УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

www@grf.bg.ac.rs

Студијски програм:

ГЕОДЕЗИЈА ОСНОВНЕ АКАДЕМСКЕ СТУДИЈЕ 2014

Година/Семестар:

ДРУГА ГОДИНА/ТРЕЋИ СЕМЕСТАР

Назив предмета (шифра):

МАТЕМАТИКА 3 (Б2Г2М3)

Наставник:

МАТЕЈА КНЕЖЕВИЋ

Наслов вежбе:

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА

Београд, 2020.

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ Ј-НЕ ПРВОГ РЕДА

Обична диференцијална једначина је једначина облика $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, y = y(x)$, где су $y', \ldots, y^{(n)}$ изводи функције $y = y(x)$. Ред диференцијалне једначине је ред највећег извода који се појављује у једначини. Решење диференцијалне једначине n-тог реда је функција $y = \varphi(x)$ која има изводе до реда n на интервалу (a, b) и задовољава полазну једначину тј. $F(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$. У општем случају, диференцијална једначина n-тог реда има бесконачно много решења. Специјално, Кошијево решење диференцијалне једначине је оно решење које задовољава почетни услов $y(x_0) = y_0$, за неку тачку $M(x_0, y_0)$ из интервала (a, b). Геометријски гледано, то је оно решење које пролази кроз тачку M.

Теорема 1 *(Кошијева теорема о егзистенцији и јединствености решења Кошијевог проблема за једначине првог реда) Нека је $y' = f(x, y)$ диференцијална једначина и нека је $f(x, y)$ дефинисана на домену D. Ако постоји околина и тачке $M(x_0, y_0) \in D$ таква да је*

1. *$f(x, y)$ непрекидна на D*
2. *f има ограничен парцијални извод $\dfrac{\partial f}{\partial y}$*

онда постоји интервал $(x_0 - h, x_0 + h)$ у ком постоји јединствено решење $y = \varphi(x)$ дате једначине такво да је $\varphi(x_0) = y_0$.

Из претходно реченог, диференцијалне једначине првог реда су једначине облика $F(x, y, y') = 0$ и на овом курсу ћемо обрадити неколико типова. Решења диференцијалних једначина са којима ћемо се сусретати су углавном алгоритамска, а на Вама је да умете да препознате ког су типа и да знате које је опште решење за сваки специфичан тип.

1 Једначине са раздвојеним промењивим

Облик: $f(y)dy = g(x)dx$

Опште решење: $\displaystyle\int f(y)dy = \int g(x)dx + C$

Задатак 1 *Решити једначину $x^2 e^y y' + e^{\frac{1}{x}} = 0$.*

Решење Пробајмо да трансформишемо дату једначину тако да добијемо једначину са раздвојеним промењливим. Уз то уместо y' писаћемо $\frac{dy}{dx}$. Дакле дата једначина је еквивалентна са

$$x^2 e^y \frac{dy}{dx} = -e^{\frac{1}{x}}$$

односно

$$e^y dy = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Након интеграције обе стране, по y односно x, добијамо

$$e^y = e^{\frac{1}{x}} + C$$

Задатак 2 *Наћи опште решење једначине* $y' = xy^2 + x$ *и Кошијево решење при услову* $y(0) = 1$

Решење Једначину можемо записати као

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1) \iff \frac{dy}{y^2 + 1} = xdx$$

После интеграције добијамо опште решење облика

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C$$

Да бисмо одредили Кошијево решење, треба да нађемо вредност константе C тако да је задовољен услов $y(0) = 1$. Из тог разлога, у опште решење ћемо заменити врадности $y = 1$ и $x = 0$, одакле ћемо одмах добити која је вредност константе. Дакле,

$$\operatorname{arctg} 0 = \frac{1^2}{2} + C \implies C = -\frac{1}{2}$$

Кошијево решење је $\operatorname{arctg} y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}$

Задатак 3 *Решити једначину* $y' = \sqrt{x + y}$

Решење На први поглед ова једначина никако не личи на једначине са раздвојеним промењливим. Међутим, погледајмо поткорену функцију. Како је $y = y(x)$ (фумкција по x, а x је сама по себи функција промењливе x, то је и збир те две функције нека функција по x. Назовимо је $u = u(x) = x + y$ и нека управо то буде смена коју уводимо. Сада треба да одредимо први извод непознате функције y чији је извод y'. Са друге стране, пошто је y непозната функција коју треба одредити, то ће и u бити непозната функција (јер је збир непознате функције y и још нечега), па ће њен извод бити једноставно u'. Дакле, $u' = 1 + y'$ тј. $y' = u' - 1$. Остаје још да уведене смене вратимо у полазну једначину и тада добијамо $u' - 1 = \sqrt{u}$. Како је $u' = \frac{du}{dx}$ имамо да је

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{u} + 1 \iff \frac{du}{\sqrt{u} + 1} = dx$$

