



Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet  
www.grf.bg.ac.rs

---

Studijski program: GRAĐEVINARSTVO

Modul: KONSTRUKCIJE

Godina/Semestar: III godina / V semestar

Naziv predmeta: **METALNE KONSTRUKCIJE 1 (B2K3M1)**

Nastavnik: **Prof. dr Zlatko Marković**

Naslov predavanja: **Pritisnuti elementi konstantnog višedelnog preseka**

Datum : 5. decembar 2022. godine

---

Beograd, 2022.

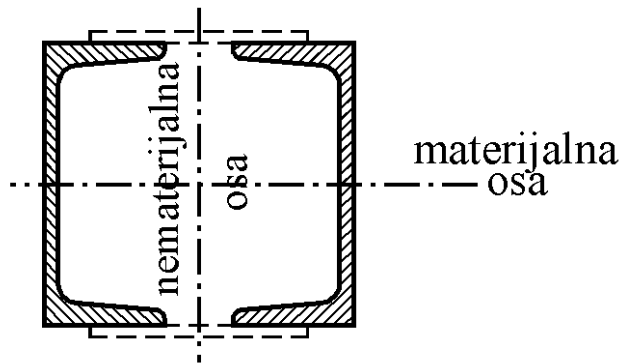
*Sva autorska prava autora prezentacije i/ili video snimaka su zaštićena. Snimak ili prezentacija se mogu koristiti samo za nastavu na daljinu studenta Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu u školskoj 2021/2022 i ne mogu se koristiti za druge svrhe bez pismene saglasnosti autora materijala.*

# Osobnosti višedelnih štapova

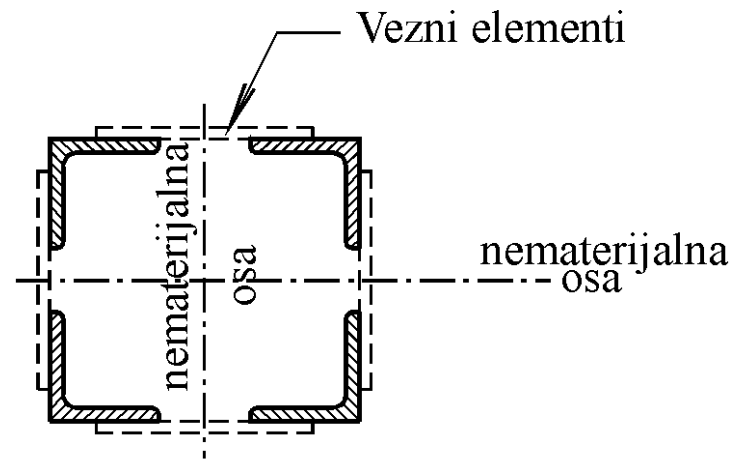
- Poprečni presek se sastoji od više samostalnih elemenata koji su mestimično povezani.
- Razmicanjem samostalnih elemenata povećavaju se geometrijske karakteristike, nosivost poprečnog preseka i krutost elementa.
- Višedelni štapovi su racionalni u pogledu utrošenog materijala, ali je potrebno više rada za njihovu izradu!
- Bar jedna od glavnih osa inercije je **nematerijalna!**
- Njihovo ponašanje je značajno kompleksnije u odnosu na jednodelne štapove.

# Definicije glavnih osa

- **Materijalna osa** je glavna osa inercije poprečnog preseka koja preseca bar jedan samostalni element;
- **Nematerijalna osa** je glavna osa inercije koja ne preseca ni jedan samostalni element;
- Višedelni štap uvek ima bar jednu nematerijalnu osu inercije;



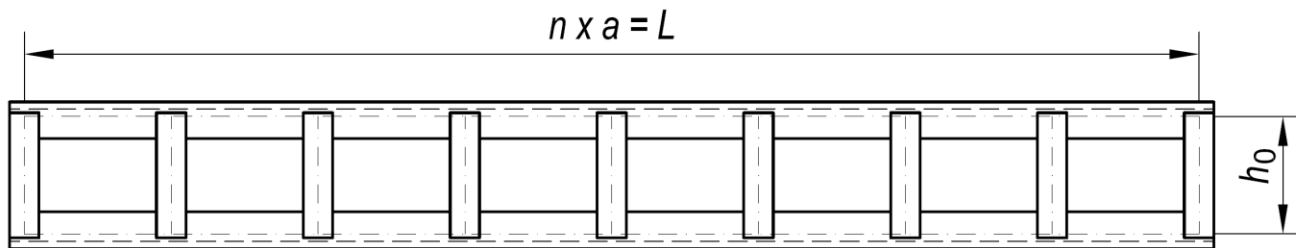
a) Presek sa jednom materijalnom i jednom nematerijalnom osom



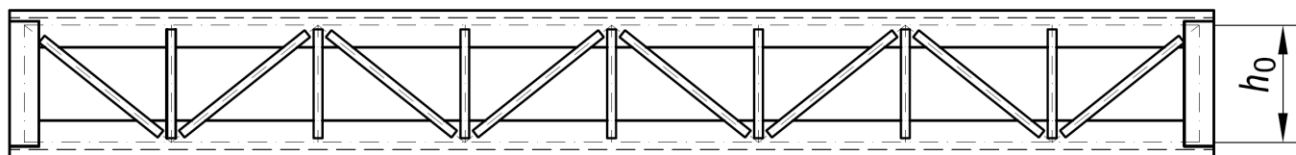
b) Presek sa obe nematerijalne ose

# Tipovi višedelnih štapova

- Samostalni elementi su međusobno povezani veznim elementima na određenom ekvidistantnom rastojanju ( $a = \text{const}$ );
- U zavisnosti od oblika i vrste veznih elemenata razlikuju se dva tipa višedelnih štapova: **ramovski i rešetkasti**;
- Kod ramovskog tipa vezni elementi su prečke, a kod rešetkastih dijagonale i vertikale.
- Prečke se obavezno postavljaju na krajevima elementa i bar u trećinama dužine!

