УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

www@grf.bg.ac.rs

Студијски програм:

ГЕОДЕЗИЈА ОСНОВНЕ АКАДЕМСКЕ СТУДИЈЕ 2014

Година/Семестар:

ДРУГА ГОДИНА/ТРЕЋИ СЕМЕСТАР

Назив предмета (шифра):

МАТЕМАТИКА 3 (Б2Г2М3)

Наслов вежбе:

ДИФЕРЕНЦИЈАНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ВИШЕГ РЕДА I и II

Београд, 2020.

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ВИШЕ РЕДА

1 Хомогне једначине са константним коефи-цијентима

Облик: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$

Карактеристична једначина: $a_n \lambda^{(n)} + a_{n-1} \lambda^{(n-1)} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

Решење хомогене једначине: Нека је $a_n \lambda^{(n)} + a_{n-1} \lambda^{(n-1)} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ карактеристична једначина и $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ скуп њених решења. Тада ако је

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ нула карактеристичне једначине првог реда тада је $e^{\lambda x}$ решење једначине
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ решење карактеристичне једначине реда k, онда су $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda x}$ решења једначине
3. $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ решење карактеристичне једначине првог реда, тада су $\cos \alpha x$ и $\sin \beta x$ решења једначине
4. $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ решење карактеристичне једначине реда k, тада су $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$ решења једначине

Опште решење Ако су $y_1, \ldots, y_n$ решења диференцијалне једначине n-тог реда, тада је њено опште решење

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

Задатак 1 *Решити хомпгену једначину* $y'' - y' - 2y = 0$

Решење Формирајмо најпре керактеристичну једначину

$$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

и нађимо њена решења: $\lambda = 2$ и $\lambda = -1$. Како су e^{2x} и e^{-x} решења хомогене једначине то је и њихова линеарна комбинација, па је њено опште решење

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

где су c_1, c_2 произвољне реалне константе.

Задатак 2 *Наћи опште решење једначине* $y^{(4)} + y = 0$

Решење Карактеристична једначина је $\lambda^4 + 1 = 0$ односно $\lambda^4 = -1$. Овде треба да се подсетимо две ствари. Прво је да свака једначина степена n има тачно n нула у скупу комплексних бројева. Друго је тригонометријски облик комплексног броја. Наиме, сваки комплексни број $z = x + iy$ се може записати у тригонометријском облику као $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где је $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ модул комплекног броја, а $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$. Претходно ћемо да искористимо да запишемо -1 у тригонометријском облику. Имамо да је $z = 1$, а $\varphi = \pi + 2k\pi$, па је $-1 = \cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)$. Сада можемо да нађемо скуп решења карактеристичне једначине као

$$\{\cos\frac{(\pi + 2k\pi)}{4} + i\sin\frac{(\pi + 2k\pi)}{4} : k = 0, 1, 2, 3\}.$$

Када израчунамо вредност угла за свако појединачно k, добијамо скуп решења

$$\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

Приметимо да међу понуђеним решењима има два пара узајамно коњугованo комплексних бројева. Изаберимо из сваког таквог пара по једно решење. Нека то буду $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ова два решења су нам довољна да генеришемо 4 линеарно независне функције које ће нам дати опште решење једначнине. То су $y_1(x) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $y_2(x) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $y_3(x) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x$ и $y_4(x) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x$. Сада је опште решење дате једначине

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) + c_4y_4(x)$$

то јест

$$y(x) = c_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_3e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

Задатак 3 *Наћи опште решење једначине* $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 5y'' + 4y + 4y = 0.$

Решење. Одговарајућа карактеристична једначина $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ је једначина са рационалним коефицијентима, па су њена рационална решења (ако их има) облика $\frac{p}{q}$ тако да $p|4$, а $q|1$, односно тражимо их у скупу $\{\pm 1, \pm 2\ \pm 4\}$. Једностаном провером видимо а је $\lambda = -2$ једна рационална нула. Након дељења полазног полинома са $(\lambda + 2)$ добијамо полином

$$(\lambda^4 + 4\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda + 4) : (\lambda + 2) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2$$

Дакле, нуле новодобијеног полинома тражимо у истом скупу као и за полазни полином. Провером утврђујемо да је $\lambda = -2$ и његова нула, тј. $\lambda = -2$ је двострука нула полазног полинома. Када новодобијени полином поделимо са $(\lambda + 2)$ добијамо квадратну једначину чијим решавањем налазимо преостале две нуле, а то су $\lambda_{3/4} = \pm i$.
Могли смо и на други начин да нађемо преостале нуле. Погледајмо добијени полином $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$ и групишимо прва два и последња два сабирка. Добијамо, $\lambda^2(\lambda+2)+(\lambda+2) = (\lambda+2)(\lambda^2+1) = 0$, одакле лако налазимо остале нуле.
Дакле, $\lambda = 2$ је двострука нула, а остале су просте нуле полинома, па је опште решење једначине