Остаје нам још да интегралимо обе стране. Десна страна није проблем, а да бисмо нашли итеграл леве сгтране једнакости, уведимо смену $u = t^2$, $du = 2tdt$, након чега добијамо

$$2\int \frac{tdt}{t+1} = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}dt = 2t - 2\ln|t|$$

Дакле, опште решење је, након што вратимо смену $t = \sqrt{u}$

$$2\sqrt{u} - 2\ln\sqrt{u} = x + C$$

2 Хомогене диференцијалне једначине

Облик: $y' = f(\dfrac{y}{x})$
Смена: $z = \dfrac{y}{x} \iff zx = y$, где је $z = z(x)$, $z'x + z = y'$
Опште решење (након уведене смене и сређивања): $\displaystyle\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x}$

Задатак 4 Решити диференцијалну једначину

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Решење Да бисмо дату једначину свели на хомогену једначину, најпре ћемо поделити и бројилац и именилац са x^2. Тада добијамо

$$y' = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} \iff y' = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$$

Сада можемо да уведемо смену $z = \frac{y}{x}$, $z = z(x)$, односно $y = zx$. Да бисмо добили вредност за y' након овако уведене смене, последњи израз треба диференцирати по променљивој x. Поново напомињемо да је нова функција

z, у ствари функција једне променљиве, и то променљиве x. Из тог разлога, након диференцирања имамо $y' = z'x + z$, где смо десну страну једнакости третирали као производ две функције. Када заменимо у горњу једначину добијамо

$$z'x + z = \frac{1+z^2}{z}$$

Ова једначина ће се, након сређивања, свести на једначину са раздвојеним променљивим:

$$z'x = \frac{1+z^2}{z} - z$$

$$z'x = \frac{1}{z}$$

Како је $z' = \frac{dz}{dx}$, када све променљиве x пребацимо на леву, а променљиве z на десну страну једнакости, имамо следеће:

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1}{z}$$

односно

$$zdz = \frac{dx}{x}.$$

Након интеграције обе стране, леве по z, а десне по x добијамо опште решење:

$$\frac{1}{2}z^2 = \ln|x| + C$$

Задатак 5 *Наћи опште решење диференцијалне једначине*

$$y' = \frac{x+y-3}{x-y+5}$$

Решење Ова једначина, на први поглед, не изгледа као хомогена диференцијална једначина. Наиме, уколико пробамо да поделимо бројилац и именилац са x, добијамо

$$y' = \frac{1+\frac{y}{x}-\frac{3}{x}}{1-\frac{y}{x}+\frac{5}{x}}$$

Дакле, није сваку сабирак облика y/x. Међутим, једноставном транслацијом, можемо учинити да слободани чланови (константе у бројиоцу и имениоцу почетне једначине) нестану. Стога, уведимо смену $x = u + a$, $y = v + b$, а a и b ћемо наћи, ако је то могуће, тако да задовољавају одређене услове. Сада је $y' = v'$, па добијамо једначину

$$v' = \frac{u+a+v+b-3}{u+a-v-b+5} = \frac{u+v+(a+b-3)}{u-v+(a-b+5)}$$

Да бисмо изгубили слободне чланове, захтевамо да $a+b-3=0$ и $a-b+5=0$. Решавањем овог система по a и b, добијамо да је $a=-1$ и $b=4$. Дакле, након увођења смене $x=u-1$, $y=v+4$ добијамо хомогену диференцијалну једначину

$$y'=\frac{u+v}{u-v}=\frac{1+\frac{v}{u}}{1-\frac{v}{u}}$$

Као и у претходном задатку, уводимо смену $z=\frac{v}{u}$, односно $z'u+z=v'$. Када заменимо у једначину имамо

$$z'u+z=\frac{1+z}{1-z} \iff z'u=\frac{1+z^2}{1-z}$$

Како је $z'=\frac{\partial z}{\partial u}$, након једноставних трансформација добијамо

$$\frac{1-z}{1+z^2}dz=\frac{du}{u}$$

па је опште решење једначине (након интеграције обе стране)

$$\operatorname{tg} z-\frac{1}{2}\ln(1+z^2)=\ln u+C$$

3 Линеарна диференцијална једначина

Општи облик: $y'+p(x)y=q(x)$

Опште решење: $y=e^{-\int p(x)dx}(c+\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx)$

