Универзитет у Београду-Грађевински факултет

Студијски програм: ГРЂЕВИНАРСТВО

Година/семстар: Друга/први

Наыив предмета (шифра предмета): МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 2 (Б2О2А2)

Наставник: АЛЕКСАНДРА ЕРИЋ

Наслов предавања: ФУРИЈЕОВИ РЕДОВИ

Датум: 12.10.2021.

Београд, 2021.

0.1 Фуријеови редови

Дефиниција 1: Функционални ред облика
$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots =$
$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$
је тригонометријски ред, где су a_i, b_i коефицијенти тригонометријског реда.

Приметимо да је тригонометријски ред линеарна комбинација периодичних функција $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...,$ па и сам мора бити периодична функција.

Дефиниција 2: Развити периодичну функцију $f(x)$ у тригонометријски ред, значи наћи конвергентан тригонометријски ред који конвергира ка тој функцији.

Ортогоналност тригонометријског система:

Дефиниција 3: За две функције $f(x)$ и $g(x)$ које су непрекидне на сегменту $[a, b]$ кажемо да су ортогоналне акко важи

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Пример 1: Функције $f(x) = x$ и $g(x) = x^2$ су непрекидне функције на сегменту $[-1, 1]$ а узајамно су ортогоналне јер важи

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0.$$

Дефиниција 4: Коначан или бесконачан систем функција $\phi_1(x), \phi_2(x), ...$ које су непрекидне на сегменту $[a, b]$ и важи да је $(\forall n \in \mathbb{N})\, \phi_n(x) \neq 0$ је ортогоналан систем ако и само ако важи $(\forall n, m \in \mathbb{N})\,(n \neq m)\displaystyle\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0.$

Теорема 1: Тригонометријски систем $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...$ је ортогоналан на сегменту $[-\pi, \pi]$.

Доказ:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

па закључујемо да су функције $(\forall n \in \mathbb{N})\,\{1, \sin nx, \cos nx\}$ ортогоналне.

За $(\forall n, m \in \mathbb{N})\,(n \neq m)$ важи:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)\, dx = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)\, dx = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m-n)x + \sin(m+n)x)\, dx = 0$$

Закључујемо да су дате функције ортогоналне.

Теорема 2: Ако је функција $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, и ако је дати ред равномерно конвергентан на сегменту $[-\pi, \pi]$ (приметимо да је тада због периодичности равномеран свуда), онда су коефицијенти:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Доказ: Приметимо да због равномерне конвергенције ред можемо интегралити члан по члан:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right) =$$

$$= a_0\pi, \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Приметимо да важи:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)\,dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx = \pi$$

Ако ово применимо, имамо:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)^{\backslash\cdot\cos mx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx\right) = a_m\pi.$$

Коначно :

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx.$$

Слично се добија и да је:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx.$$

Дефиниција 5: Функција $f(x)$ је део по део монотона на сегменту $[a,b]$ ако се сегмент може поделити на коначно много подсегмената тачкама $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < b = x_n$, тако да је на сваком сегменту $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, n}$ функција $f(x)$ монотона.

Приметимо да ако је функција део по део монотона и ограничена она може да има само прекид прве врсте.

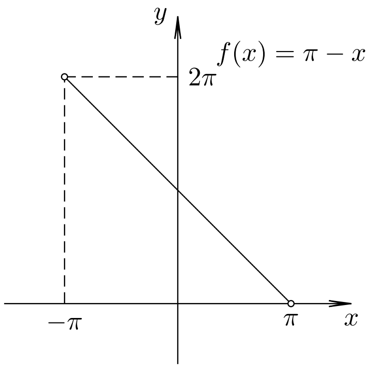
Дефиниција 6: Тригонометријски ред
$\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ са коефицијентима:
$a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$, $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$,
зове се Фуријеов ред.

