ДИСКРЕТНЕ СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Дефиниција 1 Функција $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ која сваком елементарном исходу $\omega \in \Omega$ додељује реалан број $X(\omega)$ се зове *случајна променљива.* Случајна променљива X је *дискретна* ако постоји пребројив скуп $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ такав да је

$$\sum_{k\,:\,x_k\in R_X} P(X = x_k) = 1.$$

Дефиниција 2 Нека је X једна дискретна случајна променљива. Ако ред

$$\sum_{k\,:\,x_k\in R_X} x_k P(X = x_k)$$

апсолутно конвергира, *математичко очекивање* случајне променљиве X дефинишемо са

$$E(X) := \sum_{k\,:\,x_k\in R_X} x_k P(X = x_k).$$

Став 1 *За случајне промељњиве X и Y, и константу $c \in \mathbb{R}$ важе једнакости:*

$$E(c) = c, \quad E(cX) = cE(X) \quad \text{и} \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Дефиниција 3 Нека је X једна дискретна случајна променљива са очекивањем $E(X)$. *Дисперзија* случајне променљиве X је одређена са

$$D(X) := E(X^2) - E(X)^2.$$

Став 2 *За случајну промељњиву X и константу $c \in \mathbb{R}$ важе једнакости:*

$$D(c) = 0 \quad \text{и} \quad D(cX) = c^2 D(X).$$

Дефиниција 4 Реална функција дефинисана са $F(x) := P\{X \leq x\}$ се зове *функција расподеле* случајне променљиве X.

Став 3 *F_X је монотоно неопадајућа и непрекидна с лева функција. И још важи*

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \quad \textit{и} \quad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1.$$

Задатак 1 Новчић бацамо 3 пута. Нека је X број појаве грба. Одредити математичко очекивање и дисперзију случајне промењливе X. Скицирати график фунцкије расподеле F_X.

Решење Утврдимо да је скуп догађаја

$$\Omega = \{\text{ГГГ, ГГП, ГПГ, ГПП, ПГГ, ПГП, ППГ, ППП,}\}$$

Случајна промељива X може узети вредности 0, 1, 2 и 3, а одговарајуће вероватноће су 1/8, 3/8, 3/8 и 1/8. Користићемо следећи запис.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Математичко очекивање $E(X)$ је једнако

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8}.$$

Случајна промељива X^2 је одређена са

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

и њено математичко очекивање је

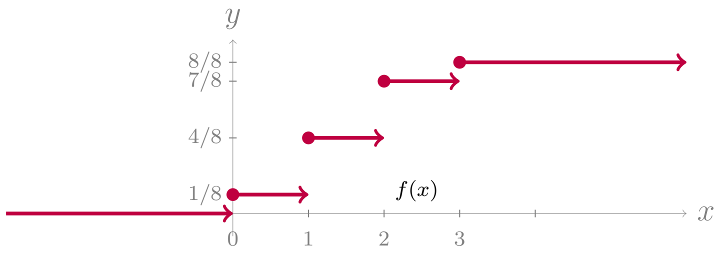
$$E(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = 3.$$

На крају, дисперзија случајне промељиве X је једнака

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - \left(\frac{12}{8}\right)^2 = \frac{48}{64}.$$

Приметимо да је фунцкија расподеле F_X одређена са

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \le x < 1, \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8}, & 1 \le x < 2, \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}, & 2 \le x < 3, \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}, & 3 \le x; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \le x < 1, \\ \frac{4}{8}, & 1 \le x < 2, \\ \frac{7}{8}, & 2 \le x < 3, \\ 1, & 3 \le x. \end{cases}$$



Слика 1 График функције расподеле случајне променљиве X.

Задатак 2 У једној кутији се налази 5 црних и 5 белих куглица. Одједном извлачимо 5 куглица. Нека је X број црних куглица. Одредити расподелу X, а потом и вероватноћу $P(1 < X \leq 3)$.

Решење Број црних куглица у 5 извучених може бити 0, 1, 2, 3, 4 или 5. Тако је, на пример, вероватноћа да смо извукли 2 црне куглице једнака

$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{10}{5}}.$$

Слично важи и за преостале вероватноће, па случајна расподела X гласи

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{\binom{5}{5}\binom{5}{0}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{5}{4}\binom{5}{1}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{2}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{3}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{4}}{\binom{10}{5}} & \frac{\binom{5}{0}\binom{5}{5}}{\binom{10}{5}} \end{pmatrix}.$$

Приметимо да је

$$P(1 < X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{5}}.$$

Задатак 3 У једној кутији се налази 5 црних и 6 белих куглица. Извлачимо куглицу једну за другом, без враћања, док не извучемо белу куглицу. Нека је X број белих куглица. Одредити расподелу X, а потом и $P(X \leq 5)$.

