Универзитет у Београду-Грађевински факултет

Студијски програм: ГРЂЕВИНАРСТВО

Година/семстар: Друга/први

Наыив предмета (шифра предмета): МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 2 (Б2О2А2)

Наставник: АЛЕКСАНДРА ЕРИЋ

Наслов предавања: ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДОВИ-СТЕПЕНИ РЕДОВИ

Датум: 7.10.2021.

Београд, 2021.

Глава 1

Функционални редови

1.1 Теорија

Дефиниција 1. Низ функција $\{f_n(x)\}, f_n : E \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, просто, односно тачка по тачка, конвергира ка функцији $f : E \to \mathbb{R}$ ако за свако фиксирано $x_0 \in E$ бројни низ $\{f_n(x)_0)\}$ конвергира ка броју $f(x_0)$, а за скуп E кажемо да је интервал конвергенције. Ознака за просту, тачка по тачка, конвергенцију је $f_n(x) \to f(x), x \in E$.

Дефиниција 2. Низ функција $\{f_n(x)\}, f_n : E \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, равномерно, односно униформно, конвергира ка функцији $f : E \to R$, на скупу E ако важи
$(\forall \varepsilon > 0) \, (\exists n_0 = n_0 \, (\varepsilon)) \, (\forall n > n_0 \wedge \forall x \in E \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.
Ознака за равномерну, униформну, конвергенцију је
$f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in E$.

Дефиниција 3. Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$, где $f_n : E \to \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$, просто, односно тачка по тачка, конвергира својој суми $S(x)$ ако низ парцијалних сума $S_n(x) = f_1(x) = \cdots + f_n(x)$ просто конвергира ка $S(x)$.

(Простије речено: Функционални ред конвергира у тачки $x_0 \in E$, ако бројни ред конвергира $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.)

Дефиниција 4. Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$, где $f_n : E \to \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$, равномерно конвергира својој суми $S(x)$ ако низ парцијалних сума $S_n(x)$ равномерно конвергира на E ка $S(x)$.

Дефиниција 5. Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$, где $f_n : E \to \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$, апсолутно конвергира ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)| + \cdots$, просто конвергира.
(Простије речено: Функционални ред апсолутно конвергира на интервалу D, ако за свако $x_0 \in D$ важи да бројни ред $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$ конвергира.)

Пример 1:

Коши $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(1+x^2)^n}$

$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{(1+x^2)^n}} = \dfrac{n}{(1+x^2)} = \infty$ за $\forall x \in \mathbb{R}$. Интервал конвергенције је $(-\infty, +\infty)$.

Пример 2:

Даламбер $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{nx}$

$l = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} e^x = e^x$

- када је $l = e^x < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$ ред конвергира

- када је $x \geq 0$ ред дивергира.

Критеријуми равномерне конвергенције функционалних редова:

Вајерштрасов став: Ако је дат функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots, f_n : E \to \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$, и за свако $f_n(x)$, постоји $f_n \in \mathbb{R}$, тако да важи $|f_n(x)| < f_n, \forall x \in E$ и ако бројни ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ конвергира онда функционални ред равномерно конвергира за $x \in E$.
доказ:
Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$, а парцијалне суме функционалног реда означимо са $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ а са $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ парцијалне суме бројног реда. Доказ теореме директно следи из чињенице да важи
$\sup_{x\in E} |S(x) - S_n(x)| < \sup_{x\in E} (|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots)$
$= \sup_{x\in E} |f_{n+1}(x)| + \sup_{x\in E} |f_{n+2}(x)| + \cdots < f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots = s - s_n$.

Пример 3:

Испитати равномерну конвергенцију и интервал конвергенције функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.
Уочимо да важи $|\frac{\cos nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}$, а како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира то закључујемо да и функционални ред равномерно конвергира за $x \in \mathbb{R}$.