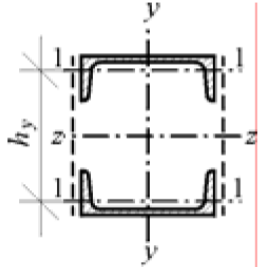
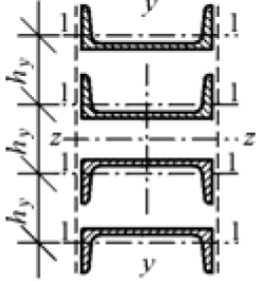
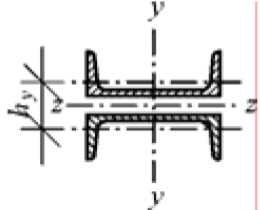
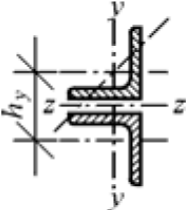
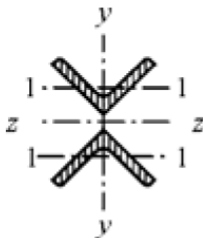
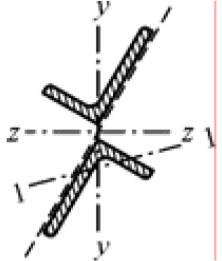
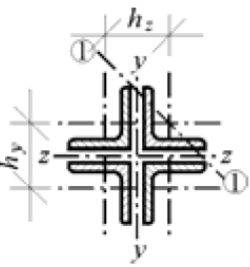
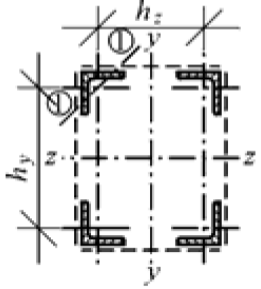


a) ramovski

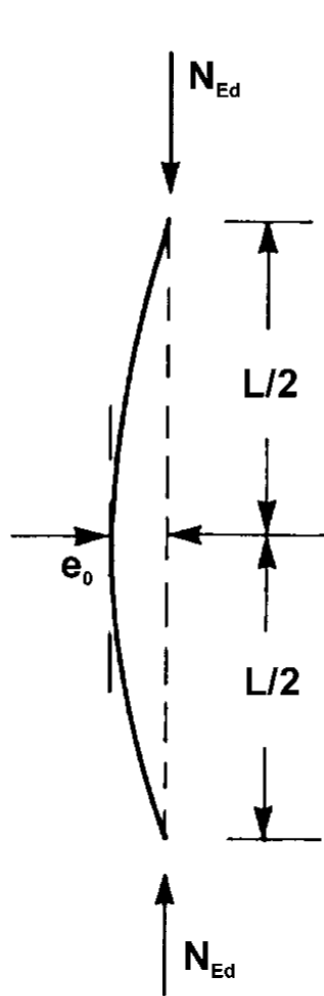


b) rešetkasti

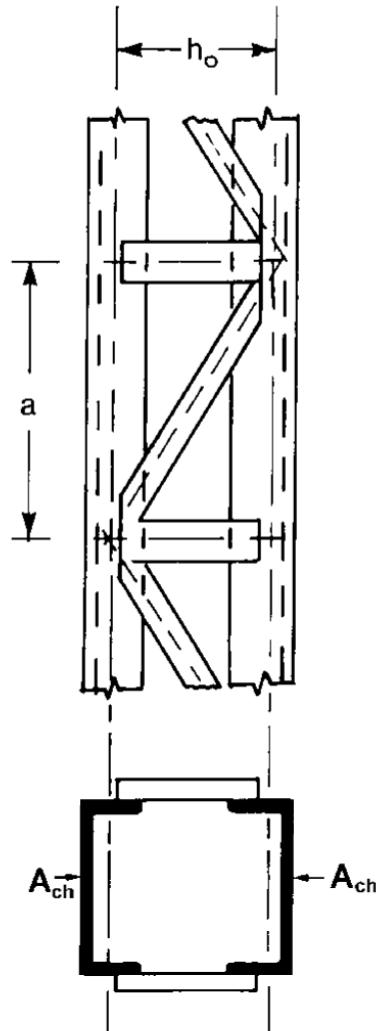
# Različiti tipovi poprečnih preseka višedelnih štapova

1	Višedelni štapovi koji imaju bar jednu materijalnu osu	 <p>The diagram shows a cross-section of a beam with four flanges. A vertical dashed line represents the y-axis, and a horizontal dashed line represents the z-axis. A red vertical line is on the right side. Dimensions <math>h_y</math> and <math>l</math> are indicated.</p>	 <p>The diagram shows a cross-section of a beam with four flanges, similar to the previous one but with staggered flanges. Dimensions <math>h_y</math> and <math>l</math> are indicated.</p>
2	Višedelni štapovi koji imaju jednu materijalnu osu i kod kojih je čisto rastojanje između samostalnih elemenata jednako debljini čvornog lima	 <p>The diagram shows a cross-section of a beam with four flanges. A vertical dashed line represents the y-axis, and a horizontal dashed line represents the z-axis. A red vertical line is on the right side. Dimensions <math>h_y</math> and <math>l</math> are indicated.</p>	 <p>The diagram shows a cross-section of a beam with four flanges, similar to the previous one but with staggered flanges. Dimensions <math>h_y</math> and <math>l</math> are indicated.</p>
3	Dvodelni štapovi od ukrštenih ugaonika	 <p>The diagram shows a cross-section of a beam made of two crossed angles. A vertical dashed line represents the y-axis, and a horizontal dashed line represents the z-axis. Dimensions <math>l</math> and <math>z</math> are indicated.</p>	 <p>The diagram shows a cross-section of a beam made of two crossed angles, similar to the previous one but with staggered flanges. Dimensions <math>l</math> and <math>z</math> are indicated.</p>
4	Višedelni štapovi koji nemaju materijalnu osu	 <p>The diagram shows a cross-section of a beam with four flanges. A vertical dashed line represents the y-axis, and a horizontal dashed line represents the z-axis. Dimensions <math>h_y</math> and <math>h_z</math> are indicated.</p>	 <p>The diagram shows a cross-section of a beam with four flanges, similar to the previous one but with staggered flanges. Dimensions <math>h_y</math> and <math>h_z</math> are indicated.</p>

