УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

www@grf.bg.ac.rs

---

Студијски програм:

ГРАЂЕВИНАРСТВО ОСНОВНЕ АКАДЕМСКЕ СТУДИЈЕ 2014

Година/Семестар:

ДРУГА ГОДИНА/ТРЕЋИ СЕМЕСТАР

Назив предмета (шифра):

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 2 (Б2О2А2)

Наслов вежбе:

# КРИВОЛИНИЈСКИ И ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛИ II

---

Београд, 2020.

# ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ

## ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ

**Дефиниција 1** Посматрајмо пресликавања $P, Q, R : \Gamma \mapsto \mathbb{R}^2$, где је $\Gamma$ једна проста крива одређена функцијом $z(x, y)$. *Површински интеграл друге врсте* је одређен са

$$\iint_\Gamma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (P,\, Q,\, R) \circ \big(-z'_x,\, -z'_y,\, 1\big)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

где је $D$ пројекција површи $\Gamma$ на $xOy$ раван.

**Напомена 1** Површински интеграл прве врсте $\iint_\Gamma$ зависи од оријентације површи $\Gamma$, то јест

$$\iint_{\Gamma^-} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\Gamma^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

где је $\Gamma^+$ спољна, а $\Gamma^-$ унутрашња страна површи $\Gamma$.

Ако је површ $\Gamma$ затворена, за површински интеграл друге врсте користимо ознаку $\oiint_\Gamma$.

**Напомена 2** Вектор нормале површи $\Gamma$ је окренут ка позитивном делу $z-$осе.

**Задатак 1** Израчунати $I = \iint_\Gamma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ако је $\Gamma$ горњи део равни $x + y + z = 1$ исечен координатним равнима.

**Решење** Пројекција површи $\Gamma$ на $xOy$ раван се може описати са

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1 \ \text{ и } \ 0 \le y \le 1 - x\},$$

док је функција по којој се интеграли $z = 1 - x - y$. Вектор нормале на ову површ гласи

$$(-z'_x,\, -z'_y,\, 1) \;=\; (1,\, 1,\, 1).$$

Важи следећа једнакост

$$I = \iint_D (x, y, 1 - x - y) \circ (1, 1, 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

**Задатак 2** Израчунати интеграл $I = \iint_\Gamma xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где је $\Gamma$ спољна страна сфере $x^2+y^2+z^2=4$, за $x\geq 0$ и $y \geq 0$.

**Решење** Површ $\Gamma$ се састоји од две површи

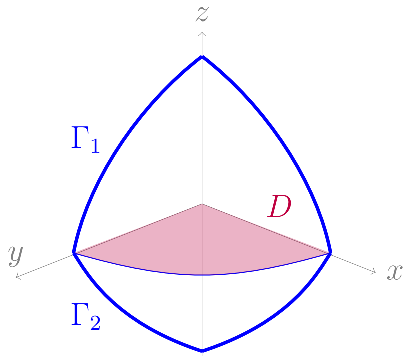
$$\Gamma_1 : z = +\sqrt{4-x^2-y^2}$$

и

$$\Gamma_2 : z = -\sqrt{4-x^2+y^2},$$

а одговрајућа пројекција је

$$D = \{(\rho,\phi) \,:\, 0 \leq \phi \leq \pi/2,\, 0\leq \rho \leq 2\}.$$



**Слика 1**. Површ $\Gamma$

Површ $\Gamma_2$ је окренута ка негативном делу $z-$осе, другим речима супротно од вектора нормале који је увек окренут ка позитивном делу $z-$осе, па је стога потребно ставити минус испред другог интеграла.

Вектор нормале на површ $\Gamma_1$ гласи

$$(-z'_x,\, -z'_y,\, 1) \;=\; \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\, 1\right),$$

док је вектор нормалне на површ $\Gamma_2$

$$(-z'_x,\, -z'_y,\, 1) \;=\; \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\, -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\, 1\right).$$

Важи следећа једнакост

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Gamma_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Gamma_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left(0,0,xy\sqrt{4-x^2-y^2}\right) \circ \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&- \iint_D \left(0,0,-xy\sqrt{4-x^2-y^2}\right) \circ \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\iint_D xy\sqrt{4-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^2 \cos\phi\sin\phi\rho^3\sqrt{4-\rho^2}\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{128}{15}\int_0^{\pi/2}\cos\phi\sin\phi\mathrm{d}\phi = \frac{64}{15}.
\end{aligned}$$

**Задатак 3** Израчунати $\iint_\Gamma (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где је $\Gamma$ спољна страна тела ограниченог са $z = x^2 + y^2$ и $z = 9$.

