



Studijski program: **Građevinarstvo**

Modul: **HVE**

Godina/Semestar: **III godina / V semestar**

Naziv predmeta (šifra): **Hidraulika 1 (B2H3H1)**

Nastavnici: **doc. dr Budo Zindović** doc. dr Anja Randjelović
doc. dr Robert Ljubičić doc. dr Miloš Milašinović

Naslov predavanja: **Vežba 4: proračun linije nivoa (1/2)**

Datum: **15.11.2022.**

Beograd, 2022.

Hidraulički skok

- Pojava na promeni režima iz **burnog** u **miran**

- Video: [LINK](#)

- Turbulencija**, voda „troši“ svoju mehaničku energiju

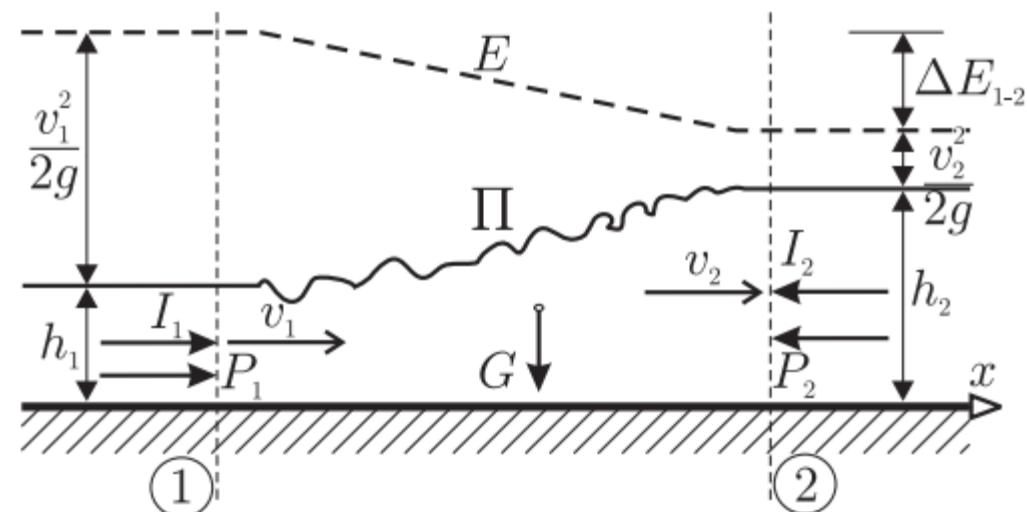
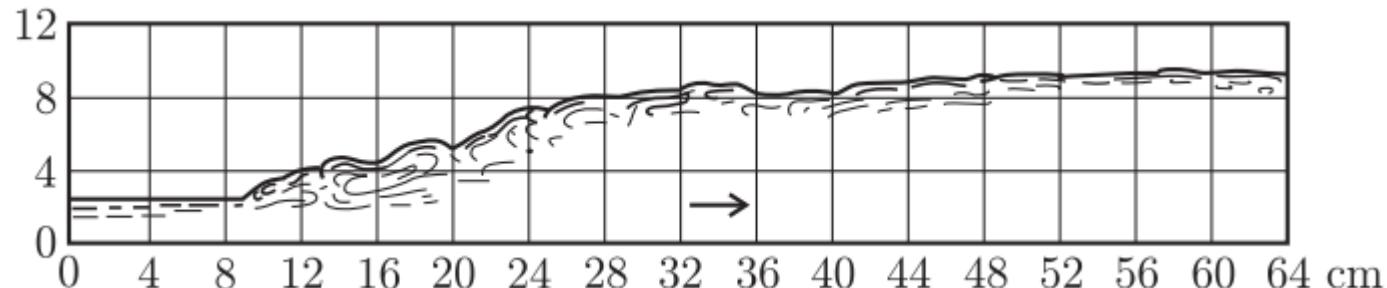
- Jednačina sila** (din. j-na) za zapreminu vode između ① i ②:

- Razmatra se **stabilan** hidraulički skok
- Horizontalno** dno kanala
- Preseci blizu jedan drugom, **trenje zanemarljivo**
- Preostale sile**: Pritisak P i inercijalna sila I

$$P_1 + I_1 = P_2 + I_2$$

- Konačno: $A_1 h_{T1} + \frac{Q^2}{g A_1} = A_2 h_{T2} + \frac{Q^2}{g A_2}$ za proizvoljni oblik preseka

$$\frac{B h_1^2}{2} + \frac{Q^2}{g(B h_1)} = \frac{B h_2^2}{2} + \frac{Q^2}{g(B h_2)}$$
 za pravougaoni presek



Funkcija hidrauličkog skoka

$$A_1 h_{T1} + \frac{Q^2}{g A_1} = A_2 h_{T2} + \frac{Q^2}{g A_2}$$



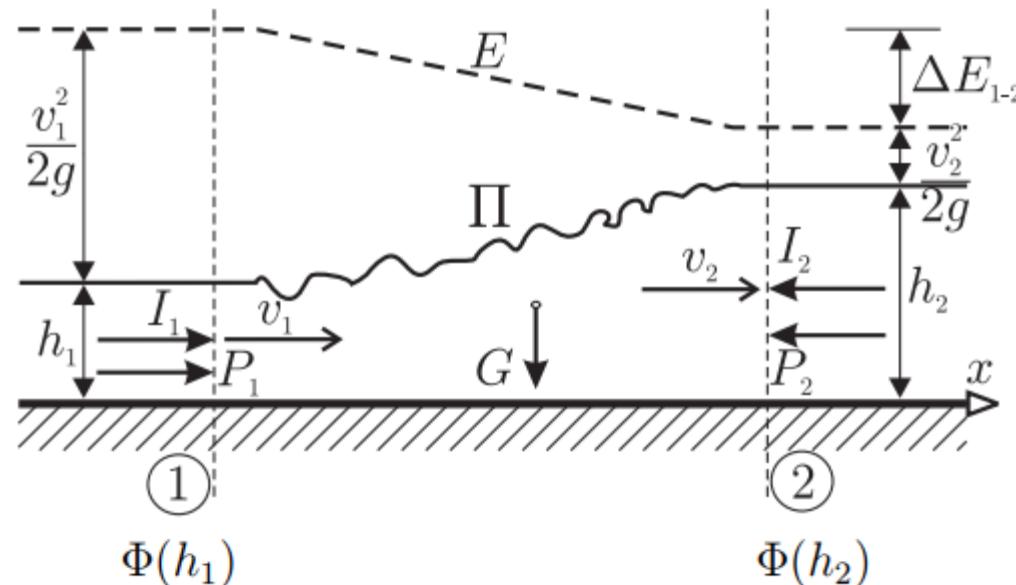
$$S(h_1) + \frac{Q^2}{g A_1} = S(h_2) + \frac{Q^2}{g A_2}$$



