Универзитет у Београду-Грађевински факултет

Студијски програм: ГРЂЕВИНАРСТВО

Година/семстар: Друга/први

Наыив предмета (шифра предмета): МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 2 (Б2О2А2)

Наставник: АЛЕКСАНДРА ЕРИЋ

Наслов предавања: ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

Датум: 21.10.2021.

Београд, 2021.

Глава 1

Функције више променљивих

1.1 Увод

Дефиниција 1: Пресликавање $f : D \to \mathbb{R}$, где је $D \subseteq \mathbb{R}^n$, зовемо реалном функцијом од n реалних промењивих.

Вредност функције у тачки $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ означавамо са $f(x)$ или са $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.
За $n = 2$ писаћемо $f = f(x, y)$
За $n = 3$ писаћемо $f = f(x, y, z)$

Да бисмо уопште радили са функцијама са више променљивих, прво морамо да уопштимо појам растојања.
На реалној правој растојање између две тачке $x, y \in \mathbb{R}$ је дато са $|x - y|$ и оно има следеће особине:

1. $|x - x| = 0$
2. $|x - y| = |y - x|$
3. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ -неједнакост троугла

Дефиниција 2: Пресликавање $d : M \times M \to \mathbb{R}$, где је $M \neq \emptyset$ са особинама:

1. $(\forall x, y \in M)\, d(x,y) \geq 0; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $(\forall x, y \in M)\, d(x,y) = d(y,x)$
3. $(\forall x, y \in M)\, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

се назива метрика (растојање) на скупу M, а пар (M, d) је метрички простор.

Примери:

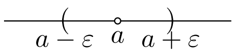
1. Еуклидова метрика: $M = \mathbb{R}^2$, ако су $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in M$
   $d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
2. $M = \mathbb{R}^n, A = (a_1, a_2, ..., a_n), B = (b_1, b_2, ..., b_n) \in M$
   $d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$

Надаље ћемо под $d(x,y)$ Еуклидову метрику.
Дефиниција 3: ε околина тачке a је скуп:

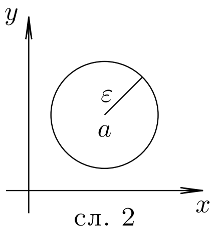
$$U(a, \varepsilon) = \{x \in M | d(x,a) < \varepsilon\}$$

Пример:

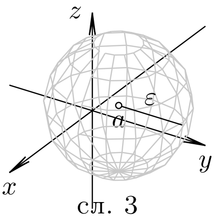
1. $M = \mathbb{R}$ па је ε околина тачке a интервал $U_{(a,\varepsilon)} = \{x \in \mathbb{R} || x - a| < \varepsilon\}$ (сл. 1)
2. $M = \mathbb{R}^2, a = (a_1, a_2)$ па је ε околина тачке $a = (a_1, a_2)$ унутрашњост круга полупречника ε: $U_{(a,\varepsilon)} = \{x \in \mathbb{R} | (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < \varepsilon\}$ (сл. 2)
3. $M = \mathbb{R}^3, a = (a_1, a_2, a_3)$ па је ε околина тачке $a = (a_1, a_2, a_3)$ унутрашњост сфере полупречника ε: $U_{(a,\varepsilon)} = \{x \in \mathbb{R} | (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 < \varepsilon\}$ (сл. 3)



сл. 1



сл. 2



сл. 3

Дефиниција 4: Скуп $H \subseteq M$ је отворен скуп ако важи:

$$(\forall a \in H)\,(\exists \varepsilon > 0)\,\big(U_{(a,\varepsilon)} \subseteq H\big)\,.$$

Док за скуп $F \subseteq M$ кажемо да је затворен ако је скуп $M \setminus F$ отворен.

Пример:

1. Примери одтворених скупова су:

$$(a,b), U_{(a,\varepsilon)}, ...$$

2. Примери затворених скупова су:

$$[a,b], [a,+\infty), \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 \le r^2\}, ...$$

3. Пример скупа који није ни отворен ни затворен:

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \le r^2\big\} \cup \{(1,0)\}$$

4. Примери скупова који су и отворени и затворене:

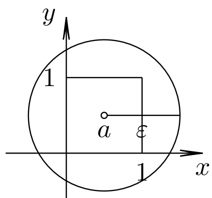
$$[0,1] \cup \{2\}, \mathbb{R}, \emptyset, ...$$

Дефиниција 5: $B \subseteq \mathbb{R}^n$ је ограничен ако постоји $a \in R^n$ и $\varepsilon > 0$ тако да је $B \subseteq U_{(a,\varepsilon)}$.

