Универзитет у Београду-Грађевински факултет

Студијски програм: ГРЂЕВИНАРСТВО

Година/семстар: Друга/први

Наыив предмета (шифра предмета): МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 2 (Б2О2А2)

Наставник: АЛЕКСАНДРА ЕРИЋ

Наслов предавања: ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Датум: 3.12.2020.

Београд, 2020.

Сва ауторска права аутора презентације и/или видео снимака су заштићена. Снимак или презентација се могу користити само за наставу на даљину студента Грађевинског факултета Универзитета у Београду у школској 2020/2021 и не могу се користити за друге сврхе без писмене сагласности аутора материјала.

Глава 1

Диференцијалне једначине

1.1 Једначине првог реда

Обична диференцијална једначина је једначина облика

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, y = y(x),$$

где су $y', ..., y^{(n)}$ изводи функције $y(x)$. Најједноставнија једначина је $y^{'} = f(x)$, где је $f(x)$ непрекидна функцијана интервалу (a, b). Ред диференцијалне једначине је ред највећег извода који се јављује у једначини. Решење диференцијалне једачине реда n на интервалу (a, b) је функција $y = \varphi(x)$ које има изводе до реда n на (a, b) и задовољава једначину $F\left(x, \varphi(x), ..., \varphi^{(n)}\right) = 0$. На пример $y = \sin x$ је решење диференцијалне једначине другог реда

$$y'' + y = 0$$

на интервалу $(-\infty, \infty)$. Решавање диференцијалне једначине се зове интеграција диференцијалне једначине. Једначина $y'' + y = 0$ има бесконачно много решење, то су $C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Али, само једно решење задовољава почетни услов $y(x_0) = y_0$. То значи да тражимо интегралну криву која пролази кроз $M_0\left(x_0, y_0\right)$. Проблем тражења решења уз почетни услов зове се Кошијев проблем.
Кошијева теорема (о егзистенцији и јединственоsти решења Кошијевог проблема)за једначине првог реда. Нека је $y' = f(x, y)$ диференцијална једначина и $f(x, y)$ дефинисана на домену D. Ако постоји околина U тачке $M_0\left(x_0, y_0\right) \in D$, где је $f(x, y)$

(1) непрекидна

(2) има ограничени парцијани извод $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

онда постоји интервал $(x_0 - h, x_0 + h)$ у ком постоји јединствpно решење $y = \varphi(x)$ дате једначине такво да је $\varphi(x_0) = y_0$. То значи да кроз $M_0\,(x_0, y_0)$ пролази тачно једна интегрална крива.

Примери:

(1) Диференцијална једначина

$$y' = x + y,$$

задовољова услове теореме. $f(x,y) = x + y$ непрекидна, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$ ограничен.

(2)

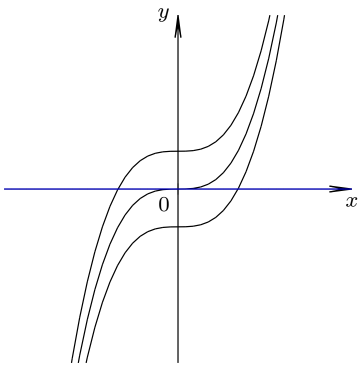
$$y' = 3y^{\frac{2}{3}},$$

$f(x,y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ непрекидна у равни (x,y), $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$ није ограничен (у $y = 0$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} \to \infty$). $y = (x + C)^3$ и $y = 0$ су решења. Кроз $(0,0)$ постоје две интегралне криве $y = 0$, $y = x^3$. У околини $M_1(1,1)$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ је ограничен, па су задовољени услови и тада постоји само једна интегрална крива кроз $M_1(1,1)$.

Теорема даје довољне услове. Нису и потребни. На пример:

$$y' = \frac{1}{y^2},$$

$f(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$, на $x-$оси f није непрекидна и $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2}{y^3}$ није ограничен. Али кроз сваку тачку $(x_0, 0)$ са $x-$осе постоји једна интегрална крива $y = \sqrt[3]{3\,(x - x_0)}$.



Теорема 1.Ако је $f(x, y)$ непрекидна у околини (x_0, y_0) онда једначина $y' = f(x, y)$ има бар једно решење $y = \varphi(x)$ и $y_0 = \varphi(x_0)$.