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + c_3\cos x + c_4\sin x$$

2 Нехомогене једначине са константним коефицијентима

Облик: $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x)$

Опште решење: $y(x) = y_h + y_p$, где је y_h решење одговарајуће хомогене једначине (за $f(x) = 0$), а y_p је парикуларно решење које налазимо *Матодом неодређених коефицијената* или *Матодом варијације константи*

2.1 Метода неодређених коефицијената

У овом случају облик партикуларног решења зависи од облика функције $f(x)$. Разликујемо неколико случајева:

1. $f(x) = P_n(x)$ (тј. полином степена n)

   1.1. Ако 0 није корен карактеристичне једначине $y_p = Q_n(x)$ (односно неки полином степена n чије коефицијенте треба да одредимо)

   1.2. Ако је 0 корен карактеристичне једначине реда k $y_p = x^{k-1}kQ_n(x)$

2. $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$

   2.1. Ако α није корен карактеристичне једначине $y_p = e^{\alpha x}Q_n(x)$

   2.2. Ако је α корен карактеристичне једначине реда k, $y_p = x^{k-1}e^{\alpha x}Q_n(x)$

3. $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, $t = \max\{m, n\}$

   3.1. Ако $\alpha+i\beta$ није корен карактеристичне једначине $y_p = e^{\alpha x}(R_t(x)\cos\beta x+ S_t(x)\sin\beta x)$

3.2. Ако $\alpha + i\beta$ је корен карактеристичне једначине реда k, $y_p = x^{k-1}e^{\alpha x}(R_t(x)\cos\beta x + S_t(x)\sin\beta x)$

Напомена. Приметити да су прва два случаја специјални случајеви трећег.

Задатак 4 *Наћи опште решење једначине* $y''' + 2y'' + y' = 5e^{-x}$

Решење Нађимо прво решење одговарајуће хомогене једначине $y'''+2y''+y' = 0$. Њена карактеристична једначина је $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$. Извуцимо λ испред заграде да бисмо добили $\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$. Њена решења су $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$ (двострука нула). Сада имамо хомогено решење

$$y_h = c_1e^0x + c_2e^{-x} + c_2xe^{-x} = c_1 + c_2e^{-x} + c_2xe^{-x}$$

Остаје да нађемо партикуларно решење, но пре тога ћемо идентификовати облик функције $f(x)$, које је облика као из другог случаја тј $e^{\alpha x}P_n(x)$. Имамо да је $\alpha = -1$, а $P_n(x) = 5$, дакле полином нултог степена. Како је $\alpha = -1$ нула другог реда карактеристичне једначине, партикуларно решење ће бити облика $y_p = Ax^2e^{-x}$. Да бисмо нашли коефицијент A за који је y_p партикуларно решење, наћиће мо прва три извода од y_p и убацити их у полазну једначину. Имамо

$$y_p' = 2Axe^{-x} - Ax^2e^{-x} = e^{-x}(2Ax - Ax^2),\ y_p'' = e^{-x}(Ax^2 - 4Ax + 2A),$$
$$y'''(x) = e^{-x}(-Ax^2 + 6Ax - 6A)$$

Када убацимо у полазну једначину имамо

$$e^{-x}(2Ax - Ax^2) + 2e^{-x}(Ax^2 - 4Ax + 2A) + e^{-x}(-Ax^2 + 6Ax - 6A) = 5e^{-x}$$

Након што помножимо обе стране са e^x и средимо израз, остаје $-2A = 5$, односно $A = -5/2$. Дакле, партикуларно решење је $y_p = -\frac{5}{2}x^2e^{-x}$, а опште решење је

$$y(x) = y_h + y_p = c_1 + c_2e^{-x} + c_2xe^{-x} - \frac{5}{2}x^2e^{-x}$$

Задатак 5 *Решити једначину* $y''' - y = x^3 + \cos x$

Решење Прво тражимо решење хомогене једначине $y''' - y = 0$. Нуле одговарајуће хомогене једначине $\lambda^3 - 1 = 0$ можемо наћи тако што је запишемо као разлику кубова $(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) = 0$. Одавде видимо да је реално решење $\lambda_1 = 1$, а два коњуговано комплексан решења добијамо као решења квадратне једначине. То су $\lambda_{2/3} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Решење хомогене једначине је

$$y_h = c_1e^c + e^{-\frac{1}{2}x}(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