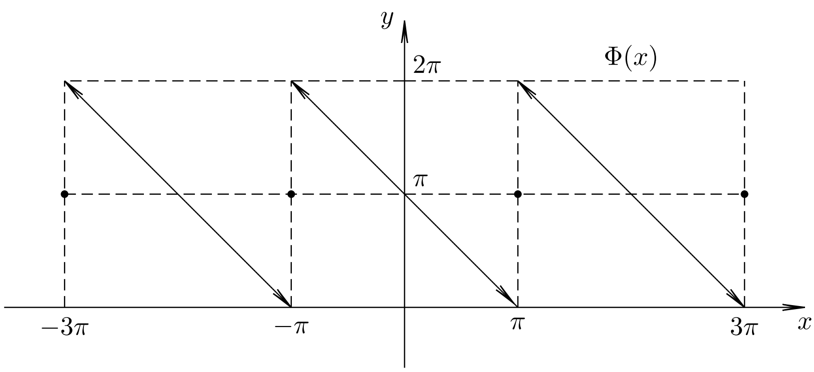
Свакој функцији $f(x)$ интеграбилној на $[-\pi, \pi]$ одговара Фуријеов ред $\Phi(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, међутим није довољна само интеграбилност да би важила једнакост $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Дирихлеова теорема: Ако је периодична функција $f(x)$ са периодом 2π део по део монотона и ограничена на сегменту $[-\pi, \pi]$, онда је веза између Фуријеовог реда $\Phi(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ и функције $f(x)$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi), f(x) \text{ је непрекидна у } x \\ \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & x \in (-\pi, \pi), f(x) \text{ има прекид у } x \\ \dfrac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = -\pi \vee x = \pi \end{cases}$$

Пример 1: Развити функцију $f(x) = \pi - x$ за $x \in [-\pi, \pi]$ у Фуријеов ред $\Phi(x)$, нацртати график Фуријеовог реда и искоментарисати везу између Фуријеовог реда $\Phi(x)$ и функције $f(x)$.





Коефицијенти Фуријеовог реда су:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{n}(\pi - x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\;\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin nx dx = -\;\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,(\pi - x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx =$$

$$= \frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^n$$

$$\Phi(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^n \sin nx$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi) \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \pi, & x = -\pi \vee x = \pi \end{cases},$$

$$\Phi(x) = \Phi(x + 2\pi)$$

Фуријеов ред функције дефинисане на сегменту $[a, b]$:

Уколико развијамо функцију $f(x)$ дефинисану на сегменту $[a, b]$ у Фуријеов ред, тада ће Фуријеов ред бити такође периодична функције али са периодом $(b - a)$, па коефицијенте Фуријеовог реда рачунамо на следећи начин:

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

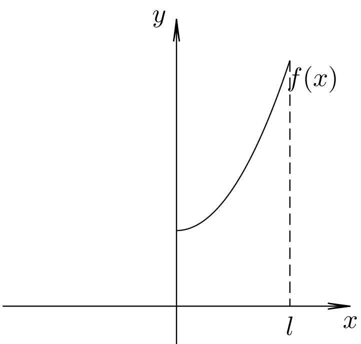
$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx,$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx.$$

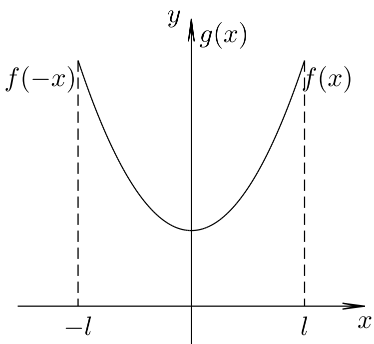
$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$$

Косинусни Фуријеов ред:

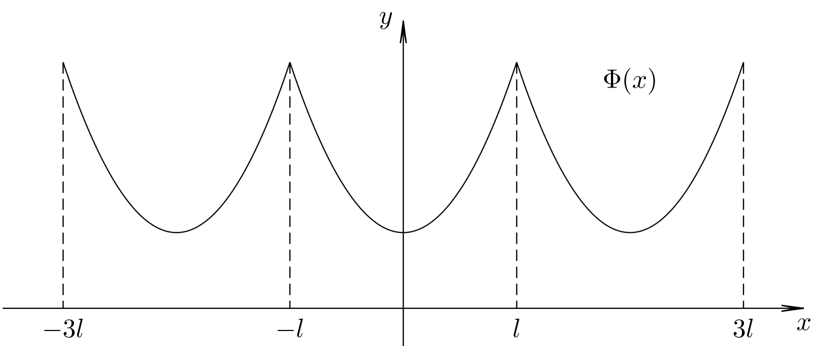
Када развијамо функцију $f(x)$, за $x \in [0,l]$ у косинусни Фуријеов ред, то значи да развијамо њено парно продужење у обичан Фуријеов ред. Парно продужење функције $f(x)$ је функција $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,l] \\ f(-x), & x \in [-l,0] \end{cases}$.