**Решење** Површ $\Gamma$ се састоји од две површи

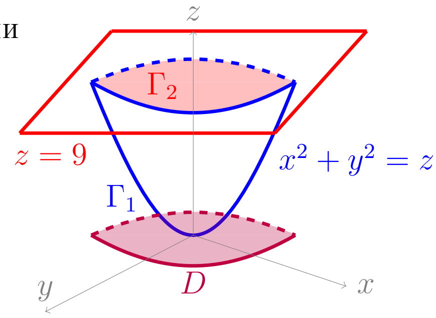
$$\Gamma_1 : z = x^2 + y^2$$

и

$$\Gamma_2 : z = 9,$$

а одговрајућа пројекција је

$$D = \{(\rho, \phi) \, : -\pi \le \phi \le \pi, \, 0 \le \rho \le 3\}.$$



**Слика 2** Тело $T$.

Површ $\Gamma_1$ је окренута ка негативном делу $z-$осе, другим речима супротно од вектора нормале који је увек окренут ка позитивном делу $z-$осе, па је стога потребно ставити минус испред другог интеграла.

$$\begin{aligned} I = I_1 + I_2 = &\iint_{\Gamma_1} (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &+ \iint_{\Gamma_2} (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Вектор нормале на површ $\Gamma_1$ гласи $\left(-z'_x, \, -z'_y, \, 1\right) = \left(-2x, \, -2y, \, 1\right)$, па важи следећа једнакост

$$\begin{aligned} I_1 &= -\iint_D \left(y - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - x, x - y\right) \circ (-2x, -2y, 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iint_D (x-y)(1 + 2(x^2+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^3 (\cos\phi - \sin\phi)(1 + 2\rho^2)\rho^2 \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{288}{5} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x - \sin x)\mathrm{d}\phi = 0. \end{aligned}$$

Вектор нормале на површ $\Gamma_2$ гласи $\left(-z'_x, \, -z'_y, \, 1\right) = \left(0, \, 0, \, 1\right)$, па важи следећа једнакост

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_D (y - 9, 9 - x, x - y) \circ (0, 0, 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^3 (\cos x - \sin x)\rho^2 \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\phi = 9 \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

На крају, добијамо да је тражени површински интеграл друге врсте једнак

$$I = I_1 + I_2 = 0.$$

**Задатак 4** Израчунати $\iint_\Gamma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + y^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где је $\Gamma$ спољна страна површи $|z| = x^2 + y^2$ коју исеца цилиндар $x^2 + y^2 = 1$.

**Решење** Површ $\Gamma$ се састоји од две површи

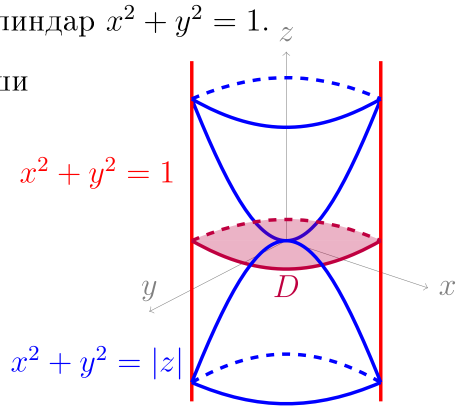
$$\Gamma_1 : z = +x^2 + y^2$$

и

$$\Gamma_2 : z = -x^2 - y^2,$$

а одговрајућа пројекција је

$$D = \{(\rho, \phi) \,:\, -\pi \le \phi \le \pi,\, 0 \le \rho \le 1\}.$$




**Слика 3** Тело $T$.

Површ $\Gamma_2$ је окренута ка негативном делу $z-$осе, другим речима супротно од вектора нормале који је увек окренут ка позитивном делу $z-$осе, па је стога потребно ставити минус испред другог интеграла.

$$I = I_1 + I_2 = \iint_{\Gamma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + y^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Gamma_2} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + y^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Вектор нормале на површ $\Gamma_1$ гласи $(-z'_x,\, -z'_y,\, 1) = (-2x,\, -2y,\, 1)$, па важи следећа једнакост