Остаје још да нађемо партикуларно решење. Међутим, функција са десне стране једнакости није у облику погодном за примену Методе неодређених коефицијената. Оно што можемо да урадимо је да $f(x) = x^3 + \cos x$ посматрамо као збир две функције $f_1(x) = x^3$ и $f_2(x) = \cos x$, па да тражимо два партикуларна решења, која одговарају функцијама $f_1(x)$ и $f_2(x)$, респективно. За функцију f_1, као одговарајуће партикуларно решење тражимо функцију облика $y_{p_1} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ чији су изводи

$$y'_{p_1} = 3Ax^2 + 2Bx + C,\ y''_{p_1} = 6Ax + 2B + C,\ y'''_{p_1} = 6A$$

Када убацимо ове изводе у почетну једначину, добијамо $6A - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D = x^3$, па решавањем система

$$-A = 1,\ B = 0,\ C = 0,\ 6A - D = 0$$

добијамо да је $y_{p_1} = -x^3 - 6$
Друго партикуларно решење, које одговара функцији $f_2(x) = \cos x$, је облика $y_{p_2} = A\cos x + B\sin x$. Поново тражимо изводе и убацујемо их у почетну једначину. Имамо

$$y'_{p_2} = -A\sin x + B\cos x,\ y''_{p_2} = -A\cos x - B\sin x,\ y'''_{p_2} = A\sin x - B\cos x$$

па је $y''' - y = A\sin x - B\cos x - A\cos x - B\sin x = \sin x(A-B) + \cos x(-B-A) = \cos x$. Дакле, коефицијент уз синус треба да буде нула, а уз косинус један, па добијамо систем

$$A - B = 0,\ -A - B = 1,\ \text{тј. } A = B = -\frac{1}{2}$$

одакле закључујемо да је $y_{p_2} = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$ На крају, опште решење је

$$y(x) = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1 e^c + e^{-\frac{1}{2}x}(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) - x^3 - 6 - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$$

Задатак 6 *Наћи опште решење једначине* $y'' + y' = \operatorname{ch} x$

Решење Решења карактеристичне једначине $\lambda^2 + \lambda = 0$ су $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_1 = -1$, па је хомогено решење $y_h = c_1 + c_2 e^{-x}$.
Функцију са десне стране једнакости можемо записати као $\operatorname{ch} x = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = f_1 + f_2$, па ћемо партиуларно решење тражити исто као у претходном задатку $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$.
Прво партикуларно решење је облика $y_{p_1} = Ae^x$, за које важи $y'_{p_1} = y''_{p_1} = y_{p_1} = Ae^x$, па када убацимо у једначину добијамо $2Ae^x = \frac{e^x}{2}$ тј. $A = \frac{1}{4}$.
За $f_2(x) = \frac{e^{-x}}{2}$, како је $\alpha = -1$ корен првог реда карактеристичне једначине, $y_{p_2} = Axe^{-x}$. Нађимо изводе

$$y'_{p_2} = Ae^{-x} - Axe^{-x} = e^{-x}(A - Ax),\ y''_{p_2} = e^{-x}(Ax - 2A)$$

Када убацимо у полазну једначину, добијамо

$$e^{-x}(Ax - 2A) + e^{-x}(A - Ax) = \frac{e^{-x}}{2}$$

одакле следи да је $A = -\frac{1}{2}$. Опште решење је

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

Задатак 7 $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$

Решење Одговарајућа хомогена једначина је $y'' - 2y' + 2y = 0$, а њена карактеристична једначина је $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, чија су решења $\lambda_{1/2} = 1 \pm i$, па је хомогено решење $y_h = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$. За тражење партикуларног решења посматраћемо трећи случај. Имамо да је $\alpha = \beta = 1$, па можемо закључити да је $\alpha + i\beta = 1 + i$ проста нула карактеристичне једначине. Стога, пошто је $Q_n = 1$ (тј. степена нула) партикуларно решење је облика $y_p = e^x(Ax \cos x + Bx \sin x)$. Потражимо изводе првог и другог реда и убацимо их у полазну једначину

$$y'_p = e^x(Ax \cos x + Bx \sin x) + e^x(A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x)$$

$$= e^x((A + B)x \cos x + (-A + B)x \sin x + A \cos x + B \sin x)$$

$$y''_p = e^x((A + B)x \cos x + (-A + B)x \sin x + A \cos x + B \sin x)$$

$$+e^x((A+B) \cos x - (A+B)x \sin x + (B-A) \sin x + (-A+B)x \cos x - A \sin x + B \cos x)$$

