УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

www@grf.bg.ac.rs

Студијски програм:

ГРАЂЕВИНАРСТВО ОСНОВНЕ АКАДЕМСКЕ СТУДИЈЕ 2014

Година/Семестар:

ДРУГА ГОДИНА/ТРЕЋИ СЕМЕСТАР

Назив предмета (шифра):

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 2 (Б2О2А2)

Наслов вежбе:

КРИВОЛИНИЈСКИ И ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛИ I

Београд, 2020.

КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ

КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ ПРВЕ ВРСТЕ

Дефиниција 1 За непрекидно пресликавање $\vec{r} : [a, b\,] \mapsto \mathbb{R}^3$, одређено са $\vec{r}(t) := (x(t), y(t), z(t))$, кажемо да је *крива* или *пут*.

а) Уколико је $\vec{r}$ једно $1-1$ пресликавање (различитим вредностима $t \in [a, b]$ одговарају различите тачке $\vec{r}(t)$) за криву кажемо да је *проста крива* или *лук*. Ако је $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, а остале тачке су међусобно различите за различите вредности параметра t, за пресликавање $\vec{r}$ кажемо да је *затворена проста крива*.

б) Ако је $\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ непрекидно пресликавање, то јест пресликавања x', y' и z' су пресликавања, тада за криву $\vec{r}$ кажемо да је *глатка*. Уколико је још и $\vec{r}\,'(t) \neq 0$ за свако $t \in (a, b)$ за $\vec{r}$ кажемо да је једна *регуларна крива*.

Дефиниција 2 *Криволинијски интеграл прве врсте* по кривој $\mathcal{C}$, која је дефинисана са $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ за $t \in [a, b\,]$, је одређен са

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\mathrm{d}s := \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Напомена 1 Нека је AB пут од тачке A до тачке B, а BA пут од тачке B до тачке A. Криволинијски интеграл прве врсте не зависи од пута, то јест

$$\int_{AB} f(x, y, z)\mathrm{d}s = \int_{BA} f(x, y, z)\mathrm{d}s.$$

Став 1 *Површина цилиндричне површи чија је директриса крива $\mathcal{C}$, а горња граница је дефинисана са $f : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$ износи*

$$P = \int_{\mathcal{C}} f\mathrm{d}s.$$

Задатак 1 Израчунати $\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s$, где је $\mathcal{C}$ завојница $x = \cos t, y = \sin t$ и $z = t$, за $t \in [0, 2\pi]$.

Решење Важе следеће једнакости

$$x'_t = -\sin t, \qquad y'_t = \cos t \qquad \text{и} \qquad z'_t = 1,$$

па је

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\mathrm{d}t.$$

Тражени криволинијски интеграл прве врсте је једнак

$$\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\,t^2\Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi^2.$$

Задатак 2 Ако је $\mathcal{C}$ део криве $y = \sqrt{x}$ од $x = 0$ до $x = 2$, израчунати $\int_{\mathcal{C}} y\mathrm{d}s$.

Решење Параметризација криве $\mathcal{C}$ гласи $x = t$ и $y = \sqrt{t}$, за $t \in [0, 2]$. Важе следеће једнакости

$$x'_t = 1 \qquad \text{и} \qquad y'_t = \frac{1}{2\sqrt{t}},$$

па је

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{1+4t}}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Тражени криволинијски интеграл прве врсте је једнак

$$\int_{\mathcal{C}} y\mathrm{d}s = \int_0^2 \sqrt{t}\,\frac{\sqrt{1+4t}}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+4t}\mathrm{d}t = \frac{13}{6}.$$

Задатак 3 Израчунати $\oint_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, где је $\mathcal{C}\,:\, x^2+y^2 = 4x$.