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_D (x(x^2+y^2), y(x^2+y^2), y^2(x^2+y^2)^2) \circ (-2x, -2y, 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D (y^2-2)(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 (\rho^2\cos^2\phi - 2)\rho^5\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{8}\cos^2\phi - \frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{24}\pi. \end{aligned}$$

Вектор нормале на површ $\Gamma_2$ гласи $(-z'_x,\, -z'_y,\, 1) = (2x,\, 2y,\, 1)$, па важи следећа једнакост

$$\begin{aligned} I_2 &= -\iint_D (-x(x^2+y^2), -y(x^2+y^2), y^2(x^2+y^2)^2) \circ (2x, 2y, 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iint_D (y^2-2)(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 (\rho^2\cos^2\phi - 2)\rho^5\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{8}\cos^2\phi - \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{24}\pi. \end{aligned}$$

На крају, добијамо да је тражени површински интеграл друге врсте једнак

$$I = I_1 + I_2 = 0.$$

# ФОРМУЛЕ СТОКСА И ГАУС–ОСТРОГРАДСКОГ

**Дефиниција 2** За површ $\Gamma$ кажемо да је *елементарна* ако и само ако има једнозначно представљање

$$z = f(x,y), \qquad y = g(x,z) \qquad и \qquad x = h(y,z),$$

где су $f, g$ и $h$ непрекидне функције.

**Теорема 1 (Формула Стокса)** *Претпоставимо да се површ $\Gamma$ може поделити на коначно много елементарних површи и да је крива $\mathcal{C}$ руб површи $\Gamma$. Уколико су функције $P$, $Q$ и $R$ и њихови парцијални изводи непрекидне функције на области која садржи $\Gamma$ и $\mathcal{C}$, тада важи*

$$\int_{\mathcal{C}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Gamma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

**Дефиниција 3** За тело $T$ кажемо да је *елементарно* ако и само ако се може приказати у облику

$$\begin{aligned} T &= \{(x,y,z) : f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y) \text{ за } (x,y) \in D_1\}, \\ T &= \{(x,y,z) : g_1(x,z) \leq y \leq g_2(x,z) \text{ за } (x,z) \in D_2\}, \\ T &= \{(x,y,z) : h_1(y,z) \leq x \leq h_2(y,z) \text{ за } (y,z) \in D_3\}, \end{aligned}$$

где су $f_1$, $f_2$, $g_1$, $g_2$, $h_1$ и $h_2$ непрекидне функције.

**Теорема 2 (Формула Гаус–Остроградског)** *Претпоставимо да се $T$ може поделити на коначно много елементарних тела и да је површ $\Gamma$ граница тела $T$. Уколико су функције $P$, $Q$ и $R$ и њихови парцијални изводи непрекидне функције на области која садржи $T$ и $\Gamma$, тада важи*

$$\iint_{\Gamma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{T} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

**Задатак 5** Израчунати $\oint_{\mathcal{C}}(x^2-y^2-z^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y+2xz\mathrm{d}z$, где је $\mathcal{C}$ пресечна крива површи $z=x^2+y^2$ и $x+y+z=1$.

**Решење** Крива $\mathcal{C}$ је руб површи $\Gamma$, дела површи $z=1-x-y$ чија је пројекција унутрашњост круга $x^2+y^2+x+y\leq 1$. Применом Стоксове формуле добијамо

$$I=\oint_{\mathcal{C}}(x^2-y^2-z^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y+2xz\mathrm{d}z=\iint_{\Gamma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2-y^2-z^2 & 2xy & 2xz\end{vmatrix},$$

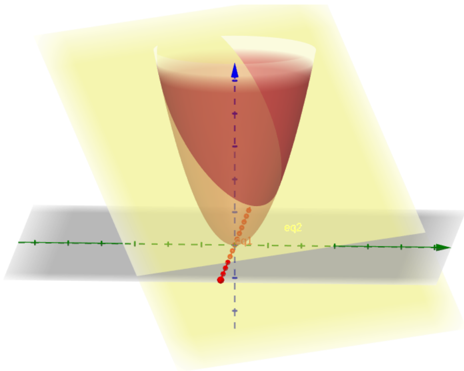
одакле произилази да је

$$I=\iint_{\Gamma}0\mathrm{d}y\mathrm{d}z-4z\mathrm{d}x\mathrm{d}z+4y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Вектор нормале површи $\Gamma$ гласи