$$= e^x(2Bx \cos x - 2Ax \sin x + (2A + 2B) \cos x + (2B - 2A) \sin x)$$

Када убацимо у једначину, добијамо

$$e^x(2Bx \cos x - 2Ax \sin x + (2A + 2B) \cos x + (2B - 2A) \sin x) -$$

$$-2e^x((A + B)x \cos x + (-A + B)x \sin x + A \cos x + B \sin x) +$$

$$+2e^x(Ax \cos x + Bx \sin x) = e^x \sin x$$

Након што помножимо једначину са e^{-x} и средимо је, имамо

$$(2B - 2A - 2B + 2A)x \cos x + (-2A + 2A - 2B + 2B)x \sin x +$$

$$+(2A + 2B - 2A) \cos x + (2B - 2A - 2B) \sin x = \sin x$$

Дакле, $B = 0$, а $A = -\frac{1}{2}$, па је опште решење

$$y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) - \frac{1}{2}e^x x \cos x$$

Задатак 8 $y'' - 2y = \cos x - x \sin x$

Решење Хомогена једначина је $y'' - 2 = 0$, а њена карактеристична једначина $\lambda^2 - 2 = 0$ чија су решења $\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{2}$. Хомогено решење је $y_h = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}$.
За партикуларно решење ћемо поново посматрати трећи случај. Имамо да је $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P(x) = 1$ (дакле нултог степена), а $Q(x) = -x$ (првог степана). Дакле, $\alpha + i\beta = 0 + i = i$ није решење карактеристичне једначине, а R_t и S_t су првог степена, односно $y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$. Први и други извод су:

$$y_p' = A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x =$$

$$= (Cx + A + D)\cos x + (-Ax - B + C)\sin x$$

$$y_p'' = C\cos x - (Cx + A + D)\sin x - A\sin x + (-Ax - B + C)\cos x =$$

$$= (-Ax - B + 2C)\cos x + (-Cx - 2A - D)\sin x$$

Убацивањем у полазну једначину добијамо

$$(-Ax - B + 2C)\cos x + (-Cx - 2A + D)\sin x - 2((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x) =$$

$$= (-Ax - B + 2C - 2Ax - 2B)\cos x + (-Cx - 2A - D - 2Cx - 2D)\sin x =$$

$$= (-3Ax + 2C - 3B)\cos x + (-3Cx - 2A - D)\sin x = \cos x - x\sin x$$

Остаје нам да решимо систем

$$3A = 0,\ 2C - 3B = 1,\ -3C = 1,\ -2A - D = 0$$

Како је $A = D = 0$, $C = -\frac{1}{3}$ и $B = -\frac{5}{9}$, то је $y_p = -\frac{5}{9}\cos x - \frac{1}{3}x\sin x$, па је

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{5}{9}\cos x - \frac{1}{3}x\sin x$$

2.2 Матода варијације константи

Нека је дата диференцијална једначина

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

и нека је

$$y_h = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

решење одговарајуће хомогене једначине. Посматрајмо константе $c_1, \dots, c_n$ као функције променљиве x, односно као $c_1(x), \dots, c_n(x)$. Тада $c_1(x), \dots, c_n(x)$ одређујемо решавањем система једначина

$$c_1'(x)y_1 + \dots + c_n'(x) = 0$$

$$c_1'(x)y_1' + \dots + c_n'(x)y_n' = 0$$

$$\vdots$$

$$c_1(x)y_1^{(n-2)} + \dots + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0$$
$$c_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x)$$

Као решење датог система добијамо $c_i(x) = \varphi_i(x) + D_i$ где су D_i произвољне реалне константе.

Дигресија. Приметимо да се константе диференцирају само у првој једначини, док се у осталим диференцирају координатне функције y_i.

Задатак 9 *Решити једначину* $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$

Решење Одговарајућа хомогена једначина је $y'' + 5y' + 6 = 0$, чија је карактеристична једначина $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, са решењима $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = -3$. Дакле, хомогено решење је $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$.