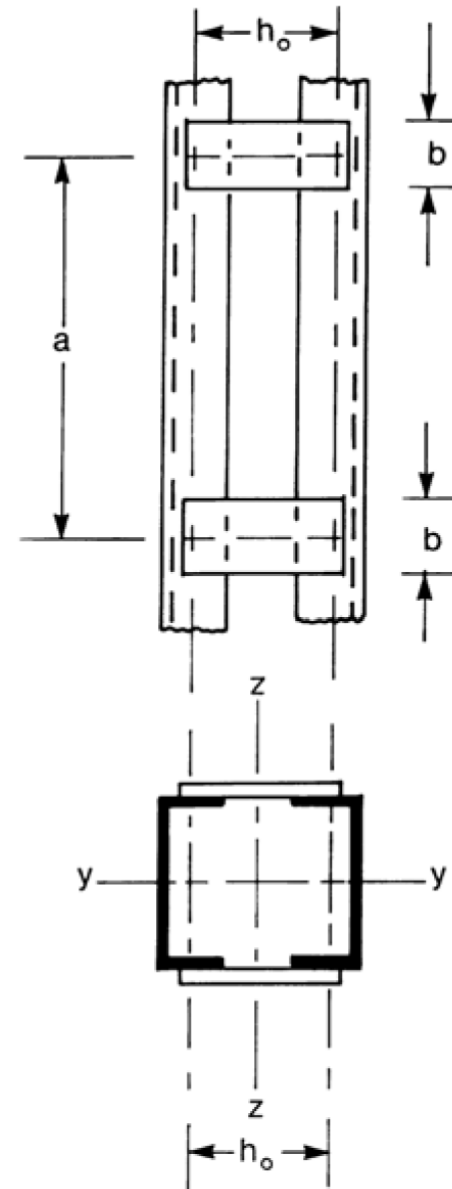
# Proračunski model za izvijanje višedelnog štapa



$$e_0 = L/500$$



Metalne konstrukcije 1



P6-6

# Kritična sila izvijanja oko nematerijalne ose

- Ne postoji deo poprečnog preseka (rebro) koji prihvata dominantan deo smičućih napona.
- Uticaj smičućih sila na deformaciju štapa ne može da se zanemari.
- U diferencijalnu jednačinu izvijanja treba uvrstiti i deo deformacije usled smičućih napona.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_M + \mathbf{V}_V$$

$\mathbf{V}_M$  ugib usled momenta savijanja,

$\mathbf{V}_V$  ugib usled transvirzalne (smičuće) sile,

# Diferencijalna jednačina za izvijanje oko nematerijalne ose

$$v'' + \frac{\pi^2}{L^2} \frac{N_c}{N_{cr}} \frac{1}{1 - N_c \frac{\gamma}{V}} \cdot v = - \frac{\pi^2}{L^2} \frac{N_c}{N_{cr}} \frac{1 + N_{cr} \frac{\gamma}{V}}{1 - N_c \frac{\gamma}{V}} \delta_0 \sin \frac{\pi}{L} x$$

Početna imperfekcija u obliku sinusne funkcije;

$N_{cr}$  kritična Ojlerova sila za jednodelan štap,

$\delta_0$  strela početne geometrijske imperfekcije,

$L$  dužina štapa,

$V$  smičuća sila,

$\gamma$  klizanje poprečnog preseka  $\gamma = \tau/G$ .



# Rešenje diferencijalne jednačine

Pretpostavljen oblik rešenja

$$v(x) = (\delta - \delta_0) \sin \frac{\pi}{L} x$$

Iz uslova da strela  $\delta$  teži beskonačnosti dobija se kritična sila!

$$N_{cr,V} = \frac{N_{cr}}{1 + N_{cr} \frac{\gamma}{V}} = \frac{1}{\frac{1}{N_{cr}} + \frac{\gamma}{V}}$$

$N_{cr,V}$  kritična sila za izvijanje oko nematerijalne ose,

$N_{cr}$  kritična Ojlerova sila.

# Kritična sila izvijanja višedelnog štapa $N_{cr,V}$

$$S_V = V / \gamma$$

krutost veznih elemenata na smicanje

$$N_{cr,V} = \frac{1}{1/N_{cr} + 1/S_V}$$

$$N_{cr,V} = \pi^2 \frac{EI}{L^2 \left( 1 + \frac{N_{cr}}{S_V} \right)} = \pi^2 \frac{EI}{L_V^2}$$

$$L_V^2 = L^2 \left( 1 + \frac{N_{cr}}{S_V} \right) \quad \text{modifikovana dužina štapa}$$

Kod jednodelnih štapova  $S_V$  teži beskonačnosti, pa prethodni izrazi dobijaju poznati oblik za jednodelne štapove!

# Proračun pritisnutih štapova konstantnog višedelnog preseka prema EC3

U opštem slučaju treba sprovesti sledeće kontrole ULS:

- Kontrola nosivosti na izvijanje oko materijalne ose (ako postoji);
- Kontrola nosivosti na izvijanje oko nematerijalne ose;
- Kontrola nosivosti samostalnog elementa (najčešće merodavna kontrola za dimenzionisanje!) i
- Kontrola nosivosti veznih elemenata.

# Proračun nosivosti na izvijanje oko materijalne ose

- Sprovodi se uvek ako postoji materijalna osa;
- Proračun se sprovodi u svemu kao i kod elemenata konstantnog jednodelnog poprečnog preseka;
- Za višedelne elemente od dva unakrsno postavljena L profila, sa veznim limovima u dve ortogonalne ravni, proračun nosivosti na izvijanje može da se sprovede kao za jednodelne preseke, ako je rastojanje veznih elemenata manje od  $70i_{\min}$  gde je  $i_{\min}$  minimalni poluprečnik inercije samostalnog elementa;
- Za višedelne elemente od dva blisko postavljena L ili U profila proračun nosivosti na izvijanje može da se sprovede kao za jednodelne preseke, ako je rastojanje veznih elemenata manje od  $15i_{\min}$

# Proračun nosivosti na izvijanje oko nematerijalne ose

Proračun se sprovodi u sledećim koracima:

1. Proračun krutosti na smicanje  $S_V$ ;
2. Proračun kritične sile  $N_{cr,V}$ ;
3. Proračun ekvivalentne relativne vitkosti;
4. Sa ovako sračunatom relativnom vitkošću proračun nosivosti na izvijanje se sprovodi isto kao i kod elemenata konstantnog jednodelnog preseka!