Решење Једнакост $x^2 + y^2 = 4x$ је еквивалентна са $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Према томе, параметризација криве $\mathcal{C}$ гласи

$$x = 2 + 2\cos t \qquad \text{и} \qquad y = 2\sin t,$$

за $t \in [0,\ 2\pi]$. Важе следеће једнакости

$$x'_t = -2\sin t \qquad \text{и} \qquad y'_t = 2\cos t,$$

па је

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}t.$$

Тражени криволинијски интеграл прве врсте једнак

$$\oint_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s = 2\int_0^{2\pi}\sqrt{8+8\cos t}\mathrm{d}t = 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}\mathrm{d}t = 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= 8\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t = 8\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t - 8\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 32.$$

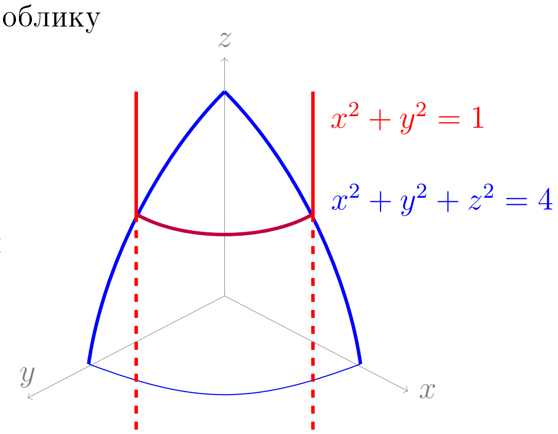
Задатак 4 Израчунати $\int_{\mathcal{C}} xyz\,\mathrm{d}s$, где је $\mathcal{C}$ део криве који се налази у пресеку сфере $x^2+y^2+z^2=4$ и цилиндра $x^2+y^2=1$ у првом октанту.

Решење Криву $\mathcal{C}$ можемо записати у облику

$$\begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \\ z &= \sqrt{3}, \end{aligned}$$

за $t\in[0,\pi/2]$, Важе следеће једнакости

$$\begin{aligned} x_t' &= -\sin t, \\ y_t' &= \cos t, \\ z_t' &= 0, \end{aligned}$$



Слика 1. Крива $\mathcal{C}$

па је

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+0}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}t.$$

тражени криволинијски интеграл прве врсте једнак

$$\int_{\mathcal{C}} xyz\,\mathrm{d}s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{3}\cos t\sin t\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задатак 5 Наћи површину дела цилиндра $x^2+y^2=4$ ограниченог равнима $z=0$ и $x+z=3$.

Решење Према ставу 1, имамо да је тражена површина једнака

$$P=\int_{\mathcal{C}} z\mathrm{d}s,$$

где је $\mathcal{C}$ пресечна крива цилиндра $x^2+y^2=4$ и xOy равни. Параметризација криве $\mathcal{C}$ је одређена са

$$x=2\cos t \qquad \text{и} \qquad y=2\sin t,$$

за $t\in[-\pi,\pi]$. Важе следеће једнакости

$$x_t'=-2\sin t \qquad \text{и} \qquad y_t'=2\cos t,$$

па је

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\mathrm{d}t=2\mathrm{d}t.$$

Тражена површина је једнака

$$P=\int_{-\pi}^{\pi}(3-2\cos t)\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\mathrm{d}t=4\int_0^{\pi}(3-2\cos t)\mathrm{d}t=12\pi.$$

КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ

Дефиниција 3 Посматрајмо пресликавања $P, Q, R : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$, где је $\mathcal{C}$ једна проста крива дефинисана са $\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t))$ за $t \in [a, b]$. *Криволинијски интеграл друге врсте* је одређен са

$$\int_{\mathcal{C}} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$= \int_a^b \big(P(\vec{r}(t))\, x'(t) + Q(\vec{r}(t))\, y'(t) + R(\vec{r}(t))\, z'(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Напомена 2 Нека је AB пут од тачке A до тачке B, а BA пут од тачке B до тачке A. Криволинијски интеграл друге врсте зависи од пута, то јест

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = -\int_{BA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

Уколико је крива $\mathcal{C}$ састављена од простих кривих $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ онда важи

$$\int_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2} + \cdots + \int_{\mathcal{C}_n}.$$

Посебно, ако је крива $\mathcal{C}$ затворена, за криволинијски инеграл друге врсте користимо ознаку $\oint_{\mathcal{C}}$.