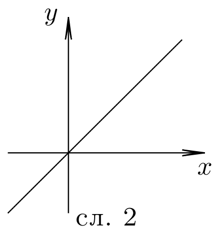
Пример:

1. Имамо $R^n, B = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Скуп B је јединични квадрат. Нека је $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \varepsilon = 1$, па је епсилон околина тачке a, $U_{(a,\varepsilon)} = \{(x,y)|(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 < 1\}$. Како важи $B \subseteq U_{(a,\varepsilon)}$ закључујемо да је скуп B ограничен скуп. (сл. 1)

2. Имамо $\mathbb{R}^2, B = \{(x,y)|y = x\}$ и како се овај скуп не може обухватити епсилон околином неке тачке то закључујемо да је скуп неограничен.(сл. 2)



сл. 1



сл. 2

Дефиниција 6: $a \in \mathbb{R}^n$ ја тачка нагомилавања скупа $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ако

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists b \in S \setminus \{a\})\,(d(a,b) < \varepsilon)$$

или

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists b \in S \setminus \{a\})\,\left(b \in U_{(a,\varepsilon)}\right).$$

1.2 Низови

Нека је $(a_m)_{\in}\mathbb{R}^n$ низ тачака

$$\lim_{m\to\infty} a_m = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)\,(\exists m_0 \in N)\,(\forall m \in N)\,(m \geq m_0 \Rightarrow d(a_m, a) < \varepsilon)$$

Теорема 1: a је тачка нагомилавања скупа $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ако и само ако $(\exists(a_m) \in S \setminus \{a\})\,(\lim_{m\to\infty} a_m = a)$.

Теорема 2: Скуп $F \subseteq \mathbb{R}^n$ је затворен ако и само ако за сваки конвергентан низ (a_m), где $a_m \in F$, важи да је $\lim_{m\to\infty} a_m \in F$.

Примери:

1. $a_m = \left(\frac{1}{m}, \frac{2m}{m+1}\right), a_m \to (0,2), m \to \infty$ конвергентан низ.
2. $b_m = \left(\frac{(-1)^m}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right), b_m \to (0,1,e), m \to \infty$ конвергентан низ.
3. $x_m = \left((-1)^m, \frac{1}{m}\right)$ дивергентан низ, али ограничен.
4. $y_m = \left(m^2, \frac{\sin m}{m}, \frac{(2m)!}{m^m}\right)$ дивергентан и неограничен низ.

1.3 Гранична вредности функције и непрекидност

Дефиниција 1: (Коши) Нека је $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in R^n$ тачка нагомилавања скупа D. Реалан број α је гранична вредност функције f (лимес) када $x \to x_0$ ако је:

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)\,(\forall x \in D)\,(0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon)$$

Ознака је

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$$

тј. у координатном систему $x = (x_1, x_2, ..., x_n), x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$

$$\lim_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)} f(x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha.$$

Дефиниција 2: (Хајне) Нека је $x_0 \in \mathbb{R}^n$ тачка нагомилавања скупа D и $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Реалан број α је гранична вредност функције f када x тежи x_0 ако за сваки низ $(x_n) \in D \setminus \{x_0\}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha.$$

Теорема 1: Кошијева и Хајнеова дефиниција граничне вредности су еквивалентне.

Пример: Да ли постоји гранична вредност:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} =?$$

Уочимо два низа која теже ка $(0,0)$, нпр.
$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), y_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{\sqrt{3}}{n}\right)$
$x_n \to (0,0), f(x_n) = \dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$y_n \to (0,0), f(y_n) = \dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}}} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \dfrac{1}{2}$
Хајнеова дефиниција граничне вредности каже да ако постоји мора бити јединствена, па овде закључујемо да гранична вредност функције $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ у тачки $(0,0)$ не постоји.

Дефиниција 3: Нека је $x_0 \in D$ тачка нагомилавања скупа D и $f : D \to \mathbb{R}$. За функцију f кажемо да је непрекидна у тачки x_0 ако и само ако је $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Дефиниција 4: Функција f је непрекидна на скупу S ако и само ако је непрекидна у свакој тачки скупа S.