Решење Уочимо да следећи исходи

$$B, \quad CB, \quad CCB, \quad CCCB, \quad CCCCB, \quad CCCCCB$$

индукују случајну расподелу X

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{pmatrix}.$$

Приметимо да сваким извлачењем куглице мењамо састав кутије (у кутији се налази једна куглица мање), па су одговарајуће вероватноће једнаке

$$\begin{aligned}
p_1 &= P(X=1) &= P(B) &= \frac{6}{11}\\
p_2 &= P(X=2) &= P(CB) &= \frac{5}{11}\cdot\frac{6}{10}\\
p_3 &= P(X=3) &= P(CCB) &= \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}\\
p_4 &= P(X=4) &= P(CCCB) &= \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}\\
p_5 &= P(X=5) &= P(CCCCB) &= \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7}\\
p_6 &= P(X=6) &= P(CCCCCB) &= \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{6}
\end{aligned}$$

Приметимо да важи

$$P(X\le 5) = 1 - P(X>5) = 1 - P(X=6) = 1 - p_6.$$

Задатак 4 У једној кутији се налази 5 црних и 6 белих куглица. Извлачимо куглицу једну за другом, са враћањем, док не извучемо белу куглицу. Нека је X број белих куглица.

Решење Уочимо да су одговарајући исходи

$$B,\quad CB,\quad CCB,\quad CCCB,\quad CCCCB,\quad CCCCCB,\quad CCCCCCB,\ \ldots$$

За разлику од претходног задатка где смо имали ограничен број могућности (пошто се сваким извлачењем смањује број кулгица у кутији), у наведеном задатку је број могућности неограничн (број куглица у кутији је све време једнак 11). Како је

$$P(B) = \frac{6}{11} \quad \text{и} \quad P(C) = \frac{5}{11},$$

за $k \ge 1$ имамо следећу једнакост

$$P(X=k) = P(\underbrace{CC\cdots C}_{k-1}B) = \underbrace{P(C)P(C)\cdots P(C)}_{k-1}P(B) = \frac{6}{11}\cdot\left(\frac{5}{11}\right)^{k-1}.$$

Према томе, случајна промељива X гласи

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ \frac{6}{11} & \frac{6}{11}\frac{5}{11} & \frac{6}{11}\frac{5^2}{11^2} & \frac{6}{11}\frac{5^3}{11^3} & \frac{6}{11}\frac{5^4}{11^4} & \frac{6}{11}\frac{5^5}{11^5} & \frac{6}{11}\frac{5^6}{11^6} & \frac{6}{11}\frac{5^7}{11^7} & \cdots \end{pmatrix}$$

Геометријска расподела $\mathcal{G}(p)$ Претпоставимо да је вероватноћа позитивног исхода једнака p. Случајна променљива која означава број покушаја до првог позитивног исхода се назива *геометријска расподела.* Тада за $k \in \mathbb{N}$ важи

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Може се показати да су тачне следеће једнакости

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{и} \quad D(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Тако, на пример, случајна промељива X описана у претходном задатку узима геометријску расподелу $\mathcal{G}(6/11)$ (позитиван исход је извучена бела куглица).

Задатак 5 Нека је X број бацања коцкице до појаве шестице. Одредити математичко очекиваче и дисперзију случјане променљиве X.

Решење Приметимо да је X узима геометријску расподелу $\mathcal{G}(1/6)$ (вероватноћа позитивног исхода је једнака $1/6$). Према томе, за $k \in \mathbb{N}$ важи

$$P(X = k) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

Математичко очекивање и дисперзија случајне променљиве X су једнаки

$$E(X) = 6 \quad \text{и} \quad D(X) = 30.$$

Биномна расподела $\mathcal{B}(n, p)$ Претпоставимо да је вероватноћа позитивног исхода једнака p. Случајна променљива која означава број позитивних исхода у n покушаја се назива *биномна расподела.* Тада за $0 \leq k \leq n$ важи

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Може се показати да су тачне следеће једнакости

$$E(X) = np \quad \text{и} \quad D(X) = np(1-p).$$

Тако, на пример, случајна промељива X описана у задатку 1 узима биномну расподелу $\mathcal{B}(3, 1/2)$ (имамо 3 покушаја и позитиван исход је појава грба).