Теорема 1 *Интеграл*

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

не зависи од путање AB већ само од крајњих тачака ако и само ако израз $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ представља диференцијал неке функције $u = u(x, y, z)$ дефинисане у некој области која садржи AB, то јест важи

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \qquad \textit{и} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Теорема 2 (Гринова формула) *Нека је D област ограничена део по део глатком кривом $\mathcal{C}$ и нека су функције $P, Q, \partial P/\partial y$ и $\partial Q/\partial x$ непрекидне у области D. Тада је*

$$\oint_{\mathcal{C}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Задатак 6 Израчунати $I = \int_{\mathcal{C}}(2-y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, где је $\mathcal{C}$ циклоида $x = t - \sin t$ и $y = 1 - \cos t$, за $t \in [0, 2\pi]$.

Решење Важе следеће једнакости

$$x'_t = 1 - \cos t \qquad \text{и} \qquad y'_t = \sin t,$$

па је криволинијски интеграл друге врсте једнак

$$I = \int_0^{2\pi} (2 - 1 + \cos t)(1 - \cos t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} (t - \sin t)\sin t\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} t \sin t\mathrm{d}t = -2\pi.$$

Задатак 7 Израчунати криволинијски интеграл $\oint_{\mathcal{C}^+} y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$, где је $\mathcal{C}$ елипса одређена са $9x^2 + y^2 = 9$.

Решење Параметризација елипсе $\mathcal{C}$ гласи

$$x = \cos t \qquad \text{и} \qquad y = 3\sin t,$$

за $t \in [0, 2\pi]$. Важе следеће једнакости

$$x'_t = -\sin t \qquad \text{и} \qquad y'_t = 3\cos t.$$

Приметимо да је орјентација траженог смера интеграције је усклађена са орјентацијом параметризације (оба смера су у смеру обрнутом од кретања сказаљке на сату), па је тражени криволинијски интеграл друге врсте једнак

$$\oint_{\mathcal{C}^+} y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = -3\int_0^{2\pi} \sin^2 t\mathrm{d}t - 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t\mathrm{d}t = -3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = -6\pi.$$

Задатак 8 Израчунати криволинијски интеграл $\oint_{\mathcal{C}^-} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, где је $\mathcal{C}$ круг одређен са $x^2 + y^2 = 8y$.

Решење Једначина криве $\mathcal{C}$ је еквивалентна са $x^2 + (y-4)^2 = 16$, па имамо да је параметризација круга $\mathcal{C}$ одређена са

$$x = 4\cos t \qquad \text{и} \qquad y = 4 + 4\sin t,$$

за $t \in [0, 2\pi]$. Важе следеће једнакости

$$x'_t = -4\sin t \qquad \text{и} \qquad y'_t = 4\cos t.$$

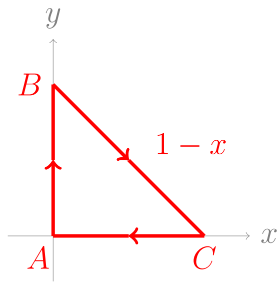
Тражени смер интеграције је негативан, то јест у смеру кретања сказаљке на сату, док је параметризација криве коју смо увели позитивна, то јест обрнута од смера кретања сказаљке на сату. Да бисмо ускладили наведене смерове потребно је ставити минус испред одговарајућег интеграла.

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}^-} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y &= -\left(4\int_0^{2\pi} (4 + 4\sin t)\sin t\mathrm{d}t + 16\int_0^{2\pi} \cos^2 t\mathrm{d}t\right) \\ &= -\int_0^{2\pi} (16\sin t + 16)\mathrm{d}t = (16\cos t - 16t)\Big|_0^{2\pi} = -32\pi.\end{aligned}$$

Задатак 9 Израчунати $I = \oint_{\mathcal{C}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$, где је $\mathcal{C}$ контура троугла са теменима $A(0,0)$, $B(0,1)$ и $C(1,0)$.