$$(-z'_x,\,-z'_y,\,1)\;=\;(1,\,1,\,1)\,,$$

па је површински интеграл друге врсте једнак




**Слика 4** Површ $\Gamma$

$$I=\iint_D(0,-4(1-x-y),4y)\circ(1,1,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(-4+4x+8y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Област $D$ је скуп тачака $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{3}{2}\right\}$, то јест

$$x=\rho\cos\phi-\frac{1}{2}\qquad\text{и}\qquad y=\rho\sin\phi-\frac{1}{2},$$

за $\rho\in[0,\sqrt{3/2}]$ и $\phi\in[-\pi,\pi]$. Важи следећа једнакост

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\sqrt{3/2}}(-10+4\rho\cos\phi+8\rho\sin\phi)\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\left(-5\rho^2+\frac{4}{3}\rho^3\cos\phi+\frac{8}{3}\rho^3\sin\phi\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3/2}}\mathrm{d}\phi\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\sqrt{\frac{3}{2}}(\cos\phi+2\sin\phi)-\frac{15}{2}\right)\mathrm{d}\phi=-15\pi.\end{aligned}$$

**Задатак 6** Израчунати $\oint_{\mathcal{C}} y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$, где је $\mathcal{C}$ пресечна крива површи $2x+4y = x^2+4y^2$ и $x^2+4y^2 = z$.

**Решење** Крива $\mathcal{C}$ је руб површи $\Gamma$, дела површи $z = x^2+4y^2$ чија је пројекција унутрашњост елипсе $2x+4y = x^2+4y^2$.
Применом Стоксове формуле добијамо

$$I = \oint_{\mathcal{C}} y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = \iint_{\Gamma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & z \end{vmatrix},$$

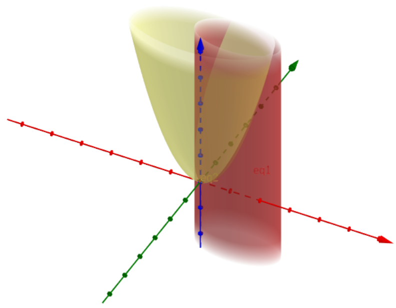
одакле произилази да је

$$I = \iint_{\Gamma} 0\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 0\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (2x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Вектор нормале површи $\Gamma$ гласи

$$(-z'_x,\, -z'_y,\, 1) = (-2x,\, -8y,\, 1),$$

па је површински интеграл друге врсте једнак



**Слика 5** Површ $\Gamma$

$$I = \iint_D (0,0,2x-1)\circ(-2x,-8y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (2x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Област $D$ је скуп тачака $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 4(y-\frac{1}{2})^2 \le 2\}$, то јест

$$x = \rho\cos\phi + 1 \qquad \text{и} \qquad y = \frac{1}{2}\rho\sin\phi + \frac{1}{2},$$

за $\rho\in[0,\sqrt{2}]$ и $\phi\in[-\pi,\pi]$. Одговарајући Јакобијан износи

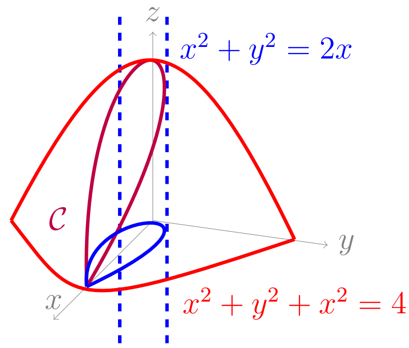
$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\phi \\ y'_\rho & y'_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \frac{1}{2}\sin\phi & \frac{1}{2}\rho\cos\phi \end{vmatrix} = \frac{\rho}{2}.$$

Важи следећа једнакост

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho\cos\phi+1)\frac{\rho}{2}\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\rho^3}{3}\cos\phi + \frac{\rho^2}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}\phi$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\phi + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\phi = \pi.$$

**Задатак 7** Израчунати $\oint_{\mathcal{C}}(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z$, где је $\mathcal{C}$ пресечна крива површи $x^2+y^2+z^2=4$ и $x^2+y^2=2x$, орјентисана позитивно ако се посматра са позитивног дела $z-$осе.

**Решење** Крива $\mathcal{C}$ је руб површи $\Gamma$, горњег дела сфере $x^2+y^2+z^2=4$ чија је пројекција унутрашњост круга $(x-1)^2+y^2\leq 1$.