Дефиниција 1. Опште решење диференцијалне једначине $y' = f(x, y)$ у D где су задовољени услови постојања и јединствености решење Косхијевог проблема је $y = \varphi(x, C)$ ако

(1) $y = \varphi(x, C)$ је рашење я свако $C, x \in (x_0 - h, x_0 + h)$

(2) за сваки почетни услов постоји C_0 такво да $y = \varphi(x, C_0)$ задовољава почетни услов $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Дефиниција 2. Партикуларно решење диференцијалне једначине је рашење добијено из општег за неко C (C може бити $\pm\infty$).

Дефиниција 3. Решење $y = \psi(x)$ диференцијалне једначине $y' = f(x, y)$ је сингуларно ако је јединственст нарушена у свакој тачки тј. кроз (x_0, y_0) пролази још једна интегрална крива која није $y = \psi(x)$.

На пример: $y =$ је сингуларно рашење једначине

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}.$$

Како наћ сингуларно рашење?

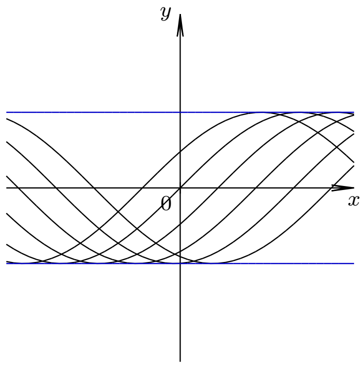
(1) наћи тачке у којима $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ тежи ∞;

(2) ако овај скуп даје једну или више кривих, проверити да ли су интегралне криве;

(3) проверити да ли је рашење јединствено у свакој тачки.

Пример:

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$
$$y = 1, \quad y = -1$$



Опште решење је $y = \sin(x + c)$.

1.1.1 Једначине са раздвојеним промењљивима

Једначине са раздвојеним промењљивим су једначине облика

$$f_1(y)dy = f_2(x)dx$$

Пример:

$$\begin{aligned} (1+y^2)xdx &= (1+x^2)ydy \\ \frac{xdx}{1+x^2} &= \frac{ydy}{1+y^2} \quad \Big/ \int \\ \ln\left|\left(1+x^2\right)\right| &= \ln\left(1+y^2\right) + \ln C \\ \left(1+x^2\right) &= C\left(1+y^2\right) \end{aligned}$$

1.1.2 Хомогене једначине првог реда

Ово су једначине облика

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$u = \frac{y}{x} \quad y = ux \quad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \varphi(u) \qquad \frac{du}{dx} \cdot x = \varphi(u) - u$$

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x} \qquad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|Cx|$$

Пример 1:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$y' = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}} \qquad u'x + u = \frac{1 + u^2}{u}$$

$$udu = \frac{dx}{x} \qquad u'x = \frac{1}{u}$$

$$\frac{u^2}{2} = \ln|Cx| \qquad u^2 = \ln Cx^2$$

$$y^2 = x^2 \ln(Cx^2)$$

Јендчине

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

решавају се сменом

$$x = u + \alpha$$
$$y = v + \beta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{au + a\alpha + bv + b\beta + c}{a_1u + a_1\alpha + b_1v + b_1\beta + c_1}$$

Решимо по α, β ако

$$a\alpha + b\beta = -c$$
$$a_1\alpha + b_1\beta = -c_1$$

што може јер је

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

и добијамо једначину облика $y\prime = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

1.1.3 Линеарне диференцијалне једначин

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Хомогене:

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + C$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Нехомогене:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x))$$

$$C(x)'e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

Пример 1:

$$y' + y\cos x = 2\cos x$$

$$y = e^{-\int \cos x dx}\left[C + \int 2\cos x e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

$$y = e^{-\sin x}\left[C + \int 2\cos x e^{\sin x}dx\right]$$

$$y = e^{-\sin x}\left[C + 2e^{\sin x}\right] = Ce^{-\sin x} + 2$$

1.1.4 Бернулијева једначина

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

За $\alpha = 1$ хомогена линеарна За $\alpha = 0$ линеарна За $\alpha \neq 0,1$ смена $z = y^{1-\alpha}, \quad z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha}$

$$\begin{aligned} y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} &= q(x) \\ \frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z &= q(x) \\ z' + (1-\alpha)\, p(x)z &= q(x) \quad \text{Линеарна} \end{aligned}$$