Решење Важи следећа једнакост

$$\begin{aligned} I = &\int_{AB}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y \\ &+ \int_{BC}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y \\ &+ \int_{CA}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$



Слика 2 Крива $\mathcal{C}$

Дуж AB се може параметризовати са $x=0, y=t$ за $t\in[0,1]$. Како је $x'_t=0$ и $y'_t=1$, важи

$$\int_{AB}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (0+t^2)0\mathrm{d}t + \int_0^1(0-t^2)1\mathrm{d}t = -\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}.$$

Дуж BC се може параметризовати са $x=t, y=1-t$ за $t\in[0,1]$. Како је $x'_t=1$ и $y'_t=-1$, важи

$$\begin{aligned} \int_{BC}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 (t^2+(1-t)^2)1\mathrm{d}t - \int_0^1 (t^2-(1-t)^2)1\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1(2t^2-4t+2)\mathrm{d}t = \left(\frac{2t^3}{3}-2t^2+2t\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Дуж CA се може параметризовати са $x=1-t, y=0$ за $t\in[0,1]$. Како је $x'_t=-1$ и $y'_t=0$, важи

$$\begin{aligned} \int_{CA}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y &= -\int_0^1((1-t)^2+0^2)1\mathrm{d}t + \int_0^1((1-t)^2-0)0\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^1(1-2t+t^2)\mathrm{d}t = -\left(t-t^2+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

На крају, тражена вредност криволинијског интеграла друге врсте је једнака

$$\oint_{\mathcal{C}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3} = 0.$$

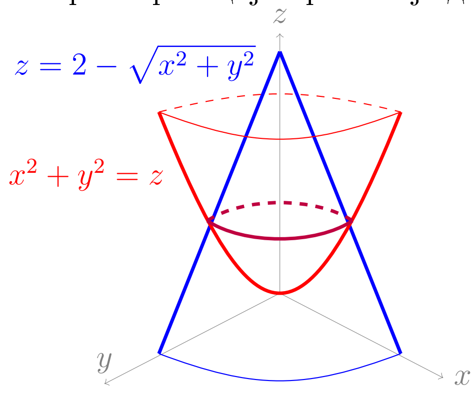
Задатак 10 Израчунати $I = \oint_{\mathcal{C}}(y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$, где је $\mathcal{C}$ крива која се налази у пресеку $z=x^2+y^2$ и $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ оријентисана позитивно гледано из тачке $(0,0,2)$.

Решење Приметимо да из $z = x^2+y^2$ и $z = 2-\sqrt{x^2+y^2}$ следи да је $z = 2-\sqrt{z}$, то јест $(z-2)^2 = z$. Посматрана једначина је еквивалентна са $z^2 - 5z + 4 = 0$, то јест $(z-1)(z-4) = 0$. Како за $z = 4$ једнакост $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ нема реалних решења, закључујемо да је $z = 1$. Параметризација криве $\mathcal{C}$ је дата са

$$\begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \\ z &= 1, \end{aligned}$$

за $t \in [-\pi, \pi]$. Важе следеће једнакости

$$\begin{aligned} x'_t &= -\sin t, \\ y'_t &= \cos t, \\ z'_t &= 0, \end{aligned}$$



Слика 3 Крива $\mathcal{C}$

па је тражени криволинијски интеграл друге врсте једнак

$$\begin{aligned} I &= -\int_{-\pi}^{\pi} (\sin t + 1)\sin t dt + \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos t)\cos t dt + \int_{-\pi}^{\pi} 0 dt \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt + \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin^2 t + \cos t + \cos^2 t) dt \end{aligned}$$

Пошто је $\sin t$ непарна, а $-\sin^2 t + \cos t + \cos^2 t$ парна функција на симетричном интервалу $[-\pi, \pi]$, добијамо следећу једнакост

$$I = 2\int_0^{\pi} (-1 + \cos t + 2\cos^2 t) dt = 2\int_0^{\pi} (\cos t + \cos 2t) dt = 0.$$

