbol{F}_i^*}{\Delta x}, \tag{17}$$

gde simbol ,,$**$" označava rešenje faze ,,korektor". Zamenom u osnovni sistem jednačina (1), pri čemu se uzima $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_i^*$, dobija se:

$$\boldsymbol{U}_i^{**} = \boldsymbol{U}_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\boldsymbol{F}_{i+1}^* - \boldsymbol{F}_i^*\right) - \boldsymbol{S}_i^* \cdot \Delta t. \tag{18}$$

Konačno rešenje je:

$$\boldsymbol{U}_i^{k+1} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}_i^{*} + \boldsymbol{U}_i^{**}\right). \tag{19}$$

0.1.3 Granični uslovi

Na uzvodnom i nizvodnom kraju računske deonice zadati granični uslovi kombinuju se sa jednačinama karakterisitka. Na uzvodnoj granici se koristi jednačina negativne karakteristike, a na nizvodnoj granici, jednačina pozitivne karakteristike (izrazi (5.50)-(5.55) na str. 122 knjige). Ovaj pristup ima za cilj da se greška u graničnim profilima ne prenosi unutar domena.

0.1.4 Uslov stabilnosti

Za stabilnost eksplicitnih računskih shema neophodno je da vrednost Kurantovog broja bude ograničena:

$$\mathrm{Cr} = \frac{|V| \pm c}{\Delta x/\Delta t} \leq 1. \tag{20}$$

To znači da računski korak po vremenu (Δt) zavisi od razmaka profila (Δx), brzine toka (V) i brzine prostiranja talasnog poremećaja (c), koja zavisi od dubine. Kako se brzina i dubina toka mogu značajno menjati tokom proračuna, može se pokazati da je neophodno smanjiti dužinu koraka Δt u skladu sa uslovom (20). Pri tome je poželjno da vrednost broja Cr bude što bliža jedinici. Ako je ova vrednost mnogo manja od jedan, onda korak Δt treba povećati da bi se smanjili efekti numeričke difuzije i povećala tačnost numeričkog rešenja.