Особине равномерно конвергентних функционалних редова:

Теорема 1: Ако функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвергира на сегменту $[a, b]$ и функција $g(x)$ је ограничена на сегменту $[a, b]$, онда функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g(x)$ равномерно конвергира на сегменту $[a, b]$.

доказ:
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $[a,b]$ и $|g(x)| \leq M, \forall x \in [a,b]$ онда вазхи $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in \mathbb{N})|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ и $|S(x)g(x) - S_n(x)g(x)| = |g(x)||S(x) - S_n(x)| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

Теорема 2: Функције $f_n(x)$ су непрекидне на $[a,b]$, и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвергира на сегменту $[a,b]$ онда је $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ такође непрекидна функција на сегменту $[a,b]$.
доказ: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ па такође за неко $h > 0$ важи $|S(x+h) - S_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Због непрекидности функција $f_n(x)$ имамо да је и парцијална сума S_{n_0} непрекидна функција као коначан збир непрекидних функциј, па важи $|S_{n_0}(x+h) - S_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тада важи $|S(x+h) - S(x)| = |S(x+h) - S_{n_0}(x+h) + S_{n_0}(x+h) - S_{n_0}(x) + S_{n_0}(x) - S(x)| < |S(x+h) - S_{n_0}(x+h)| + |S_{n_0}(x+h) - S_{n_0}(x)| + |S_{n_0}(x) - S(x)| = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Пример:$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x) = (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \cdots, S_n(x) = (1-x)\dfrac{1-x^n}{1-x} = 1 - x^n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases} \quad S(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$S(x)$ није непрекидна функција на сегменту $[0,1]$ а функције $f_n(x)$ јесу. Али ни ред $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x)$ није равномерно конвергентан јер $|S(x) - S_n(x)| \leq x^n < \varepsilon$ за $n > n_0$ где је $x^n < \varepsilon$, за $n > \log_x \varepsilon = \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$ па имамо $n_0 = n_0(x)$ (n зависи о дх).

Теорема 3: Нека ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ равномерно конвергира на сегменту $[a,b]$ и нека су $f_n(x)$ непрекидне функције на истом сегменту. Онда важи

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt, x, x_0 \in [a,b].$$

Доказ: Како ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ равномерно конвргира то за $\frac{\varepsilon}{b-a}$ постоји $n_0 \in N$ тако да за свако $n > n_0$ важи $|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

$$\left| \int_{x_0}^{x} S(t)dt - \int_{x_0}^{x} S_n(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x} (S(t) - S_n(t))dt \right| \leq$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \frac{\varepsilon}{b-a}|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Дакле

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} S_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} f_k(t)dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} f_k(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_k(x).$$

Теорема 4: Нека ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвергира и наке функције $f_n(x)$ имају непрекидне изводе, а ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ равномерно конвергира на сегменту $[a, b]$. Онда за свако $x \in [a, b]$ важи

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Доказ: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x), \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sigma(x)$, за неко $x, x_0 \in [a, b]$ важи $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sigma(t)dt = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) -$ $\displaystyle f_n(x_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = S(x) - S(x_0)$. Према Теореми

2 $\sigma(x)$ је непрекидна функција и зато важи $\int_{x_0}^{x} \sigma(t)dt = S(x) - S(x_0)$. Ако сада диференцирамо леву и десну страну добијамо $\left(\int_{x_0}^{x} \sigma(t)dt\right) = S'(x)$ тј. $\sigma(x) = S'(x)$ односно $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'$.

1.2 Степени редови

1.2.1 Уопштено о степеним редовима

Степени редови су функционални редови облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

или редови облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots ,$$

где је $a_i \in R$ и називају се коефицијенти реда.