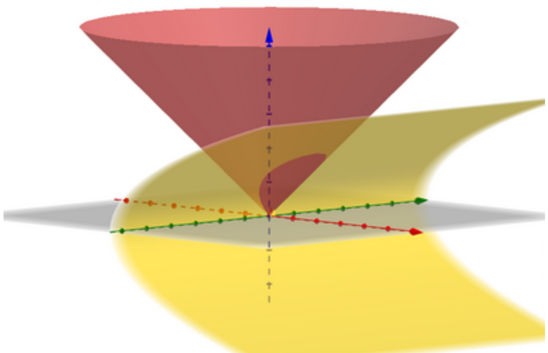
Задатак 11 Израчунати $I = \oint_{\mathcal{C}} (y^2 - x^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z$, где је $\mathcal{C}$ крива која се налази у пресеку површи $z = \sqrt{x^2+y^2}$ и $z^2 = 2x$.

Решење Утврдимо да из $z = \sqrt{x^2+y^2}$ и $z^2 = 2x$ следи да је $x^2 + y^2 = 2x$, то јест $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Параметризација криве $\mathcal{C}$ гласи

$$\begin{aligned} x &= 1 + \cos t, \\ y &= \sin t, \\ z &= \sqrt{2 + 2\cos t}, \end{aligned}$$

за $t \in [-\pi, \pi]$. Важе следеће једнакости

$$\begin{aligned} x'_t &= -\sin t, \\ y'_t &= +\cos t, \\ z'_t &= -\frac{\sin t}{\sqrt{2+2\cos t}}. \end{aligned}$$



Слика 4 Крива $\mathcal{C}$

Криволинијски интеграл друге врсте је једнак

$$
\begin{aligned}
I = &-\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin^2 t - (1+\cos t)^2\right) \sin t \, \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 + 2\cos t - (1+\cos t)^2\right) \cos t \, \mathrm{d}t \\
&- \int_{-\pi}^{\pi} \left((1+\cos t)^2 - \sin^2 t\right) \frac{\sin t}{\sqrt{2+2\cos t}} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Подинтегралне функције у првом и трећем интегралу су непарне на интервалу $[-\pi, \pi]$, па важи следећа једнакост

$$
I = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 t) \cos t \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos t \mathrm{d}t = 0.
$$

Задатак 12 Израчунати $\oint_{\mathcal{C}} x^2 y \mathrm{d}x - xy^2 \mathrm{d}y$, где је $\mathcal{C}$ позитивно орјентисана кружница $x^2 + y^2 = 4$.

Решење Користећи Гринову формулу, добијамо да је

$$
\oint_{\mathcal{C}} x^2 y \mathrm{d}x - xy^2 \mathrm{d}y = \iint_D \left((-xy^2)'_x - (x^2 y)'_y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left(-y^2 - x^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,
$$

где је D унутрашњост криве $\mathcal{C}$, то јест круг $x^2 + y^2 \leq 4$. Уводећи поларне координате $x = \rho \cos\phi$ и $y = \rho \sin\phi$, за $\rho \in [0, 2]$ и $\phi \in [-\pi, \pi]$, добијамо

$$
\oint_{\mathcal{C}} x^2 y \mathrm{d}x - xy^2 \mathrm{d}y = -\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^2 \rho^3 \mathrm{d}\rho\right) \mathrm{d}\phi = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^2 \mathrm{d}\phi = -\int_{-\pi}^{\pi} 4 \, \mathrm{d}\phi = -8\pi.
$$

Задатак 13 Израчунати $I = \oint_{\mathcal{C}} e^x (1 - \cos y) \mathrm{d}x - e^x (y - \sin y) \mathrm{d}y$, где је $\mathcal{C}$ контура позитивне орјентације која ограничава област

$$
D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < x < \pi \quad \text{и} \quad 0 < y < \sin x\}.
$$

Решење Користећи Гринову формулу, добијамо да је

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \left((-e^x (y - \sin y))'_x - (e^x (1 - \cos y))'_y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D y e^x \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\int_0^{\pi} \left(e^x \int_0^{\sin x} y \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x \mathrm{d}x = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} e^x (1 - \cos 2x) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{e^x}{4} \left(1 - \frac{\cos 2x + 2 \sin 2x}{5}\right)\bigg|_0^{\pi} = -\frac{e^{\pi} - 1}{5}.
\end{aligned}
$$

ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ

ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ПРВЕ ВРСТЕ

Дефиниција 4 За непрекидно пресликавање $\vec{r} : D \mapsto \mathbb{R}^3$, одређено са $\vec{r}(u,v) := (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, кажемо да је *површ*.

а) Уколико су функције x', y' и z' непрекидне на $D \subseteq \mathbb{R}^2$, за површ кажемо да је *глатка*.

б) Параметризација $\vec{r}(u,v)$ је *регуларна* ако је $\|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'\| \neq 0$, где је $\vec{r}_u' = (x_u'(u,v), y_u'(u,v), z_u'(u,v))$ и $\vec{r}_v' = (x_v'(u,v), y_v'(u,v), z_v'(u,v))$.

Дефиниција 5 *Површински интеграл прве врсте* по површи Γ, која је дефинисана са $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ за $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, је одређен са

$$\iint_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma := \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'\| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Уколико је површ Γ одређена са $z = z(x,y)$, *вектор нормале* је дефинисан са

$$\vec{n}_\Gamma = (-z_x', -z_y', 1)$$

и важи следећа једнакост

$$\boxed{\iint_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma := \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x'(x,y) + z_y'(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.}$$

Напомена 3 Површински интеграл прве врсте $\iint_\Gamma$ не зависи од оријентације површи Γ.

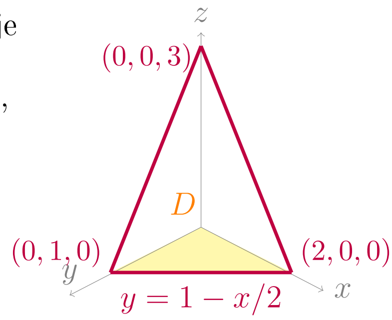
Задатак 14 Израчунати $\iint_\Gamma (x+2y-z)\mathrm{d}\sigma$, где је Γ део равни $3x+6y+2z=6$ у првом октанту.

Решење Пројекција површи Γ на xOy раван је

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2 \ \text{ и } \ 0\le y\le 1-x/2\},$$

док је једначина површи Γ одређена са $z=3-3x/2-3y$. Вектор нормале на ову површ гласи

$$(-z'_x,\ -z'_y,\ 1) = (3/2,\ 3,\ 1),$$



Слика 5 Површ Γ

па је

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{(z'_x)^2+(z'_y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{9}{4}+9+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{7}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Важи следећа једнакост

$$I = \frac{7}{2}\iint_D (x+2y-(3-\frac{3}{2}x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{7}{2}\int_0^2\left(\int_0^{1-x/2}(\frac{5}{2}x+5y-3)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{6}.$$

Задатак 15 Израчунати $\iint_\Gamma (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$, где је Γ део параболоида $z=x^2+y^2$ за који је $z\le 1$.

Решење Пројекција површи Γ на xOy раван јесте круг $x^2+y^2=1$, док је једначина површи Γ одређена са $z=x^2+y^2$. Вектор нормале на ову површ гласи

$$(-z'_x,\ -z'_y,\ 1) = (-2x,\ -2y,\ 1),$$

па је

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{(z'_x)^2+(z'_y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{4x^2+4y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Важи следећа једнакост

$$I = \iint_\Gamma (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \iint_D (x^2+y^2)\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Уводећи поларне координате

$$x=\rho\cos\phi \qquad \text{и} \qquad y=\rho\sin\phi,$$

за $\rho\in[0,1]$ и $\phi\in[-\pi,\pi]$, добијамо

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \rho^2\sqrt{4\rho^2+1}\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{120}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sqrt{4\rho^2+1}^3(6\rho^2-1)\right)\Big|_0^1\mathrm{d}\phi$$
$$= \frac{1}{120}\int_{-\pi}^{\pi}(1+25\sqrt{5})\mathrm{d}\phi = \frac{1+25\sqrt{5}}{60}\pi.$$

Задатак 16 Израчунати $\iint_\Gamma \sqrt{4-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$, где је Γ део конуса $z^2 = x^2+y^2$, између равни $z=0$ и $z=2$.

Решење Пројекција површи Γ на xOy раван јесте круг $x^2+y^2=4$, док је једначина површи Γ одређена са $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Вектор нормале на ову површ гласи

$$\vec{n}_\Gamma = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right),$$

па је

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{(z'_x)^2+(z'_y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Важи следећа једнакост

$$I = \iint_\Gamma \sqrt{4-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Уводећи поларне координате

$$x=\rho\cos\phi \qquad \text{и} \qquad y=\rho\sin\phi,$$

за $\rho\in[0,2]$ и $\phi\in[-\pi,\pi]$, добијамо

$$I=\sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^2\sqrt{4-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi = \frac{8\sqrt{2}}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\phi = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi.$$

Задатак 17 Израчунати $\iint_\Gamma \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}\sigma$, где је Γ део конуса $z^2 = x^2+y^2$, између равни $z=0$ и $z=2$.

Решење Пројекција површи Γ на xOy раван јесте круг $x^2+y^2=4$, док је једначина површи Γ одређена са $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Вектор нормале на ову површ гласи

$$\vec{n}_\Gamma = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right),$$

па је

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{(z'_x)^2+(z'_y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Важи следећа једнакост

$$I=\iint_\Gamma\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\iint_D\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$=2\sqrt{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\mathrm{d}x = \frac{64\sqrt{2}}{3}.$$

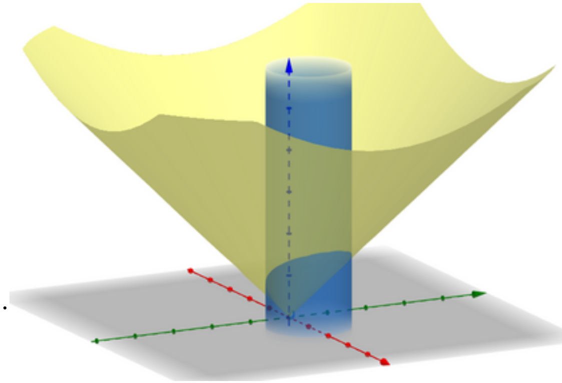
Задатак 18 Израчунати $\iint_\Gamma (xy+yz+zx)\mathrm{d}\sigma$, где је Γ део конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ унутар цилиндра $x^2+y^2=x$.

Решење Пројекција површи Γ на xOy раван јесте круг $x^2+y^2=x$, то јест $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$, док је једначина површи Γ одређена са $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Вектор нормале на ову површ гласи

$$\vec{n}_\Gamma = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right),$$

па је

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{(z'_x)^2+(z'_y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



Слика 6 Површ Γ

Важи следећа једнакост

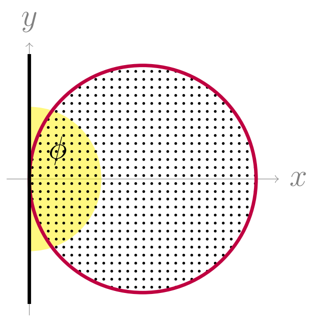
$$I = \iint_\Gamma (xy+yz+zx)\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\iint_D \left(xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Уводећи поларне координате

$$\begin{aligned} x'_t &= \rho\cos t, \\ y'_t &= \rho\sin t, \end{aligned}$$

израз $x^2+y^2 \le x$ се трансформише у $\rho^2 \le \rho\cos\phi$, то јест $\rho \le \cos\phi$. Према томе, важи

$$D = \{(\rho,\phi) : \rho\in[0,\cos\phi], \phi\in[-\pi/2,\pi/2]\}.$$



Слика 7 Област D

Тражени интеграл је једнак

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos\phi}(\rho^2\cos\phi\sin\phi+\rho^2(\cos\phi+\sin\phi))\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\phi\sin\phi+\cos\phi+\sin\phi)\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\cos\phi}\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos^5\phi\sin\phi+\cos^5\phi+\sin\phi\cos^4\phi\right)\mathrm{d}\phi = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$