Пример 1:

$$\begin{aligned} y' + y \operatorname{tg} x &= -y^2 \cos x \\ z = y^{-1} &\qquad z' = \frac{-y'}{y^2} \\ \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} \operatorname{tg} x &= -\cos x \\ -z' + z \operatorname{tg} x &= -\cos x \\ z' - z \operatorname{tg} x &= \cos x \\ z &= e^{\int \operatorname{tg} x dx} \left[C + \int \cos x e^{-\int \operatorname{tg} x dx} dc \right] \\ &= e^{-\ln|\operatorname{tg} x|} \left[C + \int \cos x e^{\ln|\operatorname{tg} x|} dc \right] \\ &= \frac{1}{\cos x} \left[C + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin x 2x \right) \right] \end{aligned}$$

1.1.5 Ортогоналне трајекторије

Проблем: за дату фамилију кривих $\phi(x, y, c) = 0$ наћ фамилију кривих $\psi(x, y, c) = 0$ такву јда свака крива прве фамилије кроз тачку $M(x, y)$ сече криву из друге фамилије под правим углом . Фамилија $\psi(x, y, c) = 0$ се зове ортогоналном трајекторијом фамилије $\phi(x, y, c) = 0$ и обрнуто.

1. корак: Нађемо диференцијалну једначину фамилије $\phi(x, y, c) = 0$

$$\phi(x, y, c) = 0 \quad \text{диференцирамо по } x$$

То је $\phi'_x + \phi'_y \cdot y' = 0$ и добијамо једначину $F(x, y, y') = 0$.

2. корак: Направимо једначину $F(x, y, -\dfrac{1}{y'}) = 0$

3. корак: Решавамо и добијамо фамилију $\psi(x, y, c) = 0$ која је трајекторија.

Пример 1:Нађ ортогоналну трајекторију фамилије криве $x^2 + y^2 = R^2$.

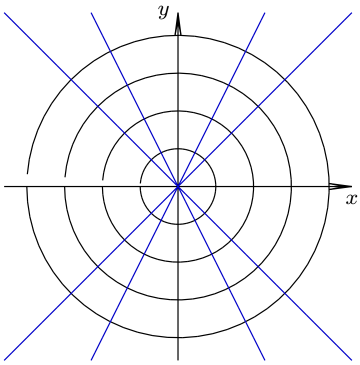
$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = \frac{-x}{y} \quad \text{диференцијална једначина}$$

$$y' \to -\frac{1}{y'} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x}{y} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln Cx = \ln y \quad y = Cx$$



Пример 2: $y = Ce^x$

$y' = Ce^x$

$y' - y = 0$

$-\frac{1}{y} - y = 0$

$\frac{dx}{dy} = -y$

$-dx = +ydy$

$\frac{y^2}{2} = -x + C$

$y^2 = -2x + C$

1.2 Једначине вишег реда

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

почетни услови $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Теорема 1:Нека је f је непрекидна као функција $n+1$ променљивом у некој околине тачке $M_0\left(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$, онда постоји интервал $x_0 - h < x < x_0 + h$ на коме постоји бар једно решење $y = \varphi(x)$ који задовољава почетни услов.

Ако f има ограничене парцијалне иыводе $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, онда је ресхење јединствено.

На пример:

$$y'' = e^{-x^2} + \sin y', \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'$$

ограничени ...

Дефиниција 1: Опште решењедиференцијалне једначине облика $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ у домену Ω где постоји једниствено решење Кошијевог проблема је $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ такво да

(1) за свако $C_1, \ldots, C_n$ функције $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ задовољава једнацхину за $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$;

(2) за почетне услове $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ такве да $\left(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in \Omega$ множењем наћи јединствено $C_1^0, \ldots, C_n^0$ тако да $y = \varphi\left(x, C_1^0, \ldots, C_n^0\right)$ је решење и задовољава почетне услове.

Дефиниција 2:Партикуларно решење се добија за неке $C_1, \ldots, C_n$ крива $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ је интегрална крива.

1.2.1 Линеарне хомогене диференцијалне једначине

Линеарне хомогене диференцијалне једначина је:

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0$$

где су $p_i(x)$ непрекидне на $[a, b]$.

Дефиниција 1: $y_1(x), \ldots y_n(x)$ су линеарно зависне на (a, b) ако $\exists \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и бар једно $\alpha_i \neq 0$ такви да је $\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$ за $\forall x \in (a, b)$.