Абелова теорема:
(1) Ако степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ конвергира за $x = x_1 \neq 0$ онда апсолутно конвергира за сваку вредности тако да важи $|x| < |x_1|$.
(2) Ако степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дивергира за $x = x_2$ онда дивергира за свако x тако да $|x| > |x_2|$.
Доказ: (1) Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ конвергира за $x = x_1$ онда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ конвергира па $\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. Онда постоји $M > 0$ тако да важи $|a_n x_1^n| < M$ за свако n почев од неког n_0. Посматрајмо ред $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ где је $|x| < |x_1|$ и уочимо $|a_n x^n| = |a_n x_1^n| |\frac{x}{x_1}|^n \leq M q^n$ где је $q = |\frac{x}{x_1}| < 1$. Ред $\sum M q^n$ је геометријски

и конвергира. По поредбеном критеријуму $\sum a_n x^n$ конвергира за $|x| < |x_1|$.
Слично се доказује и за (2).

Теорама Постоји јединствено $R > 0$ за сваки степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ тако да ред апсолутно конвергира за $|x| < R$ и дивергира за $|x| > R$.

Дефиниција: Интервал конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ је $(-R, R)$, а R називамо полупречник конвергенције.

Ред апсолутно конвергира на $(-R, R)$, док у крајевима интервала конвергенције може да конвергира или да дивергира. Исто важи и за степени ред облика $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, али тада интервал конвергенције изгледа $(x_0 - R, x_0 + R)$.
Ако је $l = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, где је $0 < l < \infty$, онда је $R = \frac{1}{l}$.
Ако посматрамо ред апсолутних вредности $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, према Даламберовом критеријуму конвергенције имамо
$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| l$ и за $l|x| < 1$ ред конвергира. Тада имамо да је $|x| < \frac{1}{l} = R$, те закључујемо да је као последица Даламберовог критеријума конвергенције
$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}|}$, слично можемо да закључимо да из Кошијевог критеријума конвергенције следи $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Пример 1: Одредити област конвергенције степеног реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n} (x+2)^n$.
$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{1}{n2^n}}{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2.$
Дакле, степени ред апсолутно конвергира за $|x + 2| < 2$, док за $|x + 2| > 2$ степени ред дивергира.
Ако је $x + 2 = 2$ тада функционални ред постаје бројевни ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ који не конвергира апсолутно, али конвергира условно по Лајбницовом критеријуму конвергенције, док ако

је $x+2=-2$, ред се трансформише у бројевни ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$ који дивергира. Област конвергенције овог реда је $(-4,0]$.

Пример 2: Одредити област конвергенције степеног реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}(x-2)^n$.
$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}=n=\infty$ паје област конвергенције овог степеног реда $(-\infty,+\infty)$.

Пример 3: Одредити област конвергенције степеног реда $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$.
$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, па закључујемо да ред конвергига само за $x=0$.

1.2.2 Особине степених редова

Теорема 1: Степени ред $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ апсолутно и равномерно конвергира на сваком сегменту $[-a,a]\subset(-R,R), a>0$.

Доказ: За неко $a, 0<a<R$ важи $|a_nx^n|\leq|a_na^n|$ и како по Вајерштрасовом критеријуму ред $\sum_{n=0}^{\infty}|a_na^n|$ конвергира то закључујемо да почетни ред конвергира апсолутно и равномерно на $[-a,a]$.

Теорема 2 : Сума $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ је непрекидна на интервалу конвергенције $(-R,R)$.

Доказ: Нека је $x\in(-R,R)$, тада сигурно постоји неко $a<R$ тако да $x\in[-a,a]$. a_nx^n су непрекидне функције а ред $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ равномерно конвергира на $[-a,a]$ па је
$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ непрекидна функција.

Друга Абелова теорема : Сума $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ је непрекидна за $x=R$ ако је ред конвергентан у тој тачки. Исто важи и за $x=-R$.

Интеграљење степених редова

Теорема 3: Степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ се

може интегралити члан по члан на интервалу конвергенције $(-R, R)$ и полупречник конвергенције тако добијеног реда је исти као полупречник конвергенције почетног реда.