$$\Phi(h) = S(h) + \frac{Q^2}{g A(h)}$$



$$\Phi(h_1) = \Phi(h_2)$$



- **Prevod:** stabilan hidraulički skok formira se između dubina koje imaju **istu vrednost** funkcije h. skoka = „proizvode“ istu silu
- Za takav par dubina kaže se da su **„SPREGNUTE“ ili „KONJUGOVANE“**

Funkcija hidrauličkog skoka

- Za jedan presek može se **nacrtati** funkcija skoka $\Phi(h) = S(h) + \frac{Q^2}{g A(h)}$

- Minimum** funkcije je za h_{kr} (kao i specifična energija)

- Za pravougaoni presek:

$$\frac{B h_1^2}{2} + \frac{Q^2}{g(B h_1)} = \frac{B h_2^2}{2} + \frac{Q^2}{g(B h_2)}$$



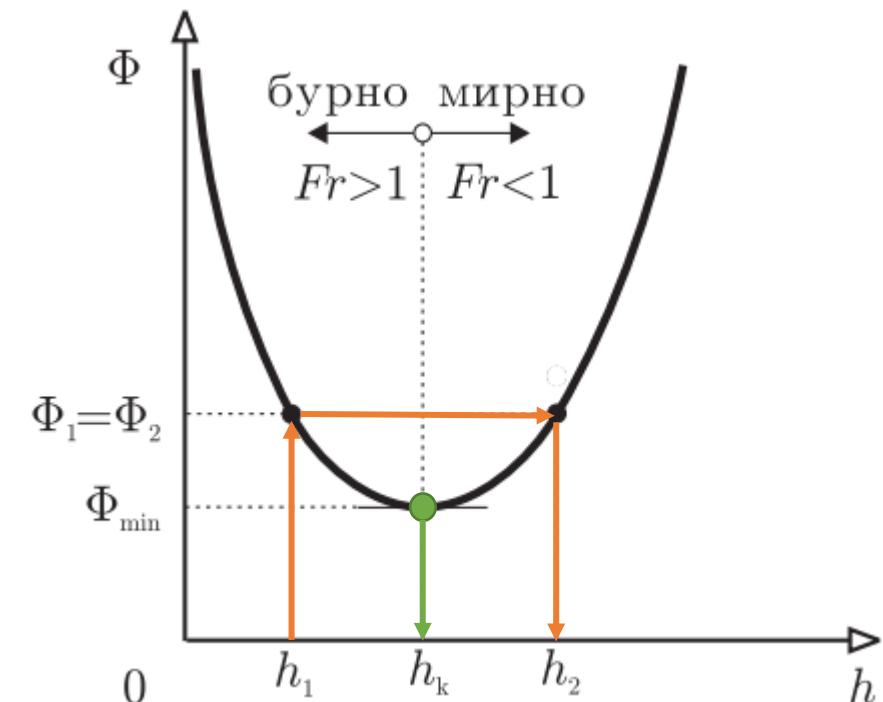
$$\boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_1} \right)}$$

или

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^3} - 1 \right]$$

$$Fr = \frac{Q^2 B}{g A^3}$$

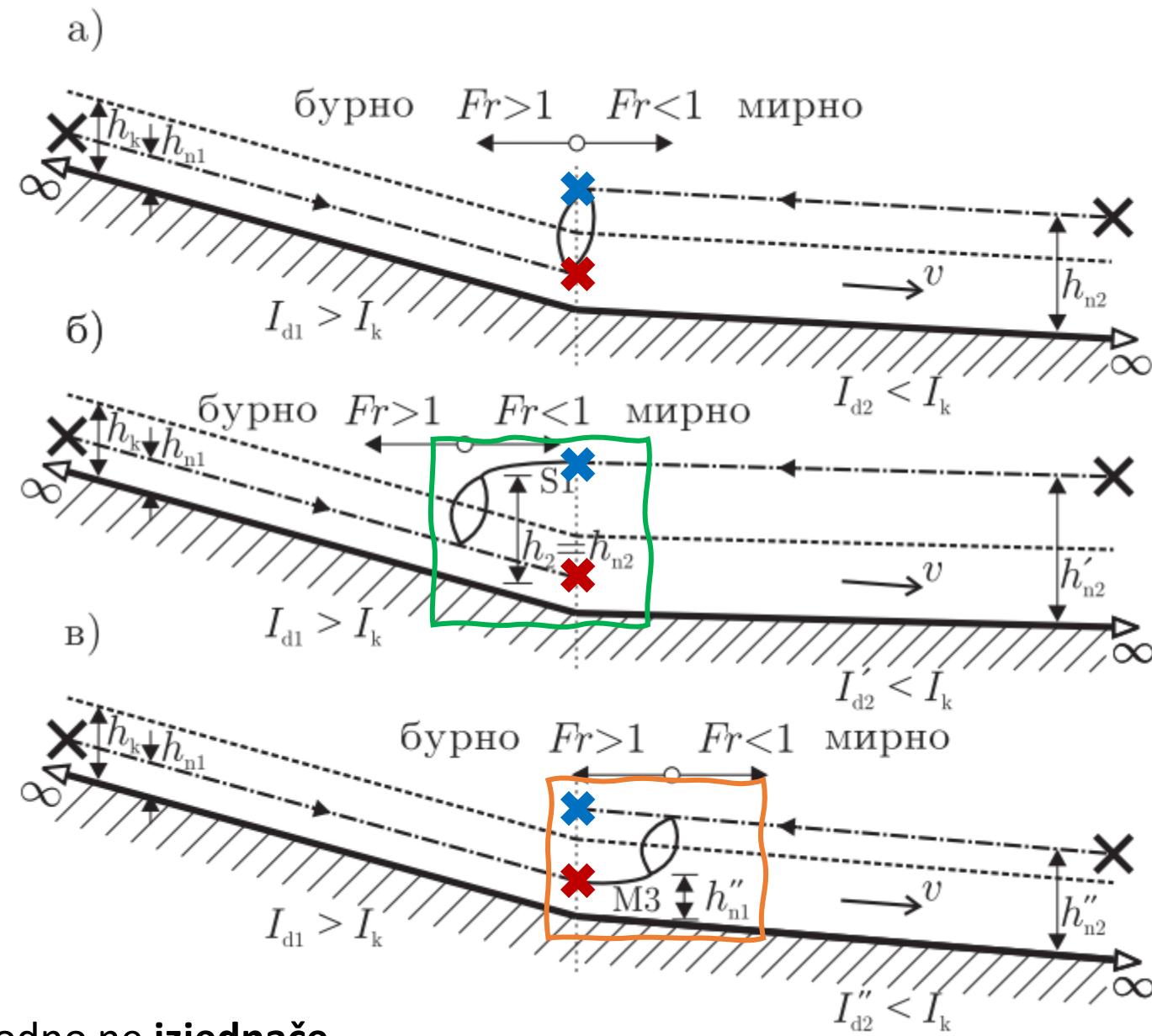
$$h_k = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g B^2}}$$