**Слика 6** Крива $\mathcal{C}$

Применом Стоксове формуле добијамо

$$I=\oint_{\mathcal{C}}(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z$$
$$=\iint_{\Gamma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & y^2-x^2\end{vmatrix},$$

одакле произилази да је

$$I=\iint_{\Gamma}2(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+2(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Вектор нормале површи $\Gamma$ гласи

$$(-z'_x,\,-z'_y,\,1)\;=\;\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\,\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\,1\right),$$

па је одговарајући површински интеграл друге врсте једнак

$$I=\iint_D\left(2y-2\sqrt{4-x^2-y^2},2\sqrt{4-x^2-y^2}+2x,2x-2y\right)$$
$$\circ\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{4xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Област $D$ је скуп тачака $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-1)^2+y^2\leq 1\}$, то јест

$$x=\rho\cos\phi\qquad\text{и}\qquad y=\rho\sin\phi,$$

за $\rho\in[0,2\cos\phi]$ и $\phi\in[-\pi/2,\pi/2]$. Важи следећа једнакост

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{4\cos\phi}\left(\frac{4\rho^2\cos\phi\sin\phi}{\sqrt{4-\rho^2}}\right)\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi$$
$$=-\frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi\sin\phi\left(\sqrt{4-\rho^2}(\rho^2+8)\right)\Big|_0^{2\cos\phi}$$
$$=-\frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi\sin\phi\left(|\sin\phi|(4\cos^2\phi+8)-16\right)=0.$$

**Задатак 8** Израчунати $\oint_{\mathcal{C}} -yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$, где је $\mathcal{C}$ пресечна крива површи $z = 4 - x^2 - y^2$ и $x^2 + y^2 = 2x$, орјентисана позитивно ако се посматра са позитивног дела $z-$осе.

**Решење** Крива $\mathcal{C}$ је руб површи $\Gamma$, горњег дела параболоида $z = 4 - x^2 - y^2$ чија је пројекција унутрашњост круга $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Применом Стоксове формуле добијамо

$$I = \oint_{\mathcal{C}} -yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z = \iint_{\Gamma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yz & xz & x+y \end{vmatrix},$$

одакле следи да је

$$I = \iint_{\Gamma} (1-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (-1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Вектор нормале површи $\Gamma$ гласи $(-z'_x,\, -z'_y,\, 1) = (2x,\, 2y,\, 1)$, па је

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D} (1-x, -1-y, 2(4-x^2-y^2)) \circ (2x, 2y, 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D} (8 + 2x - 2y - 4x^2 - 4y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Област $D$ је скуп тачака $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$, то јест

$$x = 1 + \rho\cos\phi \qquad \text{и} \qquad y = \rho\sin\phi,$$

за $\rho \in [0,1]$ и $\phi \in [-\pi, \pi]$. Важи следећа једнакост

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^1 \left(6 - 6\rho\cos\phi - 2\rho\sin\phi - 4\rho^2\right) \rho\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\phi = 4\pi.$$

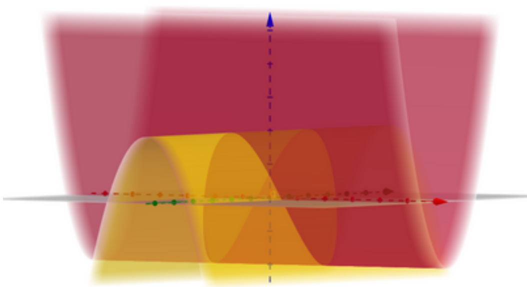
**Задатак 9** Израчунати $\oint_{\mathcal{C}} (x+yz)\mathrm{d}x + (y+xz)\mathrm{d}y + (z+xy)\mathrm{d}z$, где је $\mathcal{C}$ пресечна крива површи $z = y^2 - 2$ и $z = 2 - x^2$.

**Решење** Крива $\mathcal{C}$ је руб површи $\Gamma$, дела површи $z = 2 - x^2$ чија је пројекција унутрашњост круга $x^2 + y^2 \leq 4$. Применом Стоксове формуле добијамо

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\mathcal{C}} (x+yz)\mathrm{d}x + (y+xz)\mathrm{d}y + (z+xy)\mathrm{d}z \\ &= \iint_{\Gamma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+yz & y+xz & z+xy \end{vmatrix} \end{aligned}$$

одакле следи да је

$$I = \iint_{\Gamma} 0\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 0\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$



**Слика 7** Површ $\Gamma$

**Задатак 10** Израчунати $\oiint_\Gamma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где је $\Gamma$ спољна страна коцке $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ и $0\le z\le 1$.