Задатак 6 *Наћи опште решење једначине* $xy'-2y=2x^4$

Решење Најпре треба да сведемо дату једначину на општи облик линеарне диференцијалне једначине. Стога ћемо поделити једначину са x, да бисмо добили

$$y'-\frac{2}{x}y=2x^3$$

Сада видимо да је $p(x)=-\frac{2}{x}$, а $q(x)=2x^3$, па нам остаје само да заменимо наведене функције у формулу за опште решење. Добијамо

$$y(x)=e^{2\int\frac{1}{x}dx}(c+2\int e^{-2\int\frac{1}{x}dx}x^3dx)$$

Након решавања интеграла, добијамо да је опште решење $y(x)=x^2(c+x^2)$

Задатак 7 *Решити једначину* $y' = \dfrac{1}{e^{3y} - 2x}$

Решење Први корак је да се дата једначина трансформише у општи облик линеарне диференцијалне једначине. Међутим, са десном страном једнакости не можемо много тога да урадимо. Са друге стране, да је дат инверзни разломак, не би било тешко да је сведемо на жељени облик.
Сетимо се извода инверзне функције. Ако је $y = f(x)$ тада је $x = f^{-1}(y)$, а $(f^{-1}(y))' = 1/f'(x) = 1/y'$. Дакле, уместо да тражимо функцију $y = y(x)$, у овом случају ћемо тражити инверзну функцију $x = x(y)$. Сада једначина постаје

$$x' = e^{3y} - 2x \iff x' + 2x = e^{3y}$$

Наравно, у овом случају промењливе x и y мењају места, па тражимо $p(y)$ које стоји уз x и $q(y)$ које је са десне стране једнакости: $p(y) = 2$, $q(y) = e^{3y}$. Остаје још да све ово заменимо у формулу за опште решење

$$x(y) = e^{-2\int dy}(c + \int e^{2\int dy} e^{3y} dy)$$

Оопште решење је, након краћег рачуна, $x(y) = e^{-2y}(c + \frac{1}{5}e^{5y})$

Задатак 8 *Решити* $ydx + (2x - y^2)dy = 0$

Решење Пробајмо да напишемо једначину у општем облику. Имамо $(2x - y^2)dy = -ydx$ односно

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x - y^2}$$

Дакле, јавља се исти проблем као у претходном адатку, па ћемо га на исти начи и решити, односно тражићемо решење инвезне функције

$$x' = \frac{y^2 - 2x}{y}$$

Сада је тражени облик, након краћих трансформација

$$x' + \frac{2}{y}x = y$$

где је $p(y) = \frac{2}{y}$, а $q(y) = y$. Опште решење је $x(y) = \frac{1}{y^2}(c + \frac{y^4}{4})$

4 Бернулијева диференцијална једначина

Облик: $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$

Смена: $z = y^{1-\alpha}, z = z(x),\ z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \implies y' = \dfrac{z'y^{\alpha}}{1-\alpha}$

Увођењем ове смене Бернулијева једначина се своди на Линеарну диференцијалну једначину.

Задатак 9 *Решити једначину* $2y' + xy^3 = y$

Решење Сведимо је прво на општи облик и одредимо шта су функције $p(x)$, $q(x)$ и параметар α

$$y' - \frac{y}{2} = -\frac{x}{2}y^3$$

Сада лако видимо да је $p(x) = -\frac{1}{2}$, $q(x) = -\frac{x}{2}$, а параметар је $\alpha = 3$. Дакле, смена ће бити $z(x) = y^{1-3}$ тј, $z = y^{-2}$, па је $z' = -2y^{-3}y' \implies y' = \frac{z'y^3}{-2}$. Остаје још да изразимо y у функцију од z. Како је $z = y^{1-3}$ то је $z = \frac{y}{y^3}$, па је $y = zy^3$. Заменимо сада све претходно у дату једначину.

$$\frac{z'y^3}{-2} - \frac{zy^3}{2} = -\frac{x}{2}y^3$$

Да би смо добили жељени облик линеарне једначине, помножимо последњу једначину са $-\frac{2}{y^3}$, да бисмо добили

$$z' + \frac{1}{2}z = x$$

Дакле, $p(x) = 1/2$, $q(x) = x$, па је опште решење

$$y(x) = e^{-\int \frac{1}{2}dx}(c + \int e^{-\int \frac{1}{2}dx} x dx)$$

Задатак 10 *Наћи опште решење једначине* $(x^2 + y^3)dy - xydx = 0$

Решење Као и у случају примера код Линеарних једначина, и овде се може десити да је лакше наћи решење инверзна функције $x = x(y)$. То и јесте случај са овом једначином, па ћемо је одмах трансформисати у облик погодан за решавање. Имамо

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 + y^3}{xy} \iff x' - \frac{1}{y}x = y^2 x^{-1}$$

Дакле, $p(y) = -\frac{1}{y}$, $q(y) = y^2$, док је параметар $\alpha = -1$. Смена је $z = x^{1-(-1)} = x^2$, а $z' = 2xx'$. Остаје још да изразимо $x' = \frac{z'}{2x}$ и $x = \frac{z}{x}$. Убацимо добијено у једначину

$$\frac{z'}{2x} - \frac{1}{y}\frac{z}{x} = \frac{y^2}{x}$$

и помножимо је са $2x$ да бисмо добили општи облик Линеарне једначине чије нам је опште решење познато. Добијамо

$$z' - \frac{2}{y}z = 2y^2$$

па је опште решење дато са

$$x(y) = e^{\int \frac{2}{y}dy}(c + 2\int e^{-\int \frac{2}{y}dy}y^2dy)$$

Односно

$$x(y) = y^2(c + 2y)$$