- U prethodnim izrazima h_1 i h_2 mogu da menjaju mesta (onda promeniti i indeks kod Fr)

Primer – promena nagiba dna kanala

- Uzvodno **burno**, nizvodno **mirno**
- Između se mora javiti **hidraulički skok**
- U opštem slučaju se skok neće javiti na mestu promene nagiba (male šanse za to)
- Uzvodno od promene nagiba **$h_1 < h_{kr}$**
- Nizvodno od promene nagiba **$h_2 > h_{kr}$**
- Na mestu promene nagiba dolazi do „sukoba“:
 - $\Phi(h_1) = \Phi(h_2)$ - skok na mestu prom. nag.
 - $\Phi(h_1) < \Phi(h_2)$ - nizvodna sila veća, odguraće skok uzvodno – **NABAČEN SKOK**
 - $\Phi(h_1) > \Phi(h_2)$ - uzvodna sila veća, odguraće skok nizvodno – **ODBAČEN SKOK**
- Koliko daleko će skok biti **nabačen ili odbačen?**
Dok se funkcije skoka od dubina uzvodno i nizvodno ne **izjednače**



Rezervoar (jezero) kao granični uslov

ISTICANJE IZ JEZERA U KANAL

- Dva slučaja za razmatranje:

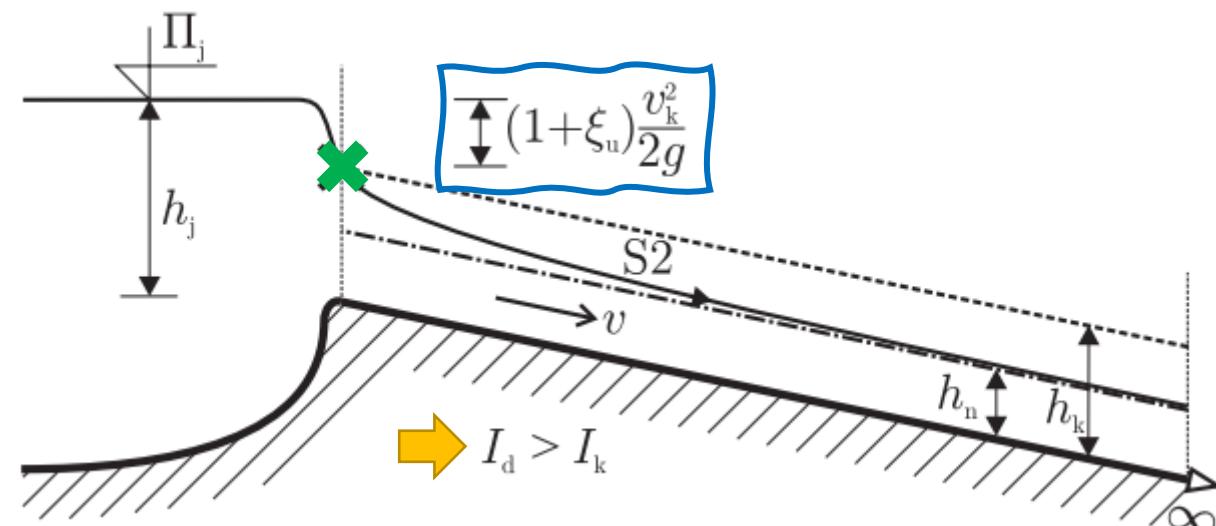
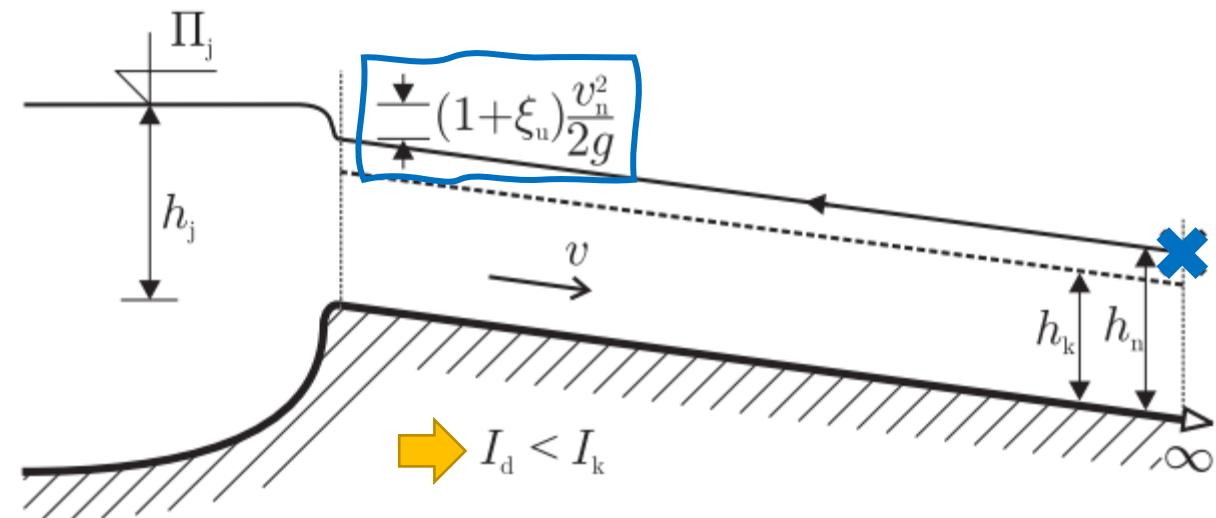
$I_d < I_{kr}$ ($h_N > h_{kr}$):