Остаје да нађемо партикуларно решење. Сетомо се да је могуће применити *Метод неодређених коефицијената* само у случају када је функција $f(x)$ специфичног облика. Дату функцију $f(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$ не можемо написати у облику производа полинома, тригонометријских функција и $e^{\alpha x}$. Из тог разлога ћемо применити општији метод за тражење решења нехомогене диференцијалне једначине - *Метод неодређених коефицијената.*

Посматрајмо хомогено решење као $y_h = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)e^{-3x}$ и формирајмо систем једначина као што је наведено у уводу (систем ће се састојати од две једначине):

$$c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)e^{-3x} = 0$$

$$-2c_1'(x)e^{-2x} - 3c_2'(x)e^{-3x} = \frac{1}{1 + e^{2x}}$$

Помножимо прву једначину са 2 и додајмо другој. Добијамо

$$c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)e^{-3x} = 0$$

$$-c_2'(x) = \frac{1}{1 + e^{2x}}$$

Сада можемо да нађемо $c_2(x)$:

$$c_2(x) = \int \frac{1}{1+e^{2x}}dx = \cdots = \frac{1}{2}\ln\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} + D_2$$

(*Напомена.* За смену узети $t = 1+e^{2x}$) Да бисмо нашли c_1, убацићмо вредност за $c_2' = -\frac{1}{1+e^{2x}}$ у прву једначину система, па је

$$c_1'e^{-2x} = \frac{e^{-3x}}{1+e^{2x}} / \cdot e^{2x}$$

$$c_1' = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{2x}} = \int \frac{1}{(1+e^{2x})e^{x}} = \operatorname{arctg} e^{x} + D_2$$

(*Напомена* За смену узети $e^x = t$.

Коначно, опште решење једначине је

$$y(x) = (\operatorname{arctg} e^{x} + D_2)e^{-2x} + (\frac{1}{2}\ln\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} + D_2)e^{-3x}$$

Задатак 10 $y''' + y' = \sin x + \dfrac{1}{\sin x}$

Решење Хомогена једначина је $y''' + y' = 0$, а карактеристична $\lambda^3 + \lambda = 0$, чија су решења $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_{2/3} = \pm i$. Дакле, хомогено решење је

$$y_h = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x$$

Функцију $f(x)$ можемо написати као $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$, где је $f_1(x) = \sin x$, а $f_2(x) = \frac{1}{\sin x}$. Сада, на прву функцију можемо применити *Методу неодређених коефицијената* (мада није погрешно и на целу функцију применити *Методу варијације константи*, али овако је једноставније). Имамо да је $Q_n(x) = 1$ тј полином нултог степена, а $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. Како је $\alpha = i\beta = i$ решење карактеристичне једначине, партикуларно решење је облика $y_p = Ax\cos x + Bx\sin x$. Тада је

$$y' = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x = (A+Bx)\cos x + (B-Ax)\sin x$$

$$y'' = (2B-Ax)\cos x - (2A+Bx)\sin x$$
$$y''' = -(3A+Bx)\cos x - (3B-Ax)\sin x$$

Када добијено убацимо у полазну једначину, добијамо

$$-(3A+Bx)\cos x - (3B-Ax)\sin x + (A+Bx)\cos x + (B-Ax)\sin x = \sin x$$

односно,

$$(-3A - Bx + A + Bx)\cos x + (B - Ax - 3B + Ax)\sin x = \sin x$$

Дакле, $A = 0$ и $-2B = 1$ тј $B = -\frac{1}{2}$, па је $y_p = -\frac{1}{2}x\sin x$.

Остаје још да применимо методу варијације константи на $f_2 = \frac{1}{\sin x}$. У овом случају ћемо имати три једначине у систему:

$$c_1'(x) + c_2'(x)\cos x + c_3'(x)\sin x = 0$$
$$-c_2'(x)\sin x + c_3'(x)\cos x = 0$$
$$-c_2'(x)\cos x - c_3'(x)\sin x = \frac{1}{\sin x}$$

Помножимо другу једначину са $\sin x$, а трећу са $\cos x$. Добијамо

$$c_1'(x) + c_2'(x)\cos x + c_3'(x)\sin x = 0$$
$$-c_2'(x)\sin^2 x + c_3'(x)\sin x\cos x = 0$$
$$-c_2'(x)\cos^2 x - c_3'(x)\sin x\cos x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Када саберемо другу и трећу једначину, систем се своди на

$$c_1'(x) + c_2'(x)\cos x + c_3'(x)\sin x = 0$$
$$-c_2'(x)\sin^2 x + c_3'(x)\sin x\cos x = 0$$
$$-c_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Дакле, $c_2(x) = -\ln|\sin x| + D_2$. Даље,

$$\frac{\cos x}{\sin x}\sin^2 x + c_3'(x)\sin x\cos x = 0$$

па је $c_3(x) = -x + D_3$. На крају,

$$c_1' = \frac{\cos x}{\sin x}\cos x + \sin x = \frac{1}{\sin x}$$

Сада је, уз смену $x = 2t$

$$c_1(x) = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{\sin 2t} = \int \frac{2}{2\sin t\cos t} = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t\cos t}$$
$$= \int \frac{\sin t}{\cos t} + \int \frac{\cos t}{\sin t} = -\ln|\cos t| + \ln|sint| = \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + D_1$$