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, x \in (-R, R).$$

Доказ: Нека је $x \in (-R, R)$, тада сигурно постоји неко $a < R$, тако да $x \in [-a, a]$. Ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равномерно конвергира на $[-a, a]$, па важи $\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, x \in (-R, R)$. $R' = \lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{a_n}{n+1}|}{|\frac{a_{n+1}}{n+2}|} = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = R$.

Диференцирање степених редова

Теорема 4: Степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ се може диференцирати члан по члан на интервалу конвергенције $(-R, R)$ и полупречник конвергенције тако добијеног реда је исти као полупречник конвергенције почетног реда.

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Доказ: Нека је $x \in (-R, R)$, тада сигурно постоји неко $a < R$, тако да $x \in [-a, a]$. Ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равномерно конвергира на $[-a, a]$, па важи $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, x \in (-R, R)$. $R' = \lim_{n\to\infty} |\frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}}| = R$.

Тејлоров ред

Дефиниција: Функција $f(x)$ се може представити као степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на $(-R, R)$, ако ред на том интервалу конвергенције конвергира функцији $f(x)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Теорема 5: Ако се функција $f(x)$ може представити као степени ред на $(-R, R)$, онда је то представљање јединствено, тј. коефицијенти степеног реда a_n су јединствени.

Доказ: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$f'(0) = a_1, f''(0) = 2!a_2, ..., f^{(n)}(0) = n!a_n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Дефиниција: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$ је Тејлоров ред функције $f(x)$ у околини тачке x_0. Када је тацка $x_0 = 0$ Тејлоров развој називамо Маклоренов ред.

Теорема 6: Потребан и довољан услов да би се функција имала развој у степени ред на неком интервалу конвергенције јесте да та функција има изводе $n-$тог реда на том интервалу.

Маклоренов ред елементарних функција:

1. $f(x) = e^x, f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1$ па је развој функције у степени ред

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, R = \infty$$

2. $f(x) = \sin x, f^{(n)}(x) = |\sin(x + \frac{n\pi}{2})|,$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & n = 2k, k \in Z \\ (-1)^k, & n = 2k+1, k \in Z \end{cases}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, R = \infty$$

3. $f(x) = \cos x, f^{(n)}(x) = |\cos(x + \frac{n\pi}{2})|,$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k, k \in Z \\ 0, & n = 2k+1, k \in Z \end{cases}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, R = \infty$$

4. $f(x) = (1+x)^\alpha, x > -1, \alpha \in R$
   $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$, ако је $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ онда је $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$ па имамо
   $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \cdots$
   одавде извлачимо да је $a_1 = \alpha a_0, f(0) = 1 = a_0$ па је $a_1 = \alpha$, даље $2a_2 + \alpha = \alpha^2, a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$, коначно имамо $na_n + (n+1)a_{n+1} = \alpha a_n, a_{n+1} = \frac{(\alpha-n)}{(n+1)} a_n$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} |\tfrac{n+1}{\alpha-n}| = 1, x \in (-1, 1)$$

5. $f_1(x) = \frac{1}{1-x}, f_2(x) = \frac{1}{1+x}, x \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

6. $f(x) = \ln(1-x), x > -1$
$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots)dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, (-1, 1]$$

Пример 1: Развити функцију $f(x) = \frac{1}{4-x}$ у степени ред око $x_0 = 2$.

Пошто је потребно функцију развити у околини двојке, степени ред мора бити облика $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-2)^n$.

$$\frac{1}{4-x} = \frac{1}{2-(x-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}, |\frac{x-2}{2}| < 1.$$

Пример 2: Развити функцију $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$ у степени ред око $x_0 = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{1-x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

Пример 3: Развити функцију $f(x) = \arcsin x$ у степени ред око $x_0 = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ n \end{array} \right) (-x^2)^n;$$

$$\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ n \end{array} \right) (-1)^n t^{2n} \right) dt;$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ n \end{array} \right) (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |-x^2| < 1.$$