- granični uslov nizvodno ($\textcolor{blue}{h_N}$)
- uzvodno $h = h_N$ (ili drugoj dostupnoj dubini u mirnom režimu)

$I_d > I_{kr}$ ($h_N < h_{kr}$):

- granični uslov uzvodno ($\textcolor{green}{h_{kr}}$)
- linija S2 do h_N nizvodno

- Gubitak energije na ulazu u kanal



Rezervoar (jezero) kao granični uslov

ISTICANJE IZ JEZERA U KANAL

- Dva slučaja za razmatranje:

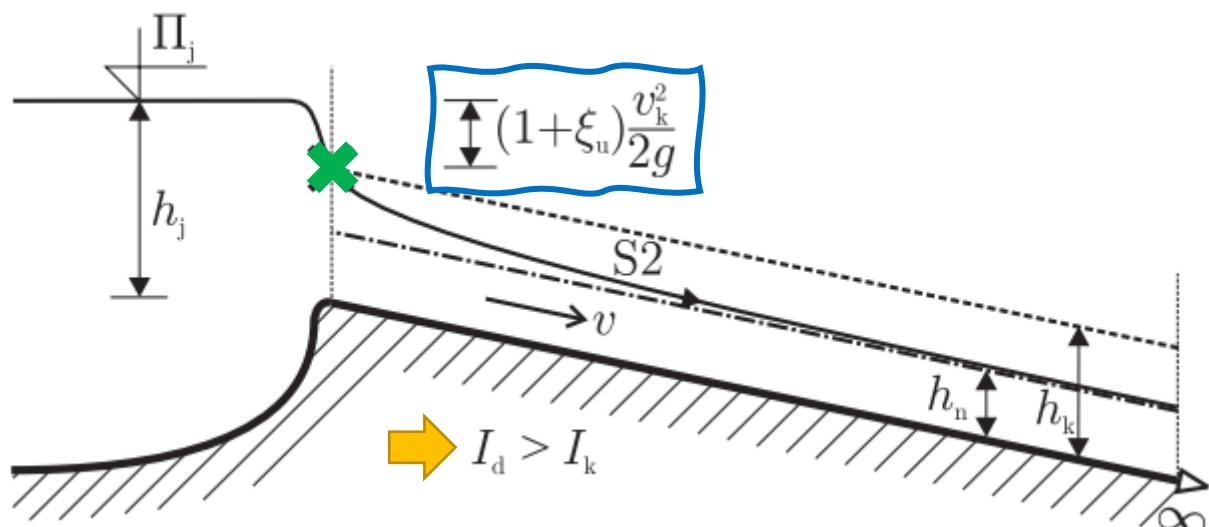
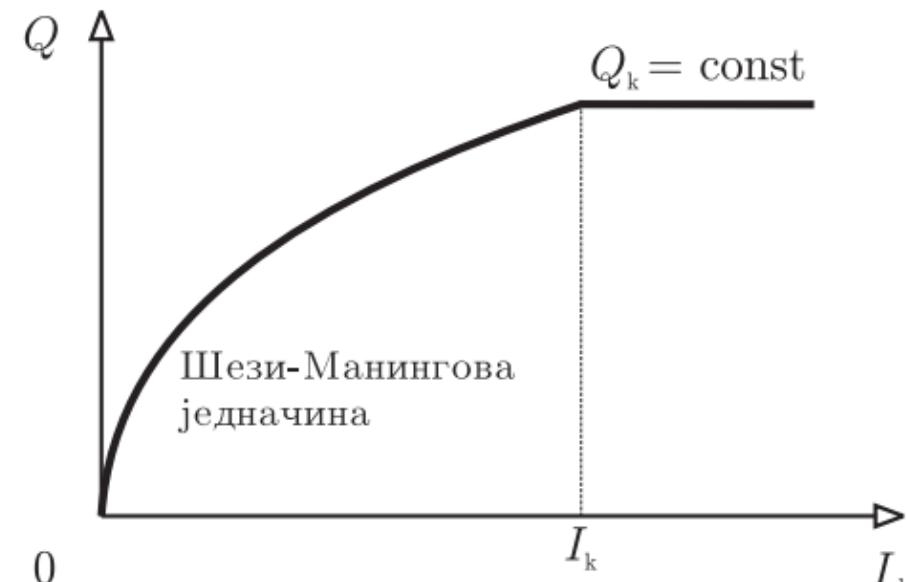
$$I_D < I_{kr} \quad (h_N > h_{kr}):$$

- granični uslov nizvodno ($\textcolor{blue}{h}_{N}$)
- uzvodno $h = h_N$

$$I_D > I_{kr} \quad (h_N < h_{kr}):$$

- granični uslov uzvodno ($\textcolor{green}{h}_{kr}$)
- linija S2** do h_N nizvodno

- Gubitak energije na ulazu u kanal
- Povećanjem nagiba kanala preko I_{kr} ne povećava se protok**