### Krutost na smicanje $S_V$ višedelnih elemenata rešetkastog tipa

Sistem			
$S_V$	$\frac{n E A_d a h_0^2}{2d^3}$	$\frac{n E A_d a h_0^2}{d^3}$	$\frac{n E A_d a h_0^2}{d^3 \left[ 1 + \frac{A_d h_0^3}{A_v d^3} \right]}$

### Krutost na smicanje $S_V$ višedelnih štapova ramovskog tipa

$$S_V = \frac{24 E I_{ch}}{a^2 \left[ 1 + \frac{2 I_{ch} h_0}{n l_b a} \right]} \leq 2 \pi^2 \frac{E I_{ch}}{a^2}$$

- $n$  broj ravni ispune (najčešće je  $n = 2$ ),
- $h_0$  rastojanje između težišta samostalnih elemenata,
- $d$  dužina dijagonale,
- $A_d$  površina poprečnog preseka dijagonale
- $A_v$  površina poprečnog preseka vertikale,
- $I_{ch}$  moment inercije samostalnog elementa u ravni višedelnog elementa,
- $I_b$  moment inercije prečke u ravni višedelnog elementa.

# Proračun kritične sile izvijanja $N_{cr,V}$

$$N_{cr,V} = \frac{1}{1/N_{cr} + 1/S_V} = \frac{N_{cr}}{1 + N_{cr}/S_V}$$

$S_V$  krutost veznih limova na smicanje;

$N_{cr}$  Ojlerova kritična sila izvijanja jednodelnog štapa sa efektivnim momentom inercije  $I_{eff}$ .

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI_{eff}}{L^2}$$

# Efektivni moment inercije višedelnog štapa - $I_{eff}$

Efektivni moment inercije - $I_{eff}$	
Rešetkasti tip	$I_{eff} = 0,5h_0^2 A_{ch}$
Ramovski tip	$I_{eff} = 0,5h_0^2 A_{ch} + 2\mu I_{ch}$
$A_{ch}$	površina pojasa (samostalnog elementa);
$h_0$	rastojanje između težišta pojaseva;
$I_{ch}$	moment inercije pojasa u ravni štapa;
$\mu$	koeficijent efikasnosti;
Koeficijent efikasnosti $\mu$	
$\lambda \geq 150$	0
$75 \leq \lambda < 150$	$\mu = 2 - \lambda / 75$
$\lambda < 75$	1
$\lambda = \frac{L}{i_0}$	$i_0 = \sqrt{\frac{I_1}{2A_{ch}}}$ $I_1 = 0,5h_0^2 A_{ch} + 2I_{ch}$



# Ekvivalentna relativna vitkost višedelnog štapa

$$\bar{\lambda}_{z,eq} = \sqrt{N_{Rk} / N_{cr,V}}$$

$$N_{Rk} = A f_y \quad \text{za klase 1, 2 i 3}$$

$$N_{Rk} = A_{eff} f_y \quad \text{za klasu 4}$$

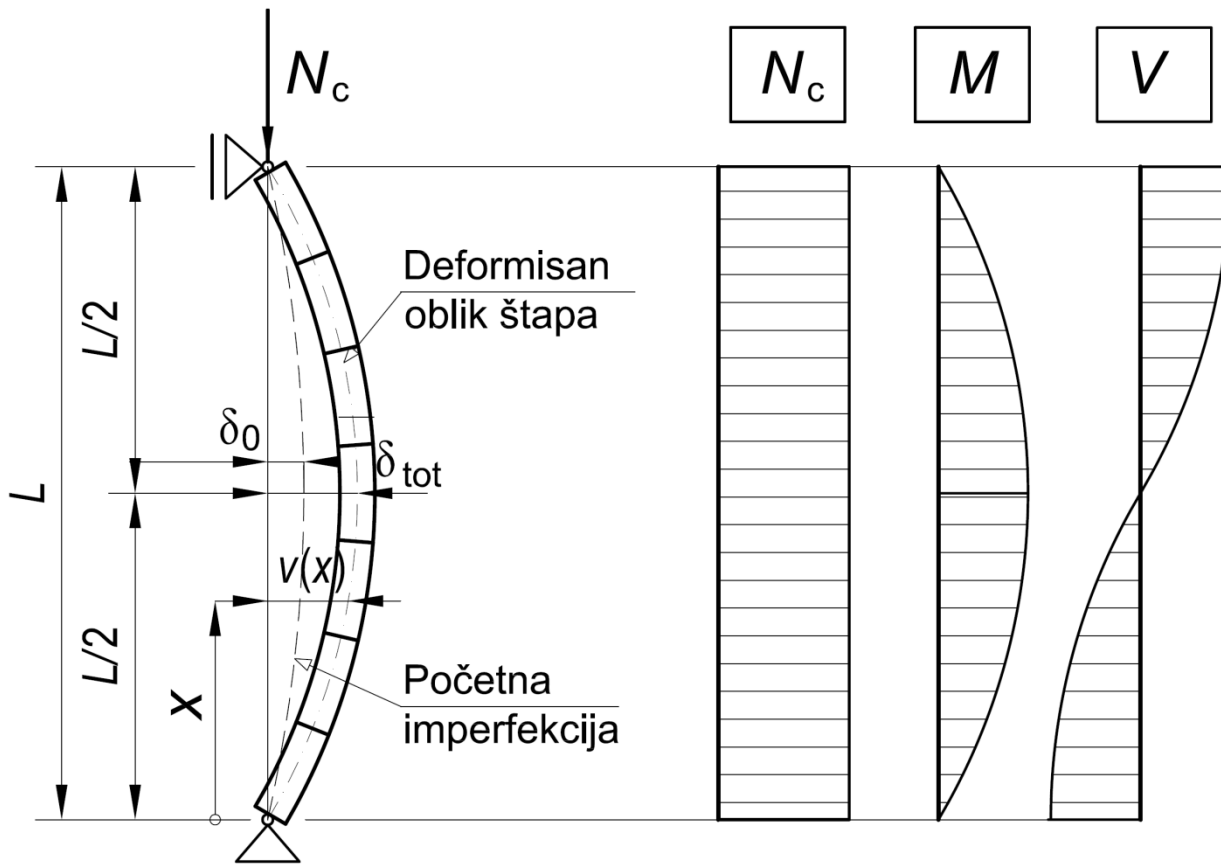
$N_{Rk}$  karakteristična nosivost poprečnog preseka,

$N_{cr,V}$  kritična sila izvijanja oko nematerijalne ose.