Теорема 2: Ако су функције f, g непрекидне у тачки x_0, онда су непрекидне у тој тачки и следеће функције:

$$f \pm g; \quad c \cdot f, c \in R; \quad f \cdot g; \quad \frac{f}{g}, g(x_0) \neq 0.$$

Теорема 3: (Болцано-Вајерштрасова теорема) Ако је скуп $K \subseteq \mathbb{R}^n$ компактан (затворен и ограничен) и функција f је непрекидна на K, онда је функција f и ограничена на скупу K и постоје тачке $a, b \in K$ такве да важи

$$f(a) = \sup\{f(x)|x \in K\} = \max_K f(x)$$

$$f(a) = \inf\{f(x)|x \in K\} = \min_K f(x)$$

тј. непрекидна функција на компактном скупу достиже своју највећу и најмању вредност.

1.4 Парцијални изводи

$f : D \to R, D \subseteq \mathbb{R}^n, f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Ако фиксирамо променљиве од x_2 до x_n, а x_1 доживљавамо као променљиву добијамо функцијсу $f_1 = f_1(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)$ која је функција једне променљиве, даље ако фиксирамо све остале променљиве осим x_2 добијамо функцију $f_2 = f_2(x_1^0, x_2, ..., x_n^0)$ која је опет функција једне променљиве, и тако даље наставимо до n, па добијамо:

$$\begin{array}{ll}
f_1 = f_1(x_1, x_2^0, ..., x_n^0) & f_1' = \frac{\partial f}{\partial x_1} \equiv f_{x_1}' \\
f_2 = f_2(x_1^0, x_2, ..., x_n^0) & f_2' = \frac{\partial f}{\partial x_2} \equiv f_{x_2}' \\
\quad\vdots \quad\quad \vdots & \quad\vdots \quad\quad \vdots \\
f_n = f_n(x_1^0, x_2^0, ..., x_n) & f_n' = \frac{\partial f}{\partial x_n} \equiv f_{x_n}'
\end{array}$$

Дефиниција 1: Парцијални извод функције f по променљивој $x_i, i = \overline{1,n}$ у тачки $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ је извод функције $f_i, i = \overline{1,n}$ (једне променљиве) у тачки $x_i, i = \overline{1,n}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0 + h, ..., x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)}{h}$$

Пример:

1. Наћи по дефиницији парцијални извод функције $f(x, y) = \cos xy$ у тачки $M(1, \frac{\pi}{2})$ по y.

$$f'_y(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1, \frac{\pi}{2} + h) - f(1, \frac{\pi}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + h) - \cos\frac{\pi}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{\sin h}{h} = -1$$

.

2. Наћи по дефиницији парцијални извод функције $f(x, y) = 3^{xy}$ по x.

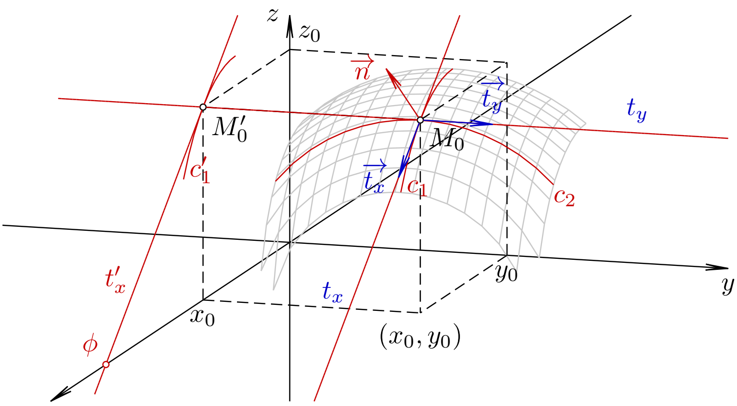
$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{3^{(x+h)y} - 3^{xy}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3^{xy}(3^{yh} - 1)}{yh} y = 3^{xy} y \ln 3$$

.

1.5 Геометријски смисао парцијалних извода

Дата је функција $f = f(x, y)$, и нека су њени парцијални изводи у тачки $X_0(x_0, y_0)$ $f'_x(X)$ и $f'_y(X)$ непрекидни. Тачка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (где је $z_0 = f(x_0, y_0)$) лежи на површи $\Gamma : z = f(x, y)$.

Ако са c_1 означимо пресечну криву површи Γ и равни $y = y_0$ онда је ортогонална пројекција c_1' ове криве на раван xOz. Једначина криве c_1' је функција једне променљиве $c_1' = f(x, y_0) = f_1(x)$.