Rezervoar (jezero) kao granični uslov

ISTICANJE IZ KANALA U JEZERO

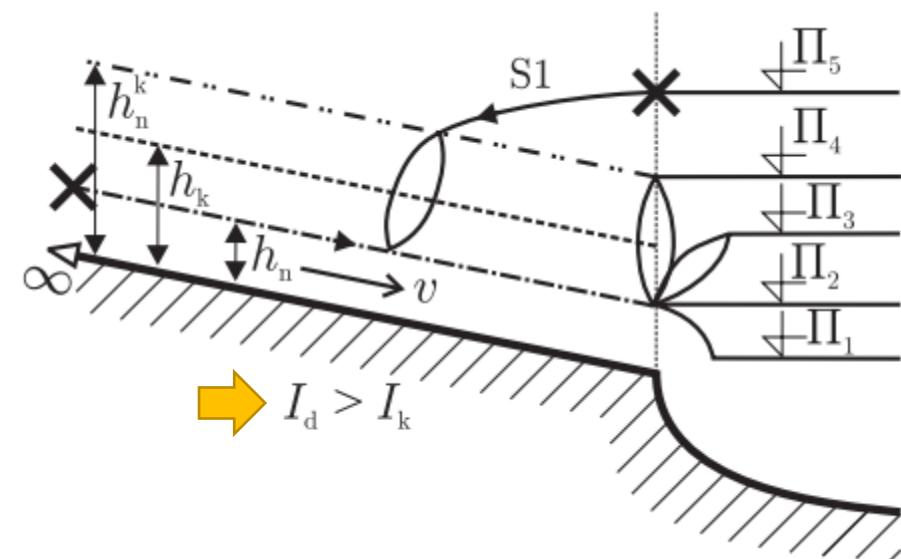
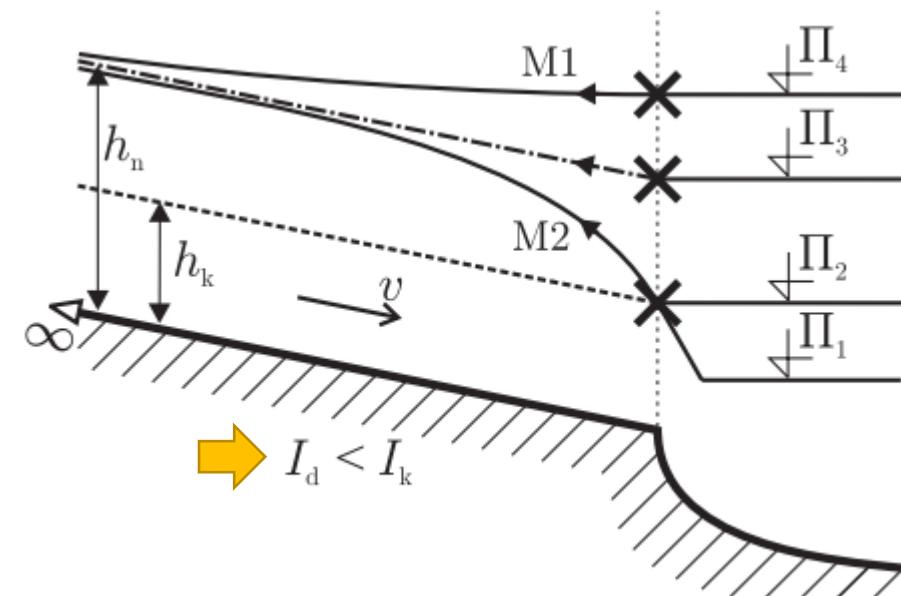
- Dva slučaja za razmatranje:

$$I_d < I_{kr} \quad (h_N > h_{kr}):$$

- granični uslov uvek nizvodno
- uzvodno $h \rightarrow h_N$

$$I_d > I_{kr} \quad (h_N < h_{kr}):$$

- granični uslov uzvodno ili nizvodno (linija S1)
- hidraulički skok ako je $h_{jezera} > h_N$
- skok može biti **nabačen** ili **odbačen**
- u jezeru uvek **mirno** tečenje

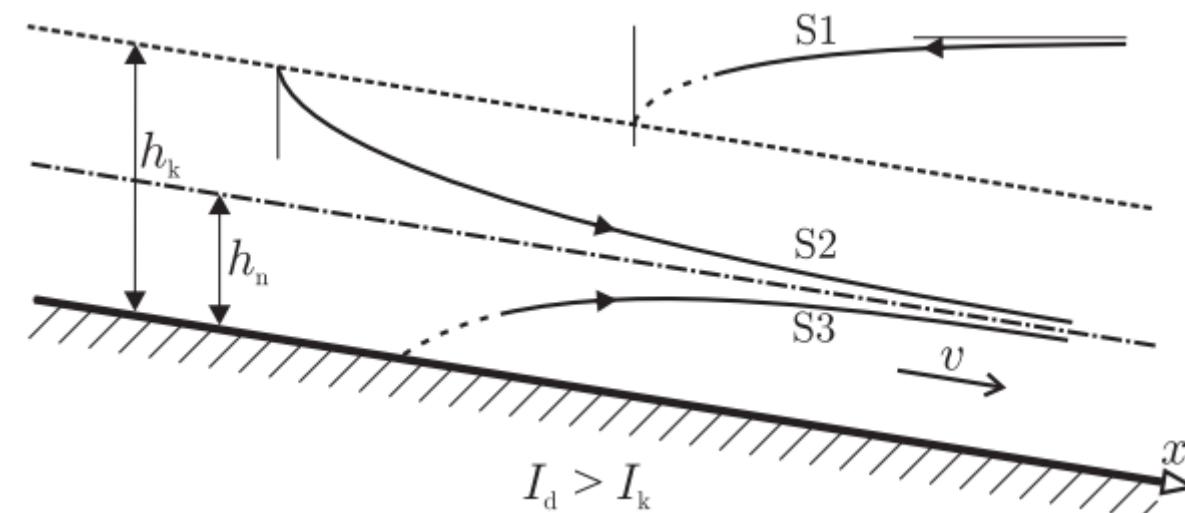
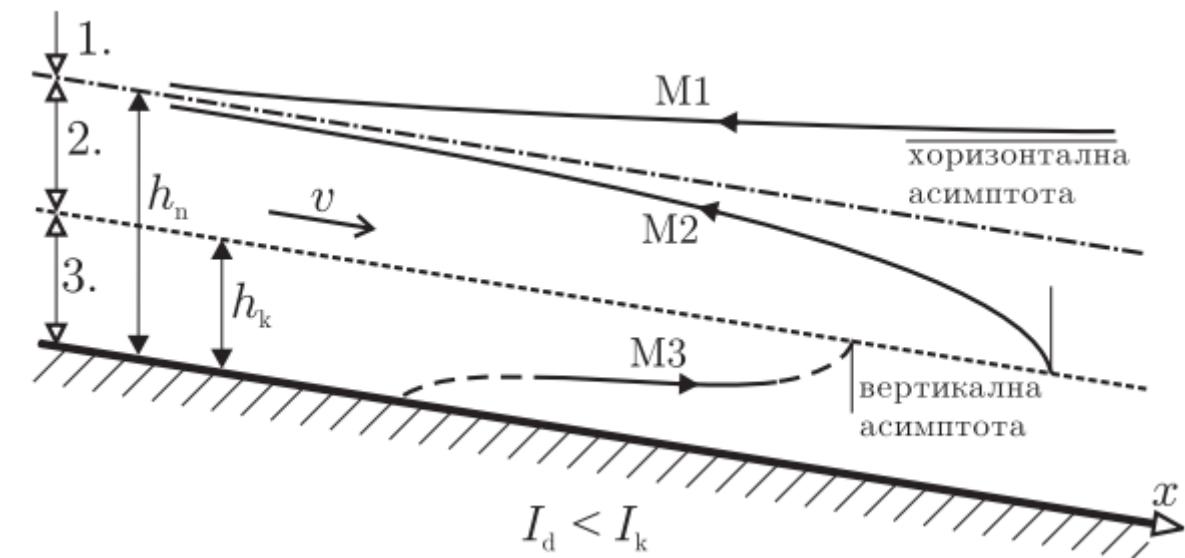