Дакле, опште решење је

$$y(x) = \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + D_1 + (-\ln|\sin x| + D_2)\cos x + (-x + D_3)\sin x - \frac{1}{2}x\sin x$$

3 Смена промењиве

Задатак 11 *Одредити опште решење једначине* $xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = 0$ *уводећи смену* $y = u(x) + v(x)$

Решење Најпре морамо да диференцирамо смену, два пута, како би је заменили у дату једначину (уместо $u(x), v(x)$, пишемо u, v).

$$y' = u'v + v'u$$

$$y' = u''v + u'v' + v''u + u'v' = u''v + 2u'v' + v''u$$

Након замене у полазну једначину добијамо

$$x(u''v + 2u'v' + v''u) - 2(x-1)(u'v + v'u) + (x-2)uv = 0$$

Групишимо сада чланове уз u'', u' и u. Добијамо

$$u''xv + (2v'x - 2(x-1)v)u' + (xv'' - 2(x-1)v' + (x-2)v)u = 0$$

Сада ћемо ражити функцију v тако да се члан уз u' анулира, односно тако да је

$$2v'x - 2(x-1)v = 0$$

Ово је једначина прво реда која раздваја промењиве што се лако види након што све v пребацимо на леву страну, а све x на десну

$$\frac{dv}{v} = \frac{x-1}{x}$$

Њено решење је $\ln|v| = x - \ln|x| + C$. Напишимо леву страну једнакости на следећи начин $\ln|v| = \ln e^x - \ln|x| + \ln C_1$ тј. $\ln|v| = \ln \frac{C_1 e^x}{|x|}$. Како дата једнакост важи за било који избор константе C_1, можемо узети да је $C_1 = 1$. Дакле, $v = \frac{e^x}{x}$. Сада, када смо нашли функцију $v(x)$, остаје да одредимо шта треба да буде $u(x)$. Из тог разлога, нађимо први и други извод од $v(x)$ и убацимо у једначину.

$$v' = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$$v'' = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^3}$$

Убацимо добијено у једначину

$$u''x\frac{e^x}{x} + (\frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^2} - 2\frac{(x-1)^2}{x^2}e^x + (x-2)\frac{e^x}{x})u = 0$$

Након сређивања, добијамо једначину

$$u'' = 0$$

чија је карактеристична једначина

$$\lambda^2 = 0$$

односно, $\lambda = 0$ је двостука нула, па је $u = c_1 + c_2 x$. Коначно, како је $y = uv$, опште решење је

$$y = (c_1 + c_2 x)\frac{e^x}{x}$$

Задатак 12 *Наћи опште решење једначине* $y'' + 2xy' + (2 + x^2)y = e^{-x^2/2}$, *уводећи смену* $y = z(x)e^{-x^2/2}$

Решење Најпре треба диференцирати смену (два пута), као бисмо одредили чему су једнаки изводи тражене функције y, након овако уведене смене. Имамо (ради прегледности пишемо $z, z' \dots$, уместо $z(x), z'(x) \dots$)

$$y' = z'e^{-x^2/2} - xe^{-x^2/2}z = e^{-x^2/2}(z' - xz)$$

$$y'' = (z'' - z - xz')e^{-x^2/2} - xe^{-x^2/2}(z' - xz) = e^{-x^2/2}(z'' - 2xz' - z + x^2 z)$$

Обацимо сада добијено у полазну једначину и групишимо чланове уз z, z', z''

$$e^{-x^2/2}(z'' - 2xz' - z + x^2 z) + 2xe^{-x^2/2}(z' - xz) + (2 + x^2)ze^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}$$

$$e^{-x^2/2}z'' + e^{-x^2/2}z = e^{-x^2/2}$$

Након множења са $e^{x^2/2}$ добијамо једначину са константним коефицијентима

$$z'' - z = 1$$

чија је одговарајућа хомогена, односно карактеристична једначина

$$z'' + z = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Како је $\lambda_{1/2} = \pm i$, решење хомеогене једначине је $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Партикуларно решење је полином нултог степена $y_p = A$, па лако налазимо да је $A = 1$. Дакле, функција $z(x)$ је облика