.

Угао ϕ је угао који гради тангента t_x' у тачки $M_0' = (x_0, 0, z_0)$ на криву c_1' са позитивним делом x осе. Коефицијент правца тангенте t_x' је $\frac{\partial f_1}{\partial x}(X_0) = \operatorname{tg}\phi$. Приметимо да према конструкцији тангента t_x на криву c_1 у тачки M_0 у равни $y = y_0$ је паралелна са тангентом t_x' у тачки M_0'. Па имамо да је $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \operatorname{tg}\phi$. На сличан начин имамо да је пресек равни $x = x_0$ и површи Γ крива c_2, и да је парцијални извод функције f по променљивој y уствари коефицијент правца тангента t_y на криву c_2 у тачки X_0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = p, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = q$$

$$t_x' : z - f(x_0, y_0) = p(x - x_0) \Leftrightarrow \frac{z - z_0}{p} = \frac{x - x_0}{1}$$

$$t_x : \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$t_y' : z - f(x_0, y_0) = q(y - y_0) \Leftrightarrow \frac{z - z_0}{q} = \frac{y - y_0}{1}$$

$$t_y : \frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{q}.$$

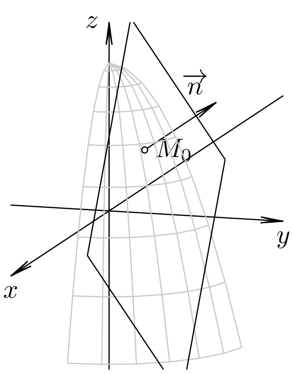
Како праве t_x и t_y леже у истој равни, и како су њихови вектори правца $\overrightarrow{t_x} = (1, 0, p).\overrightarrow{t_y} = (0, 1, q)$ то имамо да је вектор нормале равни која их садржи:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{t_x} \times \overrightarrow{t_y} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = (-p, -q, 1).$$

Ту раван називамо тангентна раван површи Γ у тачки M_0, а њена једначина је:

$$-p(x - x_0) - q(y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

Пример: Написати једначину тангентне равни површи $z = 4 - x^2 - y^2$ у тачки $M_0(1, 1, 2)$.



$p = \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = -2x|_{(1,1)} = -2$
$q = \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = -2y|_{(1,1)} = -2$
$\overrightarrow{n} = (2, 2, 1)$
$2(x - 1) + 2(y - 1) + z - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x + 2y + z = 6$

Постојање парцијалних извода у некој тачки није довољан услов за непрекидност у тој тачки.

Пример:

1. Функција $f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$ има прекид у тачки $(0, 0)$:

$x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0), n \to \infty$
$f(x_n) = f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 0, n \to \infty$ док је $f(0,0) = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{1-1}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \frac{1-1}{h} = 0$$

Парцијални изводи постоје и једнаки су 0.

2. Функција $f(x,y) = |x| + y$ је непрекидна у тачки $(0,0)$ док парцијални извод по промењљивој x не постоји:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Дефиниција 1:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \cdots \partial x_{k_m}} = \frac{\partial}{\partial x_{k_m}}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \cdots \partial x_{k_{m-1}}}\right)$$

Парцијалне изводе називамо мешовитим ако су бар два k_1, k_j међусобно различити.

Ознаке за $n = 2$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv z''_{xx} \equiv r$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv z''_{yy} \equiv t$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv z''_{xy} \equiv s$$

Пример: Наћи двоструке и мешовите изводе функције $z(x,y) = xy^2 - x^2e^{-y}$.

$z'_x = y^2 - 2xe^{-y}$, $\qquad z'_y = 2xy + x^2e^{-y}$

$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(z'_x) = -2e^{-y}$; $\qquad z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(z'_y\right) = 2x - x^2e^{-y}$;

$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z'_y\right) = 2y + 2xe^{-y}$; $\qquad z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(z'_x) = 2y + 2xe^{-y}$;

Теорема 1(Шварцова теорема): Ако постоје $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ на отвореном скупу $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Ако су ови мешовити изводи непрекидни у тачки $x \in G$ онда важи $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$.

Теорема 2(Шварцова теорема): Нека постоје мешовити парцијални изводи m-тог реда функције f на отвореном скупу $G \subset \mathbb{R}^n$ и нека су они непрекедни у тачки $x \in G$. Тада се $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \cdots \partial x_{k_m}}(x)$ не мења при пермутацији бројева $k_1, k_2, ..., k_m$.