Rekapitulacija

- Strategija rešavanja zadatka sa linijom nivoa:
 1. Odrediti **normalne i kritične** dubine
 2. Utvrditi položaje i vrednosti **graničnih uslova**
 3. Odrediti tipove linija (uglavnom **M ili S**)
 4. Odrediti „**zone**“ u kojima se nalaze granični uslovi (1, 2 ili 3)
 5. Odrediti **režim** tečenja i utvrditi **smer proračuna** linije nivoa:

miran režim = proračun uzvodno ←
buran “ “ = “ “ nizvodno →

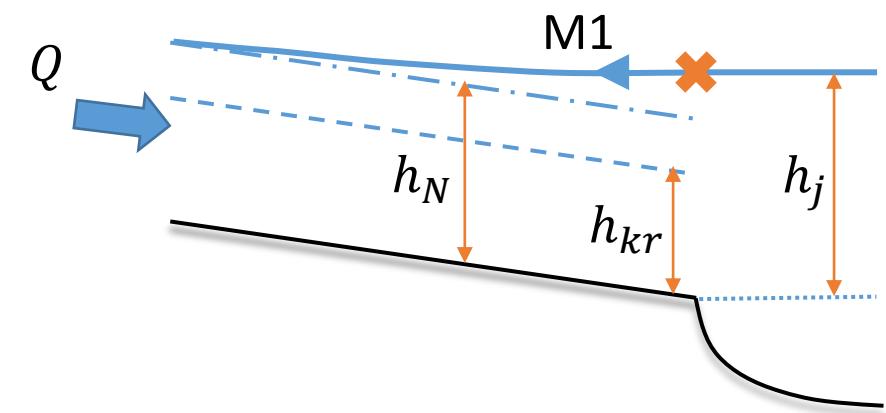
6. Odrediti **granice proračuna** linije nivoa
7. Sprovesti **proračun linije nivoa**



Proračun linije nivoa

Primer 1: isticanje iz kanala u jezero

1. Odrediti h_N i h_{kr} $h_N > h_{kr} \Rightarrow I_D < I_{kr}$
2. Granični uslov (GU) – nivo u jezeru $h_j > h_N > h_{kr}$
3. $h_N > h_{kr} \Rightarrow$ linije tipa M
4. Granični uslov je u zoni 1, važi linija M1:
 - polazi od GU odnosno h_j
 - asymptotski se približava h_N
5. Linija nivoa u **mirnom** režimu \Rightarrow **proračun u uzvodnom smeru**



6. U smeru proračuna:
 - Početna dubina $h_{poč} = h_j$
 - Krajnja dubina $h_{kraj} = h_N$
 - Promena dubina $h_{kraj} - h_{poč} < 0$ (dubina se u smeru proračuna smanjuje)

Proračun linije nivoa

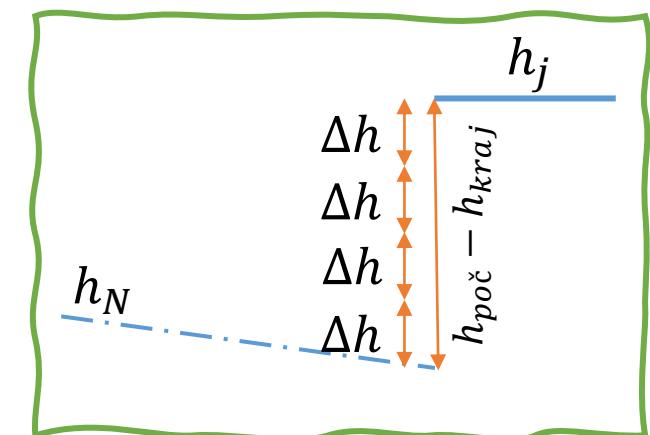
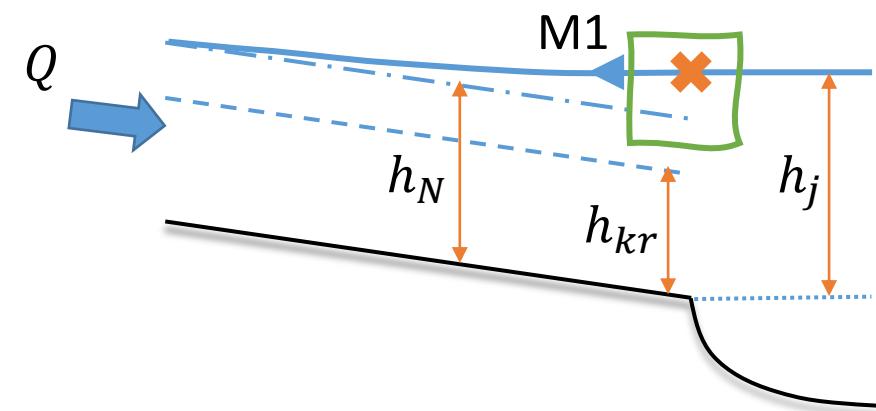
Primer 1: isticanje iz kanala u jezero