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1$$

Како је $y = ze^{-x^2/2}$, опште решење је

$$y = c_1 e^{-x^2/2} \cos x + c_2 e^{-x^2/2} \sin x + e^{-x^2/2}$$

Задатак 13 *Решити једначину* $4x^4y'' + (8x^3 - 4x^2)y' + y = e^{-1/x}$ *користећи смену* $x = 1/t$

Решење Подсетимо се најпре извода сложене функције. Ако је $y = y(x)$, а уводимо смену $x = x(t)$, тада добијамо сложену функцију $y = y(x(t))$. Први и други извод такве функције је

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t \cdot t'_x, \text{ и аналогно}$$
$$y'' = \frac{dy'_t}{dt}\frac{dt}{dx} = (y''_t \cdot t'_x + y'_t \cdot t''_x) \cdot t'_x$$

У овом случају, како је $x = \frac{1}{t}$, то је $dx = -\frac{1}{t^2}dt$, па је $\frac{dt}{dx} = -t^2$. Сада је

$$y' = y'_t t'_x = -y'_t t^2$$
$$y'' = (y''_t(-t^2) + y'_t(-2t))(-t^2) = y''_t t^4 + 2y'_t t^5$$

Убацимо добијено у полазну једначину (уз то, уместо x пишемо $1/t$)

$$\frac{4}{t^4}(y''_t t^4 + 2y'_t t^3) + (\frac{8}{t^3} - \frac{4}{t^2})(-y'_t t^2) + y = e^{-t}$$

$$4y''_t + \frac{8}{t}y'_t - \frac{8}{t}y'_t + 4y'_t + y = e^{-t}$$
$$4y''_t + 4y'_t + y = e^{-t}$$

Овим смо дату једначину са функционалним коефицијентима свели на једначину са константним коефицијентима. Њој одговарајућа хомогена једначина је $4y''_t + 4y'_t + y = 0$, а карактеристична једначина је $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$. Дакле, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$, па је $y_h = c_1e^{-\frac{1}{2}x} + c_2xe^{-\frac{1}{2}x}$.

Партикуларно решење можемо да нађемо методом неодређених коефицијената. Имамо да је $\alpha = 0$ и $P_n(x) = 1$, па је партикуларно решење облика $y_p = Ae^{-t}$. Нађимо први и други извод

$$y'_p = -Ae^{-t}, y''_p = Ae^{-t}$$

и убацимо у једначину

$$4Ae^{-t} - 4Ae^{-t} + Ae^{-t} = e^{-t}/e^t$$

Дакле, добијамо да је $A = 1$ тј $y_p = e^{-t}$, односно опште решење је

$$y(t) = c_1e^{-\frac{1}{2}x} + c_2xe^{-\frac{1}{2}x} + e^{-t}$$

Задатак 14 *Наћи опште решење једначине* $\sin^2 xy'' + \operatorname{tg} xy' - \cos^2 xy = \cos^2 x \ln \sin x$ *уводећи смену* $\sin x = e^t$.

Решење. Како је $\cos x dx = e^t dt$, односно $\frac{dt}{dx} = \sqrt{1-e^{2t}}e^{-t}$, имамо

$$y' = y'_t \frac{dt}{dx} = y'_t \sqrt{1-e^{2t}}e^{-t}$$

$$\begin{aligned} y'' = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} &= (y''_t\sqrt{1-e^{2t}}e^{-t} + y'_t(-\frac{e^{2t}}{\sqrt{1-e^{2t}}}e^{-t} - e^{-t}\sqrt{1-e^{2t}}))(\sqrt{1-e^{2t}}e^{-}t) \\ &= y''_t(1-e^{2t})e^{-2t} - y'_t e^{-2t} \end{aligned}$$

Убацимо добијено у полазну једначину и уз то заменимо $\cos x = \sqrt{1-e^{2t}}$ да бисмо добили

$$e^{2t}(y''_t(1-e^{2t})e^{-2t} - y'_t e^{-2t}) + \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\sqrt{1-e^{2t}}e^{-t}y'_t - (1-e^{2t})y = (1-e^{2t})t$$

$$y''_t(1-e^{2t}) - y'_t + y'_t - (1-e^{2t})y = (1-e^{2t})t$$

Коначно, након множења са $(1-e^{2t})^{-1}$ добијамо једначину са константним коефицијентима $y''_t - y = t$. Хомогено решење ове једначине је $y_h = c_1e^t + c_2e^{-t}$, а партикуларно решење је полином првог степена, дакле $y_p = At + B$. Пошто је $y''_p = 0$, имамо $-At - B = t$, па је $A = -1$, а $B - 0$. Дакле, опште решење је

$$y = c_1e^t + c_2e^{-t} - t$$

Када вратимо смену добијамо

$$y = c_1e^{\ln \sin x} + c_2e^{\ln \cos x} - \ln \sin x = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \ln \sin x$$