1.6 Диференцијабилност

Нека је функција f, таква да $f : D \to \mathbb{R}; D \subseteq \mathbb{R}^n$ и нека је $X(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ произвољна фиксирана тачка, а $H(h_1, h_2, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$, па имамо да је $X + H(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n)$. Тотални прираштај функције f у тачки X који одговара прираштају промењљивих H је

$$\Delta f(X; H) = f(X+H) - f(X) = f(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Дефиниција 1: Функција f је диференцијабилна у тачки X ако постоје $a_i \in \mathbb{R}$ и функције ε_i, n променљивих тако да је

$$\Delta f(X,H) = a_1h_1 + a_2h_2 + \cdots + a_nh_n + \varepsilon_1(H)h_1 + \varepsilon_2(H)h_2 + \cdots + \varepsilon_n(H)h_n$$

за свако $H \in R^n$ за које је $X+H \in D$ при чему је $\lim_{H\to(0,0,...,0)} \varepsilon_i(H) = 0, i = 1,2,...,n$, а израз $a_1h_1 + a_2h_2 + \cdots + a_nh$ је тотални диференцијал функције f у тачки X који одговара промени аргумента H. Означавамо га са $df(X;H)$ или $df(X)$ или df.

Теорема 1: Ако је функција f диференцијабилна у тачки X, онда је она непрекидна у тој тачки.

Доказ: Доказ теореме следи директно из дефиниције диференцијабилности. Треба доказати да је $\lim_{Y\to X} f(Y) = f(X)$.
$Y(y_1, y_2, ..., y_n), X(x_1, x_2, ..., x_n)$
$h_1 = y_1 - x_1, h_2 = y_2 - x_2, ..., h_n = y_n - x_n; H(h_1, h_2, ..., h_n) \to (0,0,...,0)$
$\lim_{Y\to X} f(Y) = f(X) \Leftrightarrow \lim_{Y\to X} (f(Y) - f(X)) = 0 \Leftrightarrow$
$\lim_{H\to 0} (f(X+H) - f(X)) = 0 \Leftrightarrow$
$\lim_{H\to 0} (a_1h_1 + a_2h_2 + \cdots + a_nh_n + \varepsilon_1(H)h_1 + \varepsilon_2(H)h_2 + \cdots + \varepsilon_n(H)h_n) = 0$ што следи по дефиницији.

Теорема 2: Ако је функција f диференцијабилна у тачки X, онда постоје сви парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X), i = 1,2,...,n$ и при томе важи $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$.

Доказ: Нека су у тачи H све координате једнаке нули осим i-те која је једнака са h. Тада је

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,...,x_i+h,...,x_n) - f(x_1,...,x_n)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x;H)}{h} =$
$= \lim_{(0,...,h,...,0)\to(0,0,...,0)} \frac{a_1 0 + \cdots + a_i h + \cdots + a_n 0 + \varepsilon_1(H)0 + \cdots + \varepsilon_i(H)h_i + \cdots + \varepsilon_n(H)0}{h} =$
$\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon_i(H)h + a_i h}{h} = \lim_{h\to 0} (a_i + \varepsilon_i(H)) = a_i$

Као последицу ове теореме имамо да важи:

$$df(X;H) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)h_n$$

Имамо да важи да је прираштај $h_i = dx_i$ те је тако горња формула:

$$df(X) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)dx_n$$

или краће

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

Обратно тврђење претходне теореме не важи:

Пример: Посматрајмо функцију $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \vee y = 0 \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases}$
$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

али функција није диференцијабилна у тачки $(0,0)$, јер није ни непрекидна.

Довољне услове за диференцијабилност функције даје следећа теорема.

Теорема 3: Ако постоје парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1,2,...,n$ у некој околини тачке X и ако су они непрекидни у тој тачки, онда је функција f диференцијабилна у тачки X.