7. Proračun linije nivoa

- **Jednačina linije nivoa** $\frac{dh}{dx} = \frac{I_d - I_E}{1 - Fr}$
- **Nezgodna za proračun** jer se ne zna unapred domen proračuna Δx , a desna strana (I_E, Fr) zavisi od h (mora se rešavati iterativno)
- **Domen proračuna Δh** je poznat, domen Δx možda i neograničen

- **Strategija:** podeliti $h_{poč} - h_{kraj}$ na konačan broj delova N

- Umesto dh/dx rešava se recipročni izraz $\frac{dx}{dh} = f(h) = \frac{1 - Fr}{I_d - I_E}$



- Pitanje na koje prethodna jednačina odgovara: „na kom mestu x će se javiti dubina h “

Proračun linije nivoa

Primer 1: isticanje iz kanala u jezero

- Numeričko rešavanje izraza $\frac{dx}{dh} = f(h) = \frac{1 - Fr}{I_d - I_E}$ (na tabli)

- Podaci za primer:

Pravougaoni kanal

$$B = 7 \text{ m}$$

Nagib dna

$$I_d = 0.05\%$$

Maningov koeficijent

$$n = 0.015 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$$

Protok

$$Q = 22 \text{ m}^3/\text{s}$$

Dubina u jezeru

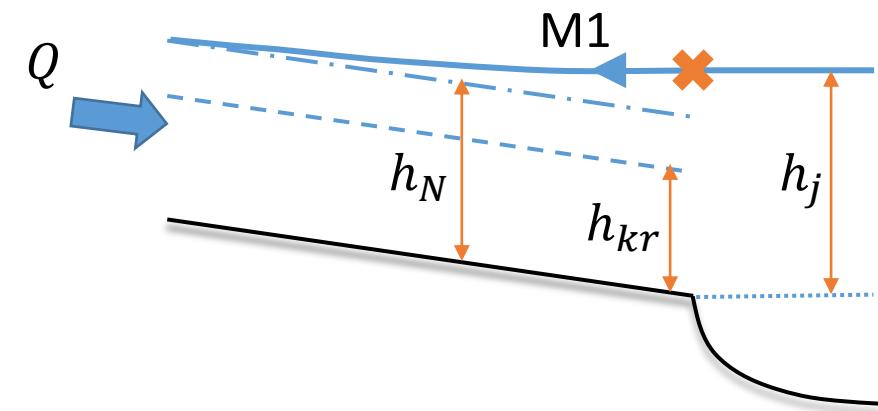
$$h_j = 2.55 \text{ m}$$

- Normalna dubina

$$h_N = 1.85 \text{ m}$$

- Kritična dubina

$$h_{kr} = 1.00 \text{ m} < h_N$$



Proračun linije nivoa

Tabela za proračun linije nivoa:

h [m]
$h_{poč}$
-
-
-
-
h_{kraj}^*

Proračun linije nivoa

Tabela za proračun linije nivoa:

h [m]	Δh [m]
$h_{poč}$	
	+ 
	Δh
	+ 
	Δh
	...
	...
	Δh
h_{kraj}^*	+ 

Proračun linije nivoa

Tabela za proračun linije nivoa:

h [m]	Δh [m]	A [m ²]
$h_{poč}$		$A(h)$
	$\downarrow +$	Δh
	$\downarrow +$	Δh
		...
		...
h_{kraj}^*	$\downarrow +$	Δh

$$A = f(h)$$

Proračun linije nivoa

Tabela za proračun linije nivoa:

h [m]	Δh [m]	A [m ²]	O [m]
$h_{poč}$		$A(h)$	$O(h)$
	$\downarrow +$	Δh	
	$\downarrow +$	Δh	
		...	
		...	
	$\downarrow +$	Δh	
h_{kraj}^*			

$$O = f(h)$$

Proračun linije nivoa

Tabela za proračun linije nivoa:

h [m]	Δh [m]	A [m^2]	O [m]	R [m]
$h_{poč}$		$A(h)$	$O(h)$	A/O
$+ \Delta h$				
$+ \Delta h$				
...				
$+ \Delta h$				
h_{kraj}^*				

$$R = \frac{A}{O}$$

Proračun linije nivoa

Tabela za proračun linije nivoa:

h [m]	Δh [m]	A [m ²]	O [m]	R [m]	Fr [-]
$h_{poč}$		$A(h)$	$O(h)$	A/O	$Fr(h)$
$+ \downarrow$	Δh				
$+ \downarrow$	Δh				
...					
...					
$+ \downarrow$	Δh				
h_{kraj}^*					

$$Fr = \frac{Q^2 B}{g A^3}$$

Proračun linije nivoa

Tabela za proračun linije nivoa:

h [m]	Δh [m]	A [m^2]	O [m]	R [m]	Fr [-]	I_E [-]
$h_{poč}$		$A(h)$	$O(h)$	A/O	$Fr(h)$	$I_E(h)$
$+$	Δh					
$+$	Δh					
...						
$+$	Δh					
h_{kraj}^*						

$$I_E = \frac{n^2 Q^2}{(A R^{2/3})^2}$$

Proračun linije nivoa

Tabela za proračun linije nivoa:

h [m]	Δh [m]	A [m^2]	O [m]	R [m]	Fr [-]	I_E [-]	f [-]
$h_{poč}$		$A(h)$	$O(h)$	A/O	$Fr(h)$	$I_E(h)$	$f(h)$
$+$	Δh						
$+$	Δh						
...							
...							
h_{kraj}^*	Δh						

$$f(h) = \frac{1 - Fr}{I_d - I_E}$$

Proračun linije nivoa

Tabela za proračun linije nivoa:

h [m]	Δh [m]	A [m^2]	O [m]	R [m]	Fr [-]	I_E [-]	f [-]	f_{sr} [-]
$h_{poč}$		$A(h)$	$O(h)$	A/O	$Fr(h)$	$I_E(h)$	$f(h)$	
$+ \Delta h$							$f(h + \Delta h)$	f_{sr}
$+ \Delta h$								
...								
$+ \Delta h$								
h_{kraj}^*								