# Nosivost samostalnog elementa (pojasa)

- Nosivost samostalnog elementa je najčešće merodavno granično stanje nosivosti (ULS) kod višedelnih štapova.
- Mora da se kontroliše i kod štapova ramovskog i kod štapova rešetkastog tipa.
- Kod štapova **rešetkastog tipa** neophodna je kontrola samostalnog elementa (pojasa) samo **u sredini raspona**.
- Kod štapova **ramovskog tipa** neophodna je kontrola samostalnog elementa (pojasa) **u sredini raspona**, gde je maksimalan momenat savijanja, **i na krajevima štapa**, gde je maksimalna smičuća sila.

# Naprezanja višedelnog elementa ramovskog tipa



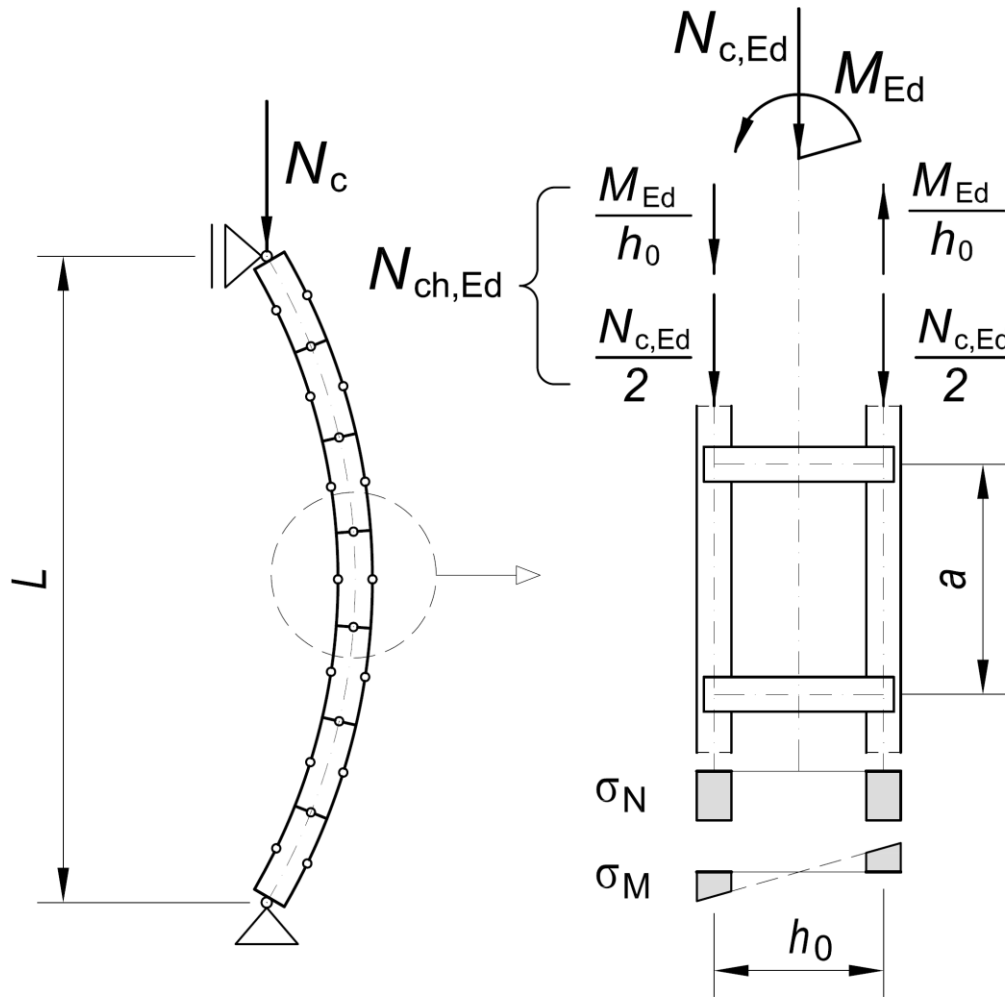
$$M(x) = N_c \delta_{tot} \sin \frac{\pi}{L} x$$