сл. 1



сл. 2



сл. 3

График Фуријеовог реда који се добије на тај начин, односно график косиниусног Фуријеовог реда функције $f(x)$ за $x \in [0,l]$ је приказан на слици 3 а коефицијенти реда се рацхунају на следећи начин:

-како су функције $g(x)$ и $\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ парне функције и њихов производ је парна функција која се интеграли по симетричном интервалу, то имамо да су коефицијенти a_0 и a_n:

$$a_0 = \frac{2}{2l}\int_{-l}^{l} g(x)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx,$$
$$a_n = \frac{2}{2l}\int_{-l}^{l} g(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

-како је функција $g(x)$ парна, а функција $\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ непарна, њихов производ је непарна функција која се интеграли по симетричном интервалу, па закључујемо да је коефицијент $b_n = 0$.

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

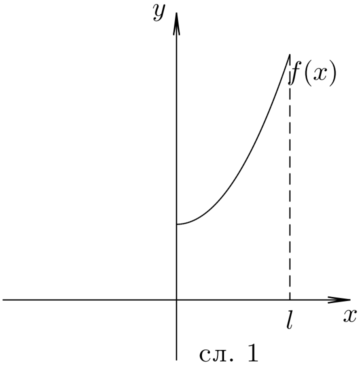
Веза између косинусног Фуријеовог реда $\Phi(x)$ и функције $f(x)$ је:

$\Phi(x) = f(x), x \in [0, l]$.

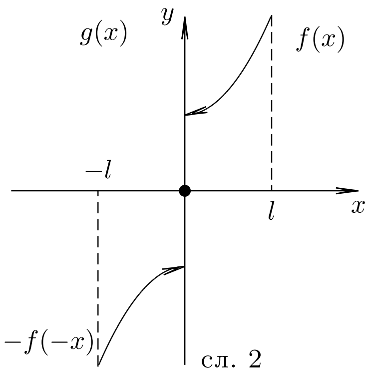
Напомена: Ово важи ако је функција непрекидна, ако има прекиде прве врсте исто је као иначе. Ово важи и за синусне редове.

Синусни Фуријеов ред:

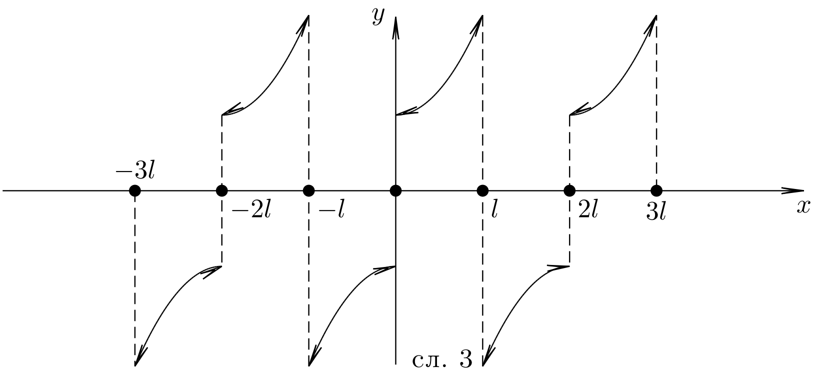
Када развијамо функцију $f(x)$, за $x \in [0, l]$ у синусни Фуријеов ред, то значи да развијамо њено непарно продужење у обичан Фуријеов ред. Неарно продужење функције $f(x)$ је функција $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, l] \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & x \in [-l, 0) \end{cases}$.



сл. 1



сл. 2



сл. 3

График Фуријеовог реда који се добије на тај начин, односно график синиусног Фуријеовог реда функције $f(x)$ за $x \in [0, l]$ је приказан на слици 3, а коефицијенти реда се рачунају на следећи начин:

-како је функција $g(x)$ непарна, а функција $\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ парна функција, њихов производ је непарна функција која се интеграли по симетричном интервалу па су коефицијенти $a_0 = 0$ и $a_n = 0$.

-како су функције $g(x)$ и $\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ непарне функције, њихов производ је парна функција која се интеграли по симетричном интервалу, па имамо:

$$b_n = \frac{2}{2l}\int_{-l}^{l} g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

Веза између синусног Фуријеовог реда $\Phi(x)$ и функције $f(x)$ је:

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0,l) \\ \dfrac{g(x+0)+g(x-0)}{2} = 0, & x = 0, l \end{cases}, \; \Phi(x) = \Phi(x+2l).$$