Задатак 6 Стрелац погађа мету са вероватноћом 0.3. Изводи се пет гађања. Ако је X број погодака, одредити вероватноћу $P(1 \leq X < 3)$, математичко очекивање $E(X)$ и дисперзију $D(X)$.

Решење Приметимо да X узима биномну расподелу $\mathcal{B}(5, 0.3)$, па за $0 \leq k \leq 5$ важи

$$P(X = k) = \binom{5}{k}(0.3)^k(0.7)^{5-k}.$$

Важи следећа једнакост

$$P(1 \leq X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{5}{1}(0.3)(0.7)^4 + \binom{5}{2}(0.3)^2(0.7)^3 = 0.6688.$$

НЕПРЕКИДНЕ СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Дефиниција 5 Слчајна променљива $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ је *непрекидна случајна променљива* уколико постоји функција $f : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty)$ таква да је за свако $x \in \mathbb{R}$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t.$$

Функцију f_X тада називамо *функција густине случајне променљиве* X.

Став 4 *Функција густине f_X непрекидне случајне променљиве X је ненегативна функција за коју важи*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1 \quad и \quad P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(x)\mathrm{d}x.$$

Дефиниција 6 Функција $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ дефинисана са

$$F_X(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

је *функција расподеле* непрекидне случајне променљиве X.

Став 5 *Ако је функција расподеле F_X непрекидне случјане променљиве X непрекидна, тада важи*

$$F'_X(x) = f_X(x).$$

Дефиниција 7 Нека је X непрекидна случајна променљива са густином f_X. *Математичко очекивње* $E(X)$ је одређено са

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x,$$

уколико овај интеграл апсолутно конвергира. Ако интеграл дивергира или не конвергира апсолутно, сматрамо да не постоји математичко очекивање променљиве X.

Дефиниција 8 *Дисперзија* непрекидне случајне променљиве X је дата са

$$D(X) := E(X^2) - (E(X))^2,$$

где је

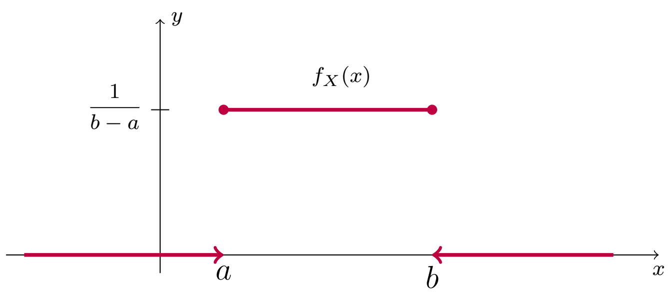
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x.$$

Задатак 7 *Униформна случајна променљива* $\mathcal{U}(a,b)$ је одређена функцијом густине

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [\,a, b\,] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где су $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Одредити функцију расподеле случајне променљиве X, а потом нацртати графике фукнција $f_X(x)$ и $F_X(x)$. Одредити математичко очекивање и дисперзију случајне променљиве X.

Решење Како функција расподеле $F_X(x)$ одговара површини испод графика функције f на интервалу $(-\infty, x]$, видимо да је неопходно разматрати три случаја у зависности од тога где се налази x:

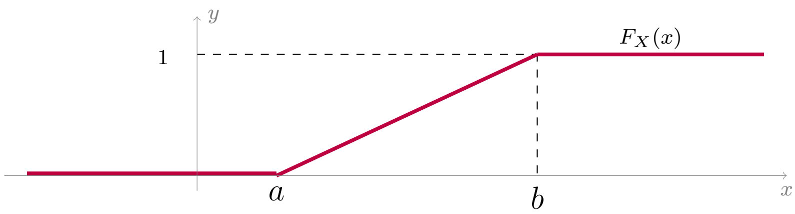


Слика 2 График функција густине униформне расподеле.

1. ако $x \in (-\infty, a]$, тада је:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot \mathrm{d}t = 0\,.$$
2. ако $x \in (a, b]$, тада је:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot \mathrm{d}t + \int_{a}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$
3. ако $x \in [b, +\infty)$, тада је:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot \mathrm{d}t + \int_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}t}{b-a} + \int_{b}^{x} 0 \cdot \mathrm{d}t = \frac{b-a}{b-a} = 1\,.$$

Функција расподеле униформне расподеле гласи:
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a] \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b] \\ 1, & x \in (b, +\infty). \end{cases}$$

График функције расподеле је приказан на следећој слици.



Слика 3 График функција расподеле униформне расподеле.