$$M_{max} = N_c \delta_{tot}$$

$$V(x) = \frac{\pi}{L} N_c \delta_{tot} \cos \frac{\pi}{L} (x)$$

$$V_{max} = \frac{\pi}{L} N_c \delta_{tot}$$

# Proračun uticaja u pojasu u sredini štapa



Sila u pojasu dvodelnog štapa

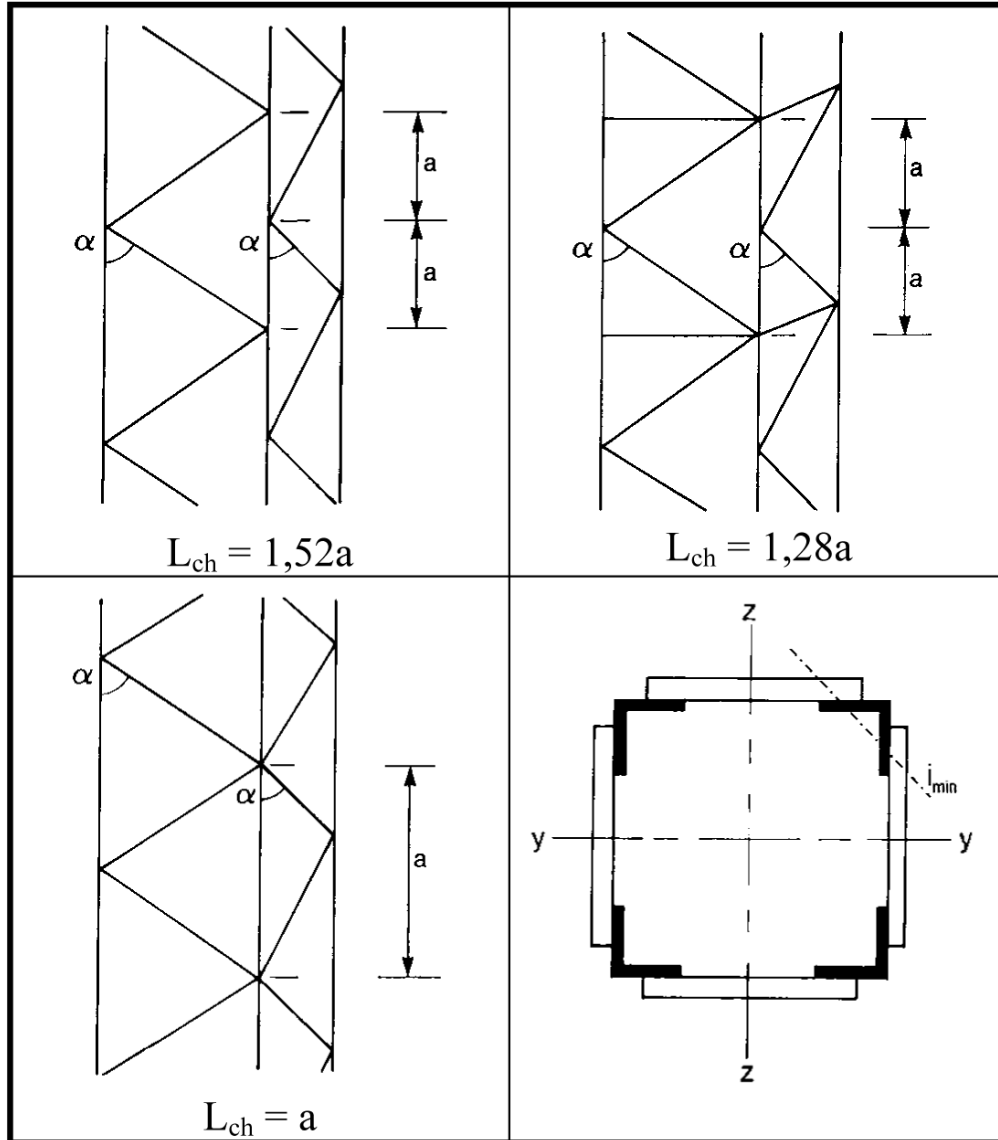
$$N_{ch,Ed} = \frac{N_{c,Ed}}{2} + \frac{M_{Ed} h_0}{2I_{eff}} A_{ch}$$

Moment savijanja u sredini polja

$$M_{Ed} = N_{Ed} \delta_{tot} = \frac{N_{Ed} \delta_0}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,V}}}$$

$$\delta_0 = e_0 = L/500$$

# Kontrola nosivosti na izvijanje pojaseva višedelnog štapa



$$\frac{N_{ch,Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1,0 \quad \leftarrow \text{Uslov}$$

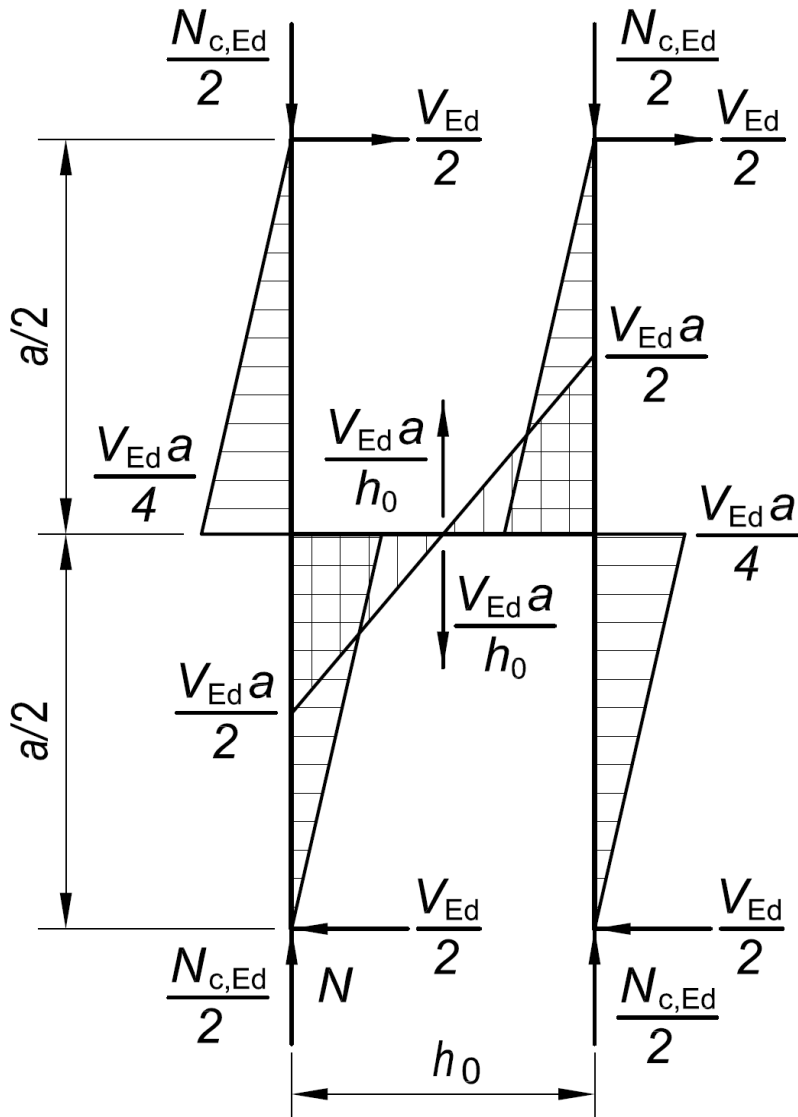
$$N_{b,Rd} = f(\bar{\lambda}_{ch}, \alpha)$$

$$\lambda_{ch} = L_{ch} / i_{min} \Rightarrow \bar{\lambda}_{ch} \Rightarrow \chi$$

$\lambda_{ch}$  vitkost samostalnog elementa;

Kod štapova ramovskog tipa može se usvojiti da je:  $L_{ch}=a$ ;