Задатак 15 *Решити једначину* $y'' + \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{1}{(1+x^2)^2}y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *користећи смену* $t = \operatorname{arctg} x$

Решење Имамо $dt = \frac{dx}{1+x^2}$ па је $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, односно за $x = \operatorname{tg} t$, $\frac{dt}{dx} = \cos^2 t$. Нађимо први и други извод

$$y' = y'_t \cos^2 t$$

$$y'' = (y''_t \cos^2 t - 2\sin t \cos t y'_t)\cos^2 t$$

и убацимо у полазну једначину

$$y''_t \cos^4 t - 2\sin t \cos^3 t y'_t + 2\operatorname{tg} t \cos^2 t y'_t \cos^2 t + \cos^4 t y = \cos t$$

Након сређивања и множења са $\frac{1}{\cos^4 t}$ добијамо

$$y_t'' + y = \frac{1}{\cos^3 t}$$

чије је хомогено решење $y_h = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, а партикуларно тражимо методом варијације константи. Добијамо систем

$$c_1' \cos t + c_2' \sin t = 0$$

$$-c_1' \sin t + c_2' \cos t = \frac{1}{\cos^3 t}$$

Када прву једначину помножимо са $\sin t$, а другу са $\cos t$ и саберемо их, добијамо

$$c_1' \cos t + c_2' \sin t = 0$$
$$c_2' = \frac{1}{\cos^2 t}$$

Дакле, након интеграције, $c_2 = -\operatorname{ctg} t + D_2$, $c_1 = -\frac{1}{\cos^2 t} + D_1$. Опште решење је

$$y = (-\frac{1}{\cos^2 t} + D_1)\cos t + (-\operatorname{ctg} t + D_2)\sin t$$

4 Ојлерова диференцијална једначина

Облик: $x^n y^{(n)} + x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + xy' + y = f(x)$

Смена: $x = e^t$, $\dfrac{dt}{dx} = e^{-t}$

Задатак 16 *Решити једначину* $x^2 y'' + xy' - 2y = x \ln x$

Решење Након увођења смене $x = e^t$, нађимо први и други извод

$$y' = y_t' \frac{dt}{dx} = y_t' e^{-t}$$

$$y'' = (y_t'' e^{-t} - e^{-t} y_t') e^{-t} = y_t'' e^{-2t} - y_t' e^{-2t}$$

и убацимо у полазну једначину. Добијамо

$$e^{2t}(y_t'' e^{-2t} - y_t' e^{-2t}) + e^t y_t' e^{-t} - 2y = te^t$$

односно

$$y_t'' - 2y = te^t$$

Како је карактеристична једначина одговарајуће хомогене једначине $\lambda^2 - 2 = 0$, то је хомогено решење $y_h = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$, док је партикуларно решене облика $y_p = (At + B)e^t$. Остаје да диференцирамо партикуларно решење и заменимо у претходну једначину

$$y_p' = Ae^t + (At + B)e^t = (At + (A + B))e^t$$

$$y'' = (At + (2A + B))e^t$$

Дакле,

$$(At + (2A + B))e^t - 2(At + B)e^t = te^t$$

Након множења са e^{-t} и изједанчавањам коефицијената добијамо систем

$$-At = t \text{ и } 2A - B = 0, \text{ па је}$$
$$A = -1,\ B = -2$$

Коначно, опште решење је

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} - t - 2$$

Задатак 17 *Решити* $(2x + 1)^2 y'' - 2(2x + 1)y' + 4y = 0$

Решење У овом случају смена ће бити $2x + 1 = e^t$, па је $\frac{dt}{dx} = 2e^{-t}$. поново тражимо први и други извод

$$y' = y_t' 2e^{-t}$$

$$y'' = (2e^{-t} y_t'' - 2e^{-t} y_t')2e^{-t} = 4e^{-2t} y_t'' - 4e^{-t} y_t'$$

Заменимо добијено у полазну једначину

$$e^{2t}(4e^{-2t} y_t'' - 4e^{-t} y_t') - 2e^t y_t' 2e^{-t} + 4y = 0$$

Након сређивања једначина постаје

$$4y_t'' - 8y_t' + 4y = 0 \Leftrightarrow y_t'' - 2y_t' + 1 = 0,$$

док је њена карактеристична једначина $(\lambda - 1)^2 = 0$ тј., $\lambda = 1$ је двострука нула. Дакле, опште решење је

$$y = c_1 e^t + c_2 t e^t$$