Математичко очекивање случајне променљиве X је једнако
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{b+a}{2}.$$
Како је
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{b^2+ab+a^2}{3}\,,$$
следи да је дисперзија случајне променљиве X једнака
$$D(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Задатак 8 Случајна променљива X има функцију густине

$$f_X(x) = \frac{c}{a^2 + x^2},$$

где су $a > 0$ и c реалне константе.

а) Наћи однос између a и c, а потом одредити функцију расподеле $F_X(x)$.

б) За $a = 1$ израчунати вероватноћу $P\{-1 < X \leq 1\}$.

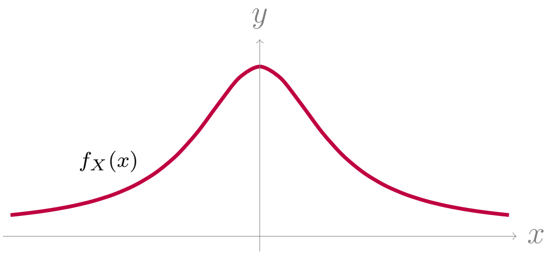
Решење а) Како је $f_X(x)$ функција густине, следи да је

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{a^2 + x^2}\mathrm{d}x = \frac{c}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{c\pi}{a}\,.$$

Дакле, $a = c\pi$, па је функција густине f_X задата са

$$f_X(x) = \frac{a\pi}{a^2 + x^2}\,.$$

График функције фустине $f_X(x)$ је приказан на следећој слици.

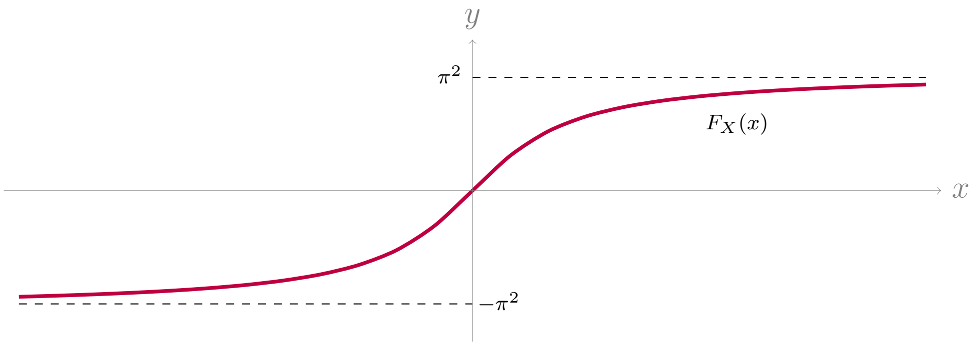


Слика 4 График функција густине случајне променљиве X.

Функција расподеле случајне променљиве X гласи

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{a\pi}{a^2 + t^2}\mathrm{d}t = \pi \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \Big|_{-\infty}^{x} = \pi \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

График функције расподеле $F_X(x)$ је приказан на следећој слици.



Слика 5 График функције расподеле случајне променљиве X.

б) Тражену вероватноћу можемо израчунати на два начина.

I *начин*: За $a = 1$ функција густине биће $f_X(x) = \dfrac{\pi}{1+x^2}$, па је

$$P\{-1 < X \leq 1\} = \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi^2}{2}.$$

II *начин*: Приметимо да је тада $F_X(x) = \pi\left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, па је

$$\begin{aligned} P\{-1 < x \leq 1\} &= P\{X \leq 1\} - P\{X \leq -1\} = F_X(1) - F_X(-1) \\ &= \pi\left(\operatorname{arctg}(1) + \frac{\pi}{2}\right) - \pi\left(\operatorname{arctg}(-1) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Задатак 9 Случајна променљива X има функцију густине:

$$f_X(x) = \begin{cases} ax\,, & x \in [0,1], \\ 0\,, & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) Одредити константу a и функцију расподеле $F_X(x)$, а потом израчунати математичко очекивање и дисперзију случајне променљиве X.

б) Одредити $P\{X \leq 1/2\}$ и $P\{X \leq 1/2 \mid 1/3 < X \leq 2/3\}$.

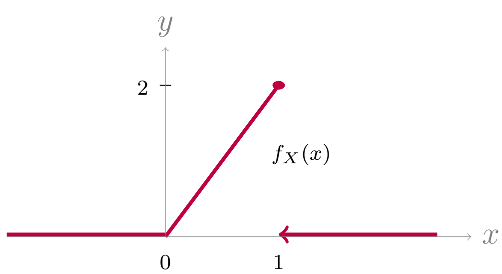
Решење а) Како је $f_X(x)$ функција густине, неопходно је да важи:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 ax\mathrm{d}x = a\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{a}{2}.$$

Утврдимо да је $a = 