# Naprezanje pojasa višedelnog štapa ramovskog tipa u krajnjem polju



$$M_{Ed}(x) = \frac{N_{c,Ed} \delta_0}{1 - N_{c,Ed} / N_{cr,V}} \sin \frac{\pi}{L} x$$

$$V_{Ed}(x) = \frac{dM_{Ed}(x)}{dx}$$

$$V_{Ed}(x) = N_{c,Ed} \delta_{tot} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi}{L} x$$

$$V_{Ed} = M_{Ed} \frac{\pi}{L} \quad \text{maksimalna sila smicanja}$$

$$M_{ch,Ed} = \frac{V_{Ed} a}{n 2}$$

$$M_{ch,Ed} = \frac{V_{Ed} a}{4} \quad \leftarrow \text{ za } n=2$$

# Kontrola nosivosti pojasa u krajnjem polju

Pojas višedelnog štapa ramovskog tipa je opterećen sledećim uticajima:

$$N_{ch,Ed} = \frac{N_{c,Ed}}{2}$$

aksijalna sila pritiska

$$M_{ch,Ed} = \frac{V_{Ed} a}{4}$$

moment savijanja

$$V_{ch,Ed} = \frac{V_{Ed}}{2} = \frac{\pi M_{Ed}}{2L}$$

smičuća sila

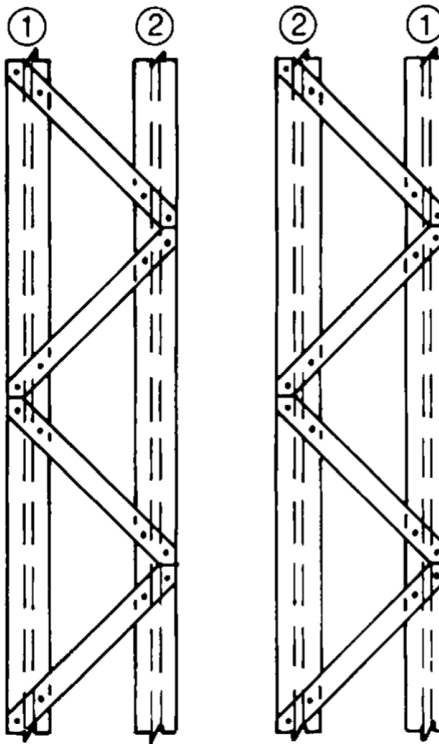
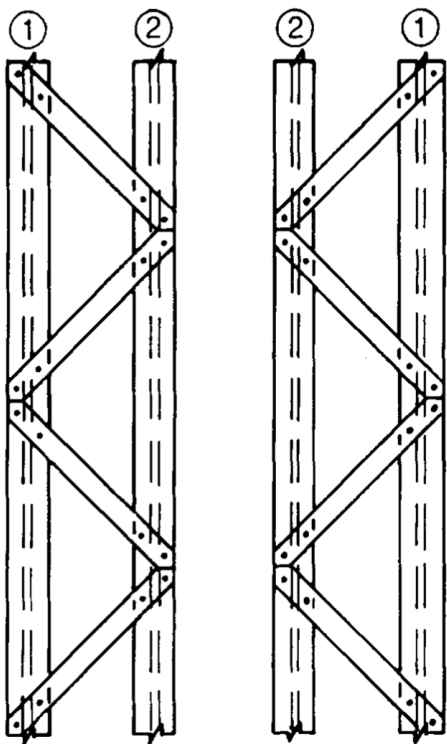
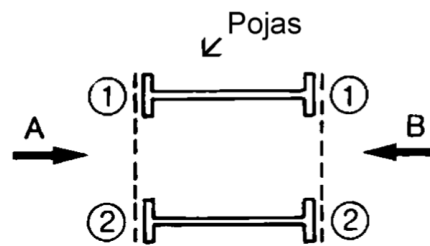
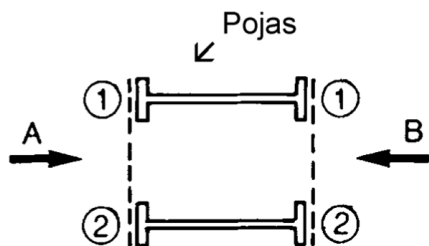
Kontrola nosivosti pojasa se sprovodi prema pravilima za ekscentrično pritisnute elemente u zavisnosti od klase poprečnog preseka.

# Proračun veznih limova

- Proračun se razlikuje za štapove ramovskog i rešetkastog tipa;
- Kod rešetkastog tipa vezni limovi su aksijalno opterećeni, a kod ramovskog tipa su opterećeni na savijanje
- Vezni limovi se uvek postavljaju na krajevima štapa;
- Postavljaju se uvek na istom rastojanju (ekvidistantno);
- Vezni limovi se postavljaju minimum u trećinama raspona;
- Kod višedelnih štapova kod kojih je razmak samostalnih elemenata jednak debljini čvornog (veznog) lima postavljaju se vezice; Kod ovakvih štapova proverava se samo da li veza može da prenese odgovarajuću silu smicanja;



# Usaglašen sistem rešetkaste ispune



Ispuna na strani A    Ispuna na strani B

Ispuna na strani A    Ispuna na strani B

U slučaju neusaglašene ispune treba uzeti u obzir i uticaj torzije!