Теорема 4: Ако су функције f и g диференцијабилне у тачки X онда важи:

1. $d(f+g)(X) = df(X) + dg(X)$
2. $d(\lambda f)(X) = \lambda df(X)$

3. $d(fg(X)) = g(X)df(x) + f(X)dg(X)$

4. $d\left(\frac{f}{g}(X)\right) = \frac{g(X)df(X)-f(X)dg(X)}{g^2(X)}$

Диференцијали вишег реда:

- $dz = z'_x dx + z'_y dy$

- $d^2z = d(dz) = d(z'_x dx + z'_y dy) = (z'_x dx + z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx + z'_y dy)'_y dy = (z''_{xx}dx + z''_{xy})dx + (z''_{xz}dx + z''_{yy}dy)dy = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$

- $d^3z = d(d^2x) = d(z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2) =$ како су $dx^2, dxdy, dy^2$ константе имамо $= dx^2d(z''_{xx}) + 2dxdyd(z''_{xy}) + dy^2d(z''_{yy}) = dx^2(z'''xxxdx + z'''_{xxy}dy) + 2dxdy(z'''_{xyx}dx + z'''_{xyy}dy) + dy^2(z'''_{yyx}dx + z'''_{yyy}dy) = z'''_{xxx}dx^3 + 3z'''_{xxz}dx^2dy + 3z'''_{xyy}dxdy^2 + z'''_{yyy}dy^3$

- $d^kz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k z, k \in N$

- $d^nz = d(d^{n-1}z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k} dx^{n-k}dy^k$

1.7 Извод сложене функције

Теорема 1: Нека су функције $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ диференцијабилне у тачки $M(x, y)$, а функција $z = f(u, v)$ диференцијабилна у тачки $T(a, b)$, где је $a = u(M)$, а $b = v(M)$. Тада је сложена функција $z = f(u(x, y), v(x, y))$ диференцијабилна у тачки $M(x, y)$ и важи:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Доказ: $z = f(u, v)$ је диференцијабилна, па важи $dz = z'_u du + z'_v dv + \alpha du + \beta dv$ где $\alpha, \beta \to 0$ када $du, dv \to 0$

$\partial_x z = z'_u \partial_x u + z'_v \partial_x v + \alpha \partial_x u + \beta \partial_x v$

$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_u \frac{\partial u}{\partial x} + z'_v \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x$

На исти начин добијамо да је $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y$

Извод сложене функције у претходној теореми је објашњен у случају две димензије, уколико желимо да упштимо овај случајј имамо:

Теорема 2: Нека је функција f таква да $f : D \to R, D \subseteq R^n, x_i : G \to R, G \subseteq R^p, i = 1, 2, ..., n, x_i(t_1, t_2, ..., t_p) = x_i(T)$. Ако су x_i диференцијабилне и нека је $\{(x_1(T), ..., x_n(T))\} \subseteq D$. Ако је функција $f : D \to R$ диференцијабилна у тачки X са координатама $X = (x_1(s), x_2(s), ..., x_n(s))$ и ако функцију $u : G \to R$ дефинишемо са $u(T) = f(x_1(T), x_2(T), ..., x_n(T))$, онда је

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}(s) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)\frac{\partial x_1}{\partial t_i}(s) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X)\frac{\partial x_2}{\partial t_i}(s) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)\frac{\partial x_n}{\partial t_i}(s), i = 1, 2, ..., p$$

Пример: Дата је функција $z = f(x + y, x^2 + y^2)$. Наћи z''_{xy}.

Означим $u(x, y) = x + y, v(x, y) = x^2 + y^2$, па имамо да је $u'_x = 1, u'_y = 1, v'_x = 2x, v'_y = 2y$.

$z'_x = f'_u u'_x + f_v v'_x = f'_u + 2x f'_v$

$z''_{xy} = (f'_u)'_y + (2x f'_v)'_y = f''_{uu} u'_y + f''_{uv} v'_y + 2x\left(f''_{vu} u'_y + f''_{vv} v'_y\right) =$

$= f''_{uu} + 2y f''_{uv} + 2x f''_{uv} + 4xy f''_{vv} = f''_{uu} + 2(x + y) f''_{uv} + 4xy f''_{vv}$

1.8 Тејлорова формула функције више промењливих

Подсетимо се Тејлорове формуле за функцију једне променљиве:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_o) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, c = x_0+\Theta(x-x_0), 0 < \Theta < 1$$

Како важи да је $x - x_0 = h = dx$ и како је $f^k(x_0)dx^k = d^k f(x_0)$ имамо:

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_o) = \frac{1}{k!}f^k(x_0)h^k = \frac{1}{k!}d^k f(x_0, h)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}df(x_0, h) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0, h) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c, h)$$

Дефиниција: Дата је функција $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^m$. Функцја f је m пута диференцијабилна ако и само ако се сви њени парцијални изводи, закључно са парцијалним изводима реда m, диференцијабилне функције.