Примери:

$$y_1 = x, \quad y_2 = 2x \quad \text{зависне}$$

$$y_0 = 1, \quad y_1 = x, \quad \ldots \quad y_n = x^n \quad \text{линеарно независне}$$

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, \quad \ldots, \quad y_n = e^{k_n x}, \quad k_i \text{ различити, линеарно независне}$$

Теорема 1(Потребан услов за линеарну независност) Ако функције $y_1(x), \ldots y_n(x)$ имају изводе до реда $n-1$ на (a,b) и линеарно зависне су, онда:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \text{на}\,(a,b)$$

$W(x)$ се зове Вронскијан.

доказ: Неумањујући општост, претпоставимо да је

$$n=3 \quad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0, \quad \text{претпоставимо} \quad \alpha_1 \neq 0$$

$$\begin{aligned} y_1 &= -\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 - \tfrac{\alpha_3}{\alpha_1} y_3 \\ y_1' &= \cdots \\ y_1'' &= \cdots \end{aligned}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} y_3 & y_2 & y_3 \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2' - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} y_3' & y_2' & y_3' \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2'' - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} y_3'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = 0$$

јер је прва колона линеарно зависна од друге и треће колоне.

Значи: Ако $W(x) \neq 0$, $y_1, \ldots, y_n$ су линеарно независне.

Теорема 2: Ако су $y_1, \ldots, y_n$ линеарно независна на (a,b) решења линеарне хомогене диференцијалне једначине $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0$ где су $p_i(x)$ непрекидне на $[a,b]$, онда је $W(x) \neq 0$ за $\forall x \in (a,b)$.

доказ: нека је $n=3$. Претпоставимо супротно, да постоји $x_0 \in (a,b)\,, \quad W(x_0) = 0$

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \alpha_3 y_3(x_0) &= 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \alpha_3 y_3'(x_0) &= 0 \\ \alpha_1 y_1''(x_0) + \alpha_2 y_2''(x_0) + \alpha_3 y_3''(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Овај хомогени систем има детерминанту једнаку нули, па има нетривијално решење $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}$.

Посматрамо функцију $y = \overline{\alpha_1} y_1 + \overline{\alpha_2} y_2 + \overline{\alpha_3} y_3$, y је решење диференцијалне једначине и

$$\begin{aligned} y(x_0) &= 0 \\ y(x_0)' &= 0 \\ y(x_0)'' &= 0 \end{aligned}$$

$y = 0$ је рашење једначине,па због јединствености $\overline{\alpha_1}y_1 + \overline{\alpha_2}y_2 + \overline{\alpha_3}y_3 = 0$ на (a, b) па су y_1, y_2, y_3 линеарно зависни. ово је контрадикција са претпоставком теореме!

Теорема 3: $y_1, \dots, y_n$ решења хомогенс линеарна једначина су линеарно назависна $\Leftrightarrow W(x) \neq 0$.

Теорема 4: Нека су $y_1, \dots, y_n$ решења хомогене линеарне диференцијалне једначине на $[a, b]$ и нека је $x_0 \in [a, b]$. Онда је

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} P_1(x)dx} \quad \text{Лиувилова формула}$$

доказ (за $n = 2$, слични и за $n > 2$)
Нека су $y_1(x), y_2(x)$ решења линеарне хомогене диференцијалне једначине реда 2 $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \\ W'(x) &= y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1'' \end{aligned}$$

$$y_1\left(y_2'' + p_1(x)y_2' + y_2p_2(x)\right) - y_2\left(y_1'' + p_1(x)y_1' + y_1p_2(x)\right) = 0$$

$$\underbrace{y_1y_1'' - y_2y_1''}_{W'(x)} + p_1(x)\underbrace{(y_1y_2' - y_2y_1')}_{W(x)} = 0$$

$$\begin{aligned} W'(x) + p_1(x)W(x) = 0 \qquad &\Rightarrow \quad \frac{dW}{W} = -p_1(x)dx \\ &\Rightarrow W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx} \end{aligned}$$

$$x = x_0 : \quad W(x_0) = Ce^0 = C \quad \Rightarrow W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx}$$

Теорема 5: Линеарна хомогена диференцијална једначина има n линеарно независних решења.