(a) Sistem sa usaglašenom ispunom  
(Preporučuje se)

(b) Sistem sa neusaglašenom ispunom  
(Ne preporučuje se)

# Kontrola nosivosti štapova ispune kod rešetkastih višedelnih štapova

$$N_{d,Ed} = \frac{V_{Ed}}{n} \frac{d}{h_0}$$



maksimalna sila u dijagonali ispune

$n$  broj paralelih ravni u kojima se nalazi rešetkasa ispuna,

$d$  dužina dijagonale,

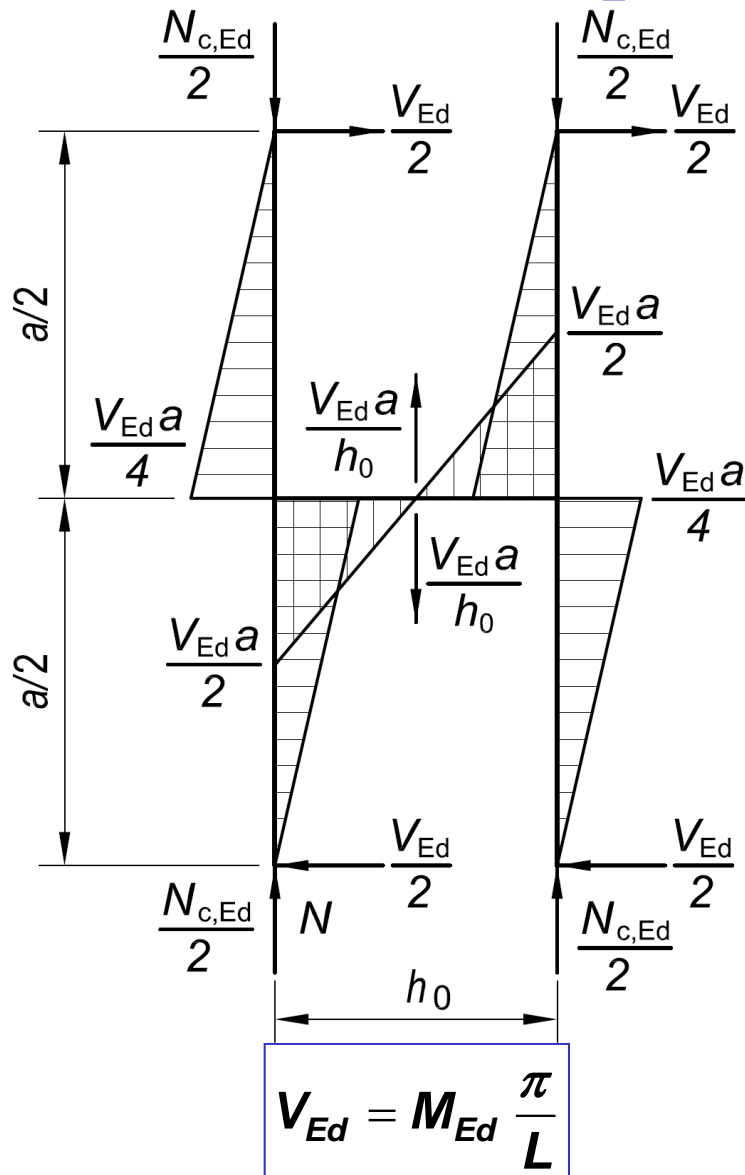
$h_0$  rastojanje između težišta pojasnih štapova;

Kontrola nosivosti ispune se vrši kao kod pritisnutih štapova konstantnog jednodelnog preseka, prema izrazu:

$$\frac{N_{d,Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1,0$$

gde je  $N_{b,Rd}$  nosivost dijagonale na izvijanje (dužina izvijanja je jednaka dužini dijagonale).

# Kontrola nosivosti prečki kod višedelnih štapova ramovskog tipa

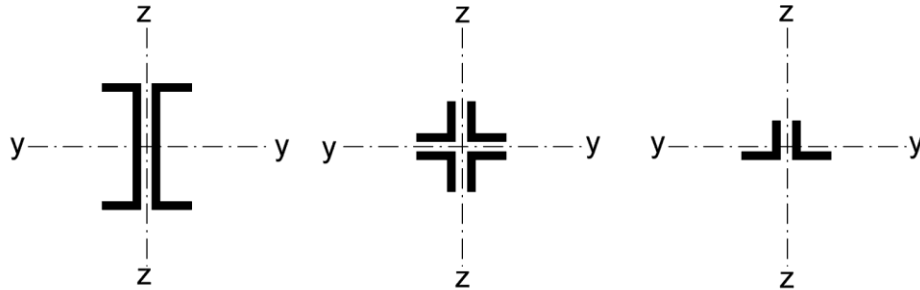


- Prečke su opterećene na savijanje jer se višedelni štap ponaša kao Virendel nosač;
- Maksimalni uticaji javljaju se u krajnjim poljima gde je najveća smičuća sila;
- Kod **dvodelnog** elementa prečke su opterećene sledećim uticajima:
 

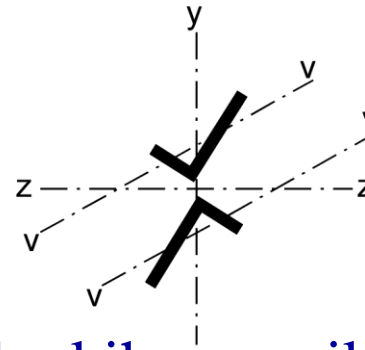
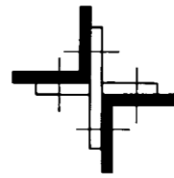
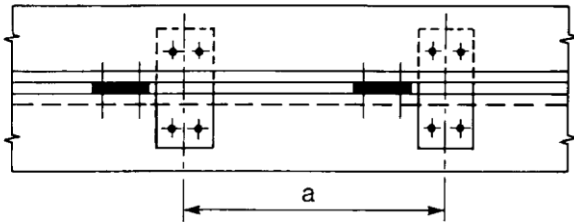
$$V_{b,Ed} = V_{Ed} \frac{a}{h_0}$$

$$M_{b,Ed} = \frac{V_{Ed} a}{2}$$
- Veze prečki sa pojasevima treba takođe da prenesu ove uticaje!

# Specifičnosti dvodelnih štapova od ugaonika



leđima okrenuti



unakrsno postavljeni

Kod unakrsno postavljenih raznokrakah ugaonika izvijanje oko y-y ose može da se proveri sa:  $i_y = i_0 / 1,15$  gde je  $i_0$  minimalni poluprečnik inercije višedelnog elementa.

Tip višedelnog elemena	Najveće rastojanje između veznih elemenata *)
Elementi od dva leđima okrenuta L (ili U) profila spojeni pomoću zavrtnjeva ili zavarivanjem	$15 i_{\min}$
Elementi od dva unakrsno postavljena L profila spojeni pomoću para vezica	$70 i_{\min}$
*) rastojanje između težišta veznih elemenata $i_{\min}$ najmanji poluprečnik inercije jednog pojasa, odnosno jednog ugaonika.	