Теорема 1: Нека је функција f $n + 1$ пут диференцијабилна у некој ε околини U тачке $x_0(a_1, a_2, ..., a_m)$. Тада за свако $x \in U$ постоји тачка x_Θ на дужи x_0x таква да је

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}df(x_0, H) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0, H) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_\theta)$$

где је: $x_\Theta(a_1 + \Theta(x_1 - a_1), ..., a_m + \Theta(x_n - a_m)), 0 < \Theta < 1$

$x(x_1, x_2, ..., x_m), H(x_1 - a_1, ..., x_m - a_m).$

Доказ: Дефинишимо функцију $F : [0, 1] \to R$ формулом

$F(t) = f(a_1+t(x_1-a_1), ..., a_m+t(x_m-a_m)) = f(x_t)$ што је сложена функција.

Можемо сада применити Маклоренову формулу за функцију једне променљиве са остатком у Лагранжевом облику.

$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_t)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_t)(x_m - a_m) = df(x_t; H)$

$F'(0) = df(x_0; H)$

$F''(0) = d^2 f(x_0; H)$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
$F^{(k)}(0) = d^k f(x_0; H)$

Па имамо:

$F(t) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0)t + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(0)(\Theta t)t^{n+1}$

$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)(0)} + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\Theta t)$

Како је $0 < \Theta < 1 \Rightarrow x_{\therefore} \in \overline{x_0 x}$ имамо да важи:

$F(x) = F(x_0) + \frac{1}{1!}df(x_0; H) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0; H) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_\theta; H)$

Пример: Написати Тејлоров развој функције $f(x, y) = \ln(2 + x + xy)$ до другог степена, у околини тачке $x_0(1, 1)$.

$f(x, y) = \ln(2 + x + xy) \Rightarrow f(x_0) = \ln 4$

$f'_x = (1 + y)(2 + x + xy)^{-1} \Rightarrow f'_x(x_0) = \frac{1}{2}$

$f'_y = x(2 + x + xy)^{-1} \Rightarrow f'_y(x_0) = \frac{1}{4}$

$f''_{xx} = -(1+y)^2(2+x+xy)^{-2} \Rightarrow f''_{xx} = -\frac{1}{4}$

$f''_{xy} = 2(2+x+xy)^{-2} \Rightarrow f''_{xy} = \frac{1}{8}$

$f''_{yy} = -x^2(2+x+xy)^{-2} \Rightarrow f''_{yy} = -\frac{1}{16}$

$df(x_0) = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(y-1)$

$d^2f(x_0) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(x-1)(y-1) - \frac{1}{16}(y-1)^2$

$f(x,y) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0)}{2!} + R_2$

$T_2f(x,y) = \ln 4 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(y-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{8}(x-1)(y-1) - \frac{1}{32}(y-1)^2$

1.9 Локални екстремуми функција висхе променљивих

Нека је функција f таква да $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Дефиниција 1: Тачка $x_0 \in D$ је тачка локалног екстрема ако постоји околина U тачке x_0, тако да

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in U \cap D$$

$$f(x) \geq f(x_0), \forall x \in U \cap D.$$

У првом случају је тачка x_0 локални максимум, док је у другом локални минимум.

Теорема 1: (Фермаова теорема за функције више променљивих)

Ако је функција f непрекидна у некој ε околини U тачке x_0 локалног екстрема и ако постоје сви парцијални изводи првог реда, онда су они једнаки нули.

Доказ:Докажимо теорему за функцију две променљиве.

Нека је рецимо тачка $t(x_0, y_0)$ тачка локалног максимума. Онда имамо да важи $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in U \cap D$.
Нека је функција једне променљиве $g(x)$ дефинисана са $g(x) = f(x, y_0)$. Следећи услове теореме функција $g(x)$ је непрекидна на $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x) = f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) = g(x_0)$
$\Rightarrow x_0$ је локални максимум функције $g(x)$
$\Rightarrow g'(x_0) = 0$ теорема за функцију једне променљиве
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(t) = 0$

На исти начин се показује и да важи $\frac{\partial f}{\partial y}(t) = 0$.

Обрнут случај не мора да важи.