доказ Нека је $x_0 \in [a, b]$. Према теореми о егзистенцији и јединствености решења, постоји јединствено решене y_1 почетног проблема 1(п п 1)

$$pp1 \begin{cases} y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

На основу исте теореме постоји јединствено решење y_2 за п п 2

$$pp2\begin{cases} y_2(x_0)=0 \\ y_2'(x_0)=1 \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases} \quad \cdots \quad ppn\begin{cases} y_n(x_0)=0 \\ y_n'(x_0)=0 \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0)=1 \end{cases}$$

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \quad \text{на}\,(a,b)$$

Вронскијан је различит од нуле па су ова решења линеарно независна.

Теорема 6: Нека је $y_1,\dots,y_n$ линеарно независна решења линеарне хомогене једначине. Нека је y произвољно решење. Тада постоје $C_1,\dots,C_n\in\mathbb{R}$ такви да је $y=C_1y_1+\cdots+C_ny_n$ (тј. $C_1y_1+\cdots+C_ny_n$ је опште решење хомогене диференцијалне једначине)

доказ Нека је y решење и $x_0\in[a,b]$. Претпоставимо

$$\begin{cases} y(x_0) & =a_0 \\ y_0'(x_0) & =a_1 \\ \vdots & \\ y_0^{(n-1)}(x_0) & =a_{n-1} \end{cases}$$

Детернинанта система:

$$\begin{aligned} C_1y_1(x_0)+\cdots+C_ny_n(x_0) &= a_0 \\ C_1y_1'(x_0)+\cdots+C_ny_n'(x_0) &= a_1 \quad \text{je} \quad W(x_0)\neq 0 \\ &\vdots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\cdots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0) &= a_{n-1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ систем има јединствено решење $\left(C_1^{(0)},\dots,C_n^{(0)}\right)$.

Нека је $z=y-C_1^{(0)}y_1-\cdots-C_n^{(0)}y_n$. z је решење једначине.

$$\left.\begin{aligned} z(x_0) &= 0 \\ z'(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z\,\text{је тривијално решење} \Rightarrow z\equiv 0\Rightarrow y=C_1^{(0)}y_1+\cdots+C_n^{(0)}y_n$$

1.2.2 Линеарне хомогене једначине са константним коефицијентима

$$n = 2: \quad y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

Нека $y = e^{\lambda x}$ решење ове једначине. Онда

$$\begin{aligned} e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2\right) &= 0 \\ \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 &= 0 \quad \leftarrow \quad \text{карактеристична једначина} \end{aligned}$$

(1) Ако су решења карактеристичне једначине реална и различита

$$\begin{aligned} y_1 = e^{\lambda_1 x} & \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x} \\ y = C_1 e^{\lambda_1 x} & \quad + C_2 e^{\lambda_2 x} \end{aligned}$$

Пример 1:$y'' - 3y' + 2y = 0$
Карактеристична једначина $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0; \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$
Опште решење $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

(2) λ_1, λ_2 комплексно, кон југована

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \alpha \pm i\beta \\ e^{\lambda x} &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) \\ y_1 &= e^{\alpha x}\cos\beta x \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}$$

Пример 2:

$$\begin{aligned} & y'' + 2y' + 5y = 0 \\ & \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \tfrac{-2\pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \\ & y = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x \end{aligned}$$

(3) Реална и иста

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = \lambda \qquad y_1 = e^{\lambda x} \quad y_2 &= x e^{\lambda x} \\ y &= C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Пример 3: $y'' + 2y' + y = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -1$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

Нека је дата линеарна хомогена једначина са константним коефицијентима $n-$тог реда

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y &= 0 \\ \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n &= 0 \quad \text{карактеристична једначина} \end{aligned}$$

Нађемо нуле

(а) λ нула (проста) $\rightarrow$ партикуларно решење $e^{\lambda x}$

(б) λ нуле реда k $\rightarrow$ партикуларна решења $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$

(ц) $\alpha \pm \beta i$ просте комплексне нуле $\rightarrow$ решења су $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$

(д) $\alpha \pm \beta i$ комплексне нуле реда k $\rightarrow$ решења су $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x,$

$$xe^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \ldots \quad x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Пример 4:

$$\begin{aligned} y^{VI} - y'' &= 0 \\ \lambda^6 - \lambda^2 &= 0 \\ \lambda^2\left(\lambda^4 - 1\right) &= 0 \\ \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)\left(\lambda^2+1\right) &= 0 \\ \lambda_{1,2} = 0 \quad \lambda_3 = 1 \qquad & \lambda_4 = -1 \quad \lambda_{5,6} = \pm i \end{aligned}$$

Опште решење:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x} + C_5\cos x + C_6\sin x$$

1.2.3 Нехомогене линеарне диференцијалне једначине

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = f(x)$$

Теорема 1: Нека је y_p решење нехомогене, а y_h решење хомогене онда је $y_p + y_h$ решење нехомогене линеарне диференцијалне једначине.