$$f_{sr} = \frac{f(h) + f(h + \Delta h)}{2}$$

Proračun linije nivoa

Tabela za proračun linije nivoa:

h [m]	Δh [m]	A [m^2]	O [m]	R [m]	Fr [-]	I_E [-]	f [-]	f_{sr} [-]	Δx [m]
$h_{poč}$		$A(h)$	$O(h)$	A/O	$Fr(h)$	$I_E(h)$	$f(h)$		
	Δh							f_{sr}	Δx
	Δh						$f(h + \Delta h)$		
	Δh								
...									
	Δh								
h_{kraj}^*	Δh								

$$\Delta x = f_{sr} \Delta h$$

Proračun linije nivoa

Tabela za proračun linije nivoa:

h [m]	Δh [m]	A [m^2]	O [m]	R [m]	Fr [-]	I_E [-]	f [-]	f_{sr} [-]	Δx [m]	x [m]
$h_{poč}$		$A(h)$	$O(h)$	A/O	$Fr(h)$	$I_E(h)$	$f(h)$	f_{sr}		$x_{poč}$
	Δh						$f(h + \Delta h)$	f_{sr}	Δx	$x_{poč} + \Delta x$
										$+ \Delta x$
										$+ \Delta x$
...										$+ \Delta x$
										$+ \Delta x$
										$+ \Delta x$
										$+ \Delta x$
h_{kraj}^*	Δh									$+ \Delta x$

$$x(h + \Delta h) = x(h) + \Delta x$$

Proračun linije nivoa

Tabela za proračun linije nivoa:

h [m]	Δh [m]	A [m^2]	O [m]	R [m]	Fr [-]	I_E [-]	f [-]	f_{sr} [-]	Δx [m]	x [m]	e [m]
$h_{poč}$		$A(h)$	$O(h)$	A/O	$Fr(h)$	$I_E(h)$	$f(h)$	f_{sr}		$x_{poč}$	$e(h)$
	$\downarrow +$	Δh						f_{sr}	Δx	$\downarrow +$	
	$\downarrow +$	Δh					$f(h + \Delta h)$			$\downarrow +$	
...										$\downarrow +$	
	$\downarrow +$	Δh								$\downarrow +$	
h_{kraj}^*	$\downarrow +$									$\downarrow +$	

$$e = h + \frac{V^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Proračun linije nivoa

Primer 2: promena nagiba dna kanala

- **Podaci za primer:**

Pravougaoni kanal

Nagib dna užv. kanala

Nagib dna nizv. kanala

Maningov koeficijent

Protok

$$B = 7 \text{ m}$$

$$I_{D1} = 0.05\%$$

$$I_{D2} = 0.50\%$$

$$n = 0.015 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$$

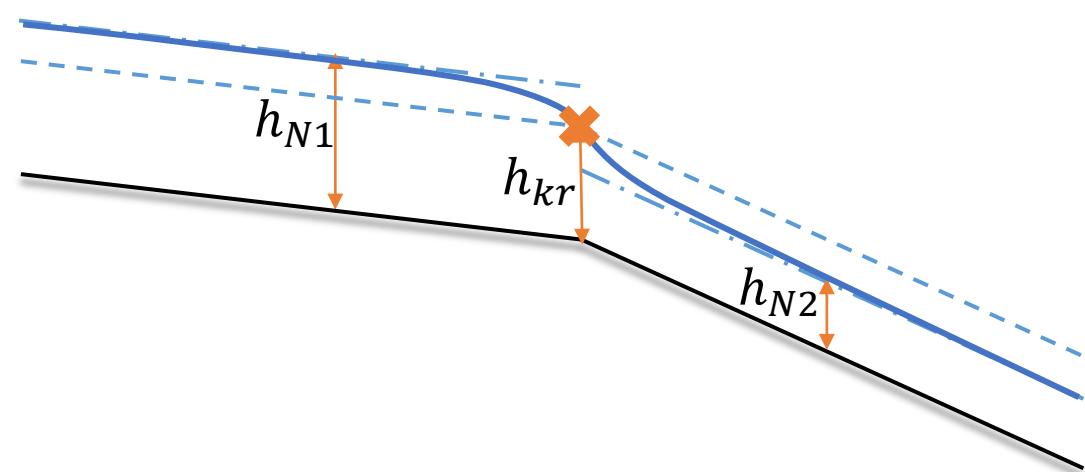
$$Q = 22 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Normalna dubina užv.
- Normalna dubina nizv.
- Kritična dubina

$$h_{N1} = 1.85 \text{ m}$$

$$h_{N2} = 0.86 \text{ m}$$

$$h_{kr} = 1.00 \text{ m}$$



Proračun linije nivoa

Saveti:

1. **Broj segmenata** treba da bude razuman za ručni rad ($N = 4..6$), broj redova u tabeli biće $N + 1$
2. Imati u vidu grešku zaokruživanja, raditi sa barem 3 značajne cifre
3. Imati u vidu **ponašanje linije nivoa u okolini h_N i h_{kr}**
(promeniti granice proračuna kako bi se izbegao slučaj gde je $h = h_N$ ili $h = h_{kr}$)
4. Proračun **ne raditi izvan granica kanala** (**samo** dok su stacionaže x unutar dužine kanala L)
(ne zanimaju nas dubine koje se u kanalu ne mogu formirati)
5. Na granicama kanala **često neophodna interpolacija** između dve dubine kako bismo odredili vrednost h za konkretno x
(u proračunu nemamo kontrolu nad x već samo nad h , npr. želimo da odredimo dubinu na mestu $x = 1000$ m a imamo u tabeli poznate dubine za $x = 923$ m i $x = 1156$ m)
6. Prilikom crtanja koristiti **distordovanu razmeru**
($R_H \neq R_V$)
7. Dubine se crtaju mereći ih **od dna** na datoј stacionaži, prvo crtati dno kanala
($Z = Z_{dna} + h$)
8. Predvideti potencijalno mesto javljanja **hidrauličkog skoka** – često potreban proračun dodatne linije nivoa