Пример: Посматрајмо функцију $f(x, y) = xy$. Њени парцијални изводи у тачки $t(0,0)$ су $\frac{\partial f}{\partial x}(t) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(t) = 0$. Међутим,

$f(x, y) - f(0,0) = xy - 0 = xy \gtreqless 0$, ако узмемо

$f(x, x) - f(0,0) = x^2 > 0$ док за $f(x, -x) - f(0,0) = -x^2 < 0$ па тачка $t(0,0)$ не може бити тачка локалног екстрема.

Дефиниција 2: Тачка x_0 је стационарна тачка функције f ако су сви парцијални изводи функције у тој тачки једнаки нули.

У претходном примеру смо видели да стационарна тачка не мора нужно да буде и тачка локалног екстрема. Довољан услов да стационарна тачка буде тачка локалног екстрема даје следећа теорема.

Теорема 2: Нека је тачка x_0 стационарна тачка функције f и нека су сви парцијални изводи другог реда непрекидни у некој околини U тачке x_0.

1. Ако је $d^2f(x_0; H) > 0, \forall H \neq (0, 0, ..., 0) \Rightarrow x_0$ је тачка локалног минимума.
2. Ако је $d^2f(x_0; H) < 0, \forall H \neq (0, 0, ..., 0) \Rightarrow x_0$ је тачка локалног максимума.
3. Ако постоје H' и H'' тако да је $d^2f(x_0; H') > 0$ и $d^2f(x_0; H'') < 0$ онда тачка x_0 није тачка локалног екстрема.

У случају функције $z = f(x, y)$ и $(dx, dy) \neq (0, 0)$

$$d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2$$

$$dx \neq 0 : d^2z = dx^2 \left(r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right)$$

Ако је $rt - s^2 > 0$ онда је d^2z константног знака.

Теорема 2:

А) Нека је $rt - s^2 > 0$

1. $t > 0 \vee r > 0 \Rightarrow d^2z > 0$ па је стационарна тачка локални минимум.
2. $t < 0 \vee r < 0 \Rightarrow d^2z < 0$ па је стационарна тачка локални максимум.

Б) нека је $rt - s^2 < 0 \Rightarrow d^2z \gtrless 0$ стационарна тачка није тачка локалног екстрема.

1.10 Условни екстреми

Пример 1: Наћи најближу тачку тачи $M(1,1)$ која се налази на параболи $y = x^2 + 1$.

Функција чију екстремну вредност тражимо је функција растојања.

$$f(x,y) = d(M,M') = d((1,1),(x,y)) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

Како тачка M' мора да се налази на параболи $y = x^2 + 1$ за ту параболу кажемо да је функција услова.

Нека је функција $f : D \to R, D \subseteq R^n$ функција чије екстремне вредности тражимо.

Нека су функцие услова задате са: $\begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \phi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \phi_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$

Скуп тачака које испуњавају услове је

$$S = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | \phi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = 1, 2, ..., m\}.$$

Дефиниција 1: Тачка x_0 је тачка условног максимума (минимума) функције f уз услове $\phi_i, i = 1, 2, ..., m$ ако постоји ε околина U тачке x_0 таква да је

$$f(x) \leq f(x_0), (f(x) \geq f(x_0)), \forall x \in D \cap S \cap U.$$

Један од начина за налажење тачака локалног екстрема је и метод Лагранжових множилаца.

Метод Лагранжових множилаца

Формирамо Лагранжову функцију

$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f + \lambda_1\phi_1, ..., \lambda_m\phi_m$

затим тражимо стационарне тачке ове функције:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0 \Leftrightarrow \phi_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_m} = 0 \Leftrightarrow \phi_m = 0.$$

Стационарну тачку означимо са $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0)$.

Затим да би одредили знак другог диференцијала функције f, d^2F, диференцирамо услове и добијамо систем линеарних једначина по $dx_1, dx_2, ..., dx_n$.

$$\begin{cases} d\phi_1(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = 0 \\ d\phi_2(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = 0 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ d\phi_m(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = 0 \end{cases}$$

Како је $m < n$ систем је неодређен, па има $n - m$ слободних промењљивих. То значи да можемо да изразимо рецимо

$dx_1, ..., dx_m$ преко $dx_{m+1}, ..., dx_n$. Те везе потом заменимо у d^2F и потом коментаришемо знак другог диференцијала функције Φ.

1. $d^2F > 0$ онда имамо условни минимум
2. $d^2F < 0$ онда имамо условни максимум
3. $d^2F \lesseqgtr 0$ онда стационарна тачка није условни екстрем.