Теорема 2: Опште решење на (a,b), $|y^{(k)}| < +\inf$ $L[y] = f(x)$ $(p(x)$ непрекидна на $[a,b]$) је сума општег реда хомогеног $y_n = \sum_1^n C_i y_i(x)$ и партикуларно решење нехомогеног y_p

$$y = y_p + y_h$$

1.2.4 Нехомогене линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

(1) $f(x) = P_m(x) \quad \leftarrow$ полином.
$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ карактеристична једначина

Тражимо партикуларно решење.

Ако $\lambda = 0$ није нула карактеристичног полинома, онда је $y_p = Q_m(x)$. Ако $\lambda = 0$ јесте нула карактеристичног полинома, онда је $y_p = x^k Q_m(x)$, где је k вишеструкост. тештбфПример 1:

$$\begin{aligned} y'' + y' &= 2x + 3 \qquad \lambda^2 + \lambda = 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1 \\ y_p &= x\,(Ax + B) \\ y_p' &= 2Ax + B \\ y_p'' &= 2A \\ 2Ax + (2Ax + B) &= 2x + 3 \qquad A = \frac{1}{2} qqad B = 3 \\ y_p = x\left(\frac{1}{2}x + 3\right) & \qquad y = \underbrace{C_1 + C_2e^x}_{y_h} + \underbrace{= x\left(\frac{1}{2}x + 3\right)}_{y_p} \end{aligned}$$

$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ карактеристична једначина.

(2) $f(x) = e^{ax}Q_m(x)$
Ако a није нула карактеристичног полинома $y_p = e^{ax}Q_m(x)$.
Ако a јесте нула карактеристичног полинома, вишеструкисти k, $y_p = x^k e^{ax} Q_m(x)$

Пример 2:

$$\begin{aligned} y'' + y' &= 2e^x \\ \lambda^2 + \lambda &= 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1 \\ y_p = Ae^x & \qquad y_p' = y_p'' = Ae^x \\ y_p'' + y_p' &= 2e^x \\ 2Ae^x = 2e^x & \qquad A = 1 \quad y_p = e^x \\ y_h &= C_1 + C_2e^{-x} \\ y &= C_1 + C_2e^{-x} + e^x \end{aligned}$$

Пример 3:

$$\begin{aligned}
y'' - 2y' + y &= xe^x \\
\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 &\qquad \lambda_{1,2} = 1 \quad y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x \\
y_p &= x^2 e^x (Ax + B) \\
y_p' &= e^x \left(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx\right) \\
y_p'' &= e^x \left(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx + 3Ax^2 + 2Bx + 6Ax + 2B\right) \\
6A = 1 &\qquad A = \frac{1}{6} \quad 2B = 0 \\
y_p &= \frac{x^3}{6} e^x
\end{aligned}$$

(3)

$$f(x) = e^{\alpha x} \left[P_n(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x\right]$$

$\alpha \pm \beta i$ нула карактеристичног полинома вишеструкости k
$y_p = x^k e^{\alpha x} \left[U_n(x) \cos \beta x + V_n(x) \sin \beta x\right]$ ако $\alpha \pm \beta i$ није карактеристична нула

$$y_p = e^{\alpha x} \left[U_n(x) \cos \beta x + V_2(x) \sin \beta x\right]$$

Пример 4:

$$\begin{aligned}
y'' + 2y' + y = \cos x &\qquad \lambda_{1,2} = -1 \\
y_p = A \cos x + B \sin x &\qquad \cdots \quad A = 0 \quad B = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$$

Пример5:

$$\begin{aligned}
y'' + y &= 5x \cos x \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm i \\
y_p &= x \left[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x\right]
\end{aligned}$$

1.2.5 Метода варијација константи (Лагранж)

$$y'' + p_1(x) y' + p_{2(x)} y = f(x) \quad p_1, p_2 \quad \text{непрекидне на} \quad [a, b]$$

Нека су y_1, y_2 решења хмогене једначине, онда је опште решење хомогене $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$$\begin{aligned}
y &= C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \\
y' &= y = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'
\end{aligned}$$