**Решење** Пошто је површ $\Gamma$ је спољна страна коцке $T$, применом формуле Гаус−Остроградског добијамо

$$I=\oiint_\Gamma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_T\left((x^2)'_x+(y^2)'_y+(z^2)'_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Важи следећа једнакост

$$\begin{aligned}I&=2\iiint_T(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^1(x+y+z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1\left(\int_0^1\left(x+y+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=2\int_0^1(x+1)\,\mathrm{d}x=3.\end{aligned}$$

**Задатак 11** Израчунати $\oiint_\Gamma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где је $\Gamma$ спољна страна сфере $x^2+y^2+z^2=1$.

**Решење** Пошто је површ $\Gamma$ је спољна страна сфере $T$, применом формуле Гаус−Остроградског добијамо

$$I=\oiint_\Gamma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_T\left((x^3)'_x+(y^3)'_y+(z^3)'_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

одакле произилази да је

$$I=3\iiint_T(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Тело $T$ је скуп тачака

$$x=\rho\cos\phi\cos\psi,\qquad y=\rho\cos\phi\sin\psi\qquad\text{и}\qquad z=\rho\sin\phi,$$

за $0\le\rho<1$, $-\pi/2<\phi<\pi/2$ и $-\pi\le\psi\le\pi$. Важи следећа једнакост

$$\begin{aligned}I&=3\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^1\rho^4\cos\phi\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}\psi=3\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{5}\cos\phi\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}\psi\\&=\frac{3}{5}\int_{-\pi}^{\pi}2\mathrm{d}\psi=\frac{12}{5}\pi.\end{aligned}$$

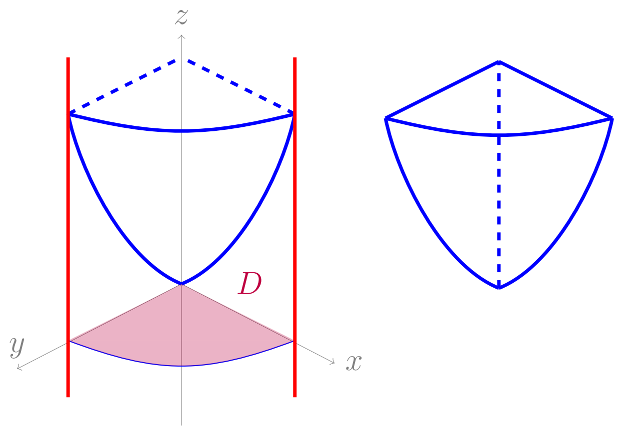
**Задатак 12** Израчунати $\oiint_\Gamma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где је $\Gamma$ спољна страна површи коју образују $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$ и $z = 1$.

**Решење** Површ $\Gamma$ је спољна страна тела $T$ описаног са

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ и } x^2 + y^2 \leq z \leq 1\},$$

где је $D$ унутрашњост круга $x^2 + y^2 \leq 1$ за који још важи $x > 0$ и $y > 0$, то јест

$$D = \{(\rho, \phi) : 0 \leq \rho \leq 1 \text{ и } 0 \leq \phi \leq \pi/2\}.$$




**Слика 8**. Површ $\Gamma$ и тело $T$

Применом формуле Гаус–Остроградског добијамо следећу једнакост

$$I = \oiint_\Gamma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_T \left((xz)'_x + (x^2y)'_y + (y^2z)'_z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Тражени интеграл је једнак

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_T (z + x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^1 (z + x^2 + y^2)\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left(\frac{z^2}{2} + (x^2 + y^2)z\right)\Big|_{x^2+y^2}^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{1}{2} + (x^2 + y^2) - \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \rho^2 - \frac{3}{2}\rho^4\right) \rho\mathrm{d}\rho\right) \mathrm{d}\phi = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