додатни услов $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$

$$\begin{aligned} y'' &= C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' \\ C_1 & \underbrace{[y_1'' + p_1y_1' + p_2]}_{=0} + C_2\underbrace{[y_2'' + p_1y_2' + p_2]}_{=0} + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{aligned}$$

па $C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$. Систем

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 & = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' & = f(x) \end{cases}$$

има јединствено решење јер је детерминанта Вронскијан који је различит ид нуле..

$$\begin{aligned} C_1' &= \varphi_1(x), \quad C_1 = \int \varphi_1(x) + D_1 \\ C_2 &= \int \varphi_2(x) + D_2 \end{aligned}$$

Пример 1:

$$\begin{aligned} y'' + y &= \frac{1}{\sin x} \\ y'' + y &= 0 \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm i \\ y_h &= C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ & C_1'(x)\cos x + C_2' \sin x = 0 \qquad / \sin x \\ - \quad & C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \tfrac{1}{\sin} \qquad / \cos x \\ C_2' = \tfrac{\cos x}{\sin x} \quad & C_2(x) = \ln|\sin x| + D_2 \\ C_1' = -1 \quad & C_1 = -x + D_1 \\ y = (\ln|\sin x| + D_2)\sin x \quad & + (-x + D_1)\cos x \end{aligned}$$

Ако је једначина n-тог реда

$$\begin{aligned} y &= C_1(x)y_1 + \cdots + C_n(x)y_n \\ y' &= \underbrace{\sum C_i'(x)y_i}_{=0} + \sum C_i(x)y_i' \\ y'' &= \underbrace{\sum C_i'(x)y_i'}_{=0} + \sum C_i(x)y_i'' \\ y^{(n)} &= \underbrace{\sum C_i'(x)y_i^{(n-1)}}_{=0} + \sum C_i(x)y_i^{(n)} \end{aligned}$$

$$C_1(x)\underbrace{\left[y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + p_n\right]}_{=0} + C_2(x)\underbrace{[\cdots]}_{=0} + \sum C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = f(x)$$

1.2.6 Ојлерова једначина

$$(ax+b)^n\, y^{(n)} + a_{m-1}\,(ax+b)^{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\,(ax+b)\, y' + a_0 y = f(x)$$

Смена $ax+b=e^t, \quad adx = e^t dt$

$$\begin{aligned} y' &= y'_t \frac{dt}{dx} = ae^{-t} y'_t \\ y'' &= a\left(-e^{-t}y'_t + e^{-t}y''_{tt}\right)e^{-t} \end{aligned}$$

Пример 1:

$$(x+2)^2 y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0 \quad x+2=e^t$$

$$\begin{aligned} y' &= e^{-t}y'_t \\ y'' &= e^{-t}\left(y''_{tt} - y'_t\right) \\ y''_{tt} &+2y'_h - 3 = 0 \\ \lambda^2 &+2\lambda - 3 = 0 \\ y_h &= C_1 e^{-3t} + C_2 e^t = C_1 \frac{1}{(x+2)^3} + C_2(x+2) \end{aligned}$$

Пример 2:

$$\begin{aligned} x^3 y''' &+2xy' - 2y = x + x^2 \ln x \\ y''' &= e^{-t}\left[-2e^{2t}(y''-y) + e^{-2t}(y'''-y'')\right] \\ y''' &= e^{-3t}\left[y''' - 3y'' + 2y\right] \\ y''' &-3y'' + 2y' + 2y' - 2y = e^t + te^{2t} \\ y''' &-y'' + 2y' - 2y = e^t + te^{2t} \\ \lambda^3 &-\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0 \\ \left(\lambda^2+2\right) &\quad (\lambda - 1) = 0 \\ \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2} &\qquad \lambda_3 = 1 \\ y_h &= C_1 e^{\sqrt{2t}} + C_2 e^{-\sqrt{2t}} + C_3 e^t \\ y_{p_1} = Ate^t \quad y'_{p_1} = Ae^t(t+1) &\qquad y''_{p_1} = Ae^t(t+2) \quad y'''_{p_1} = Ae^t(t+3) \\ Ae^t &\cdot [t+3-t-2+2t+2-2t] = e' \quad A = \frac{1}{3} \\ y_{p_2} = (At+B)e^{2t}\cdots \qquad y_{p_2} = \frac{1}{6}(t-5)e^{2t} \end{aligned}$$