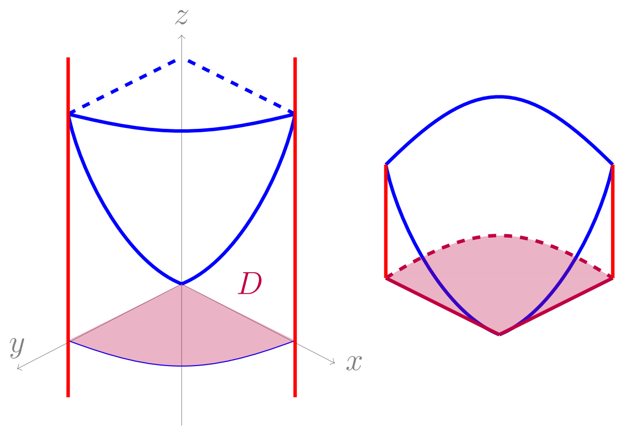
**Задатак 13** Израчунати $\oiint_\Gamma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где је $\Gamma$ спољна страна површи коју образују $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$.

**Решење** Површ $\Gamma$ је спољна страна тела $T$ описаног са

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ и } 0 \leq z \leq x^2 + y^2\},$$

где је $D$ унутрашњост круга $x^2 + y^2 \leq 1$ за који још важи $x > 0$ и $y > 0$, то јест

$$D = \{(\rho, \phi) : 0 \leq \rho \leq 1 \text{ и } 0 \leq \phi \leq \pi/2\}.$$




**Слика 9**. Површ $\Gamma$ и тело $T$

Применом формуле Гаус–Остроградског добијамо следећу једнакост

$$I = \oiint_\Gamma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_T \left((xz)'_x + (x^2y)'_y + (y^2z)'_z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Тражени интеграл је једнак

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T (z + x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \left( \int_0^{x^2+y^2} (z + x^2 + y^2)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \left( \frac{z^2}{2} + (x^2 + y^2)z \right) \Bigg|_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{2} \iint_D (x^2 + y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^1 \rho^5\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\phi = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

**Задатак 14** Израчунати $\oiint_\Gamma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где је $\Gamma$ спољна страна површи одређене са $2z = x^2 + y^2$ и $2z = 2 - x^2$.

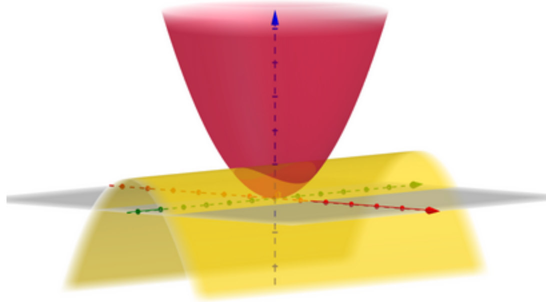
**Решење** Површ $\Gamma$ је спољна страна тела $T$ описаног са

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ и } \frac{x^2 + y^2}{2} \le z \le \frac{2 - x^2}{2}\right\},$$

где је $D$ унутрашњост елипсе одређене са $2x^2 + y^2 \le 2$, то јест

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi/\sqrt{2}, \\ y &= \rho\sin\phi, \end{aligned}$$

за $0 \le \rho \le \sqrt{2}$ и $-\pi \le \phi \le \pi$.



**Слика 10** Површ $\Gamma$

Применом формуле Гаус–Остроградског добијамо

$$I = \oiint_\Gamma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_T \left((x)'_x + (y)'_y + (2z)'_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

одакле произилази да је

$$I = 4\iiint_T \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4\iint_D \left(\int_{(x^2+y^2)/2}^{(2-x^2)/2} \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint_D \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

За поларне координате $x = \rho\cos\phi/\sqrt{2}$ и $y = \rho\sin\phi$, одговарајући Јакобијан је једнак

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\phi \\ y'_\rho & y'_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix} = \frac{\rho}{\sqrt{2}}.$$

Важи следећа једнакост

$$\begin{aligned} I &= 4\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{2}\rho^2\cos^2\phi - \frac{1}{2}\rho^2\sin^2\phi)\frac{\rho}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}}\left(\rho - \frac{1}{2}\rho^3\right)\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\phi = \frac{4}{\sqrt{2}}\pi. \end{aligned}$$

**Задатак 15** Израчунати $\oiint_\Gamma xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + e^z\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где је $\Gamma$ омотач купе $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$.

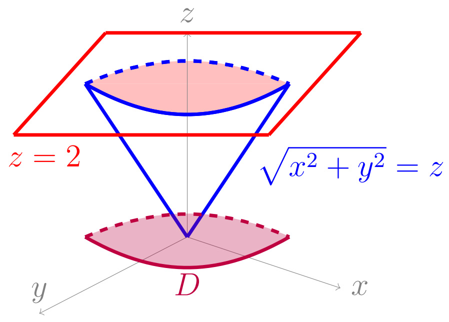
**Решење** Површ $\Gamma$ је спољна страна тела $T$ описаног са

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \text{ и } \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\right\},$$

где је $D$ унутрашњост круга $x^2+y^2 \le 4$, то јест

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi, \\ y &= \rho\sin\phi, \end{aligned}$$

за $0 \le \rho \le 2$ и $-\pi \le \phi \le \pi$.




**Слика 11** Тело $T$.

Применом формуле Гаус–Остроградског добијамо

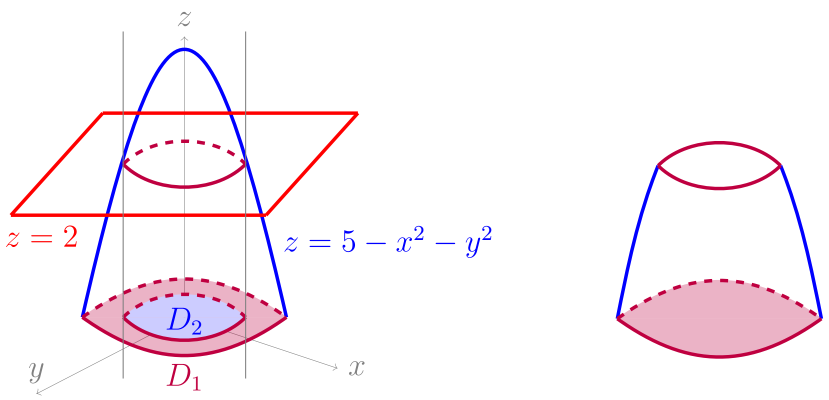
$$I = \oiint_\Gamma xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + e^z\mathrm{d}x\mathrm{d}z + e^x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_T \left((xy)'_x + (e^z)'_y + (\sin x)'_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

одакле произилази да је

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D y(2-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^2 \rho\sin\phi(2-\rho)\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\phi = \frac{4}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\phi\mathrm{d}\phi = 0. \end{aligned}$$

**Задатак 16** Израчунати $\oiint_\Gamma (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где је $\Gamma$ спољна страна површи $z = 5 - x^2 - y^2$ за $0 \le z \le 2$.

**Решење** Површ $\Gamma$ је спољна страна тела $T = T_1 \sqcup T_2$.




**Слика 12** Тело $T$.

Тело $T_1$ је описано са

$$T_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_1 \text{ и } 0 \le z \le 2\right\},$$

где је $D_1$ унутрашњост круга $x^2+y^2 \le 3$, то јест

$$x = \rho\cos\phi \qquad \text{и} \qquad y = \rho\sin\phi$$

за $0 \le \rho \le \sqrt{3}$ и $-\pi \le \phi \le \pi$. Тело $T_2$ је описано са

$$T_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_2 \text{ и } 0 \le z \le 5 - x^2 - y^2\right\},$$

где је $D_2$ унутрашњост круга $x^2+y^2 \le 5$ без области $D_1$, то јест

$$x = \rho\cos\phi \qquad \text{и} \qquad y = \rho\sin\phi$$

за $\sqrt{3} \le \rho \le \sqrt{5}$ и $-\pi \le \phi \le \pi$.

Применом формуле Гаус−Остроградског добијамо следећу једнакост

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T \left((x+y)'_x + (y+z)'_y + (z+x)'_z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 3\iiint_T \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\iiint_{T_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 3\iiint_{T_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3I_1 + 3I_2. \end{aligned}$$

Приметимо да је

$$I_1 = \iint_{D_1} \left(\int_0^2 \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 6\pi.$$

Важи и следећа једнакост

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{D_2} \left(\int_0^{5-x^2-y^2} \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_2} (5-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} (5-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho\right) \mathrm{d}\phi = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}\right) \mathrm{d}\phi = 5\pi - 2\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}\pi, \end{aligned}$$

одакле произилази да је тражени површински интеграл друге врсте једнак

$$I = 3I_1 + 3I_2 = 33\pi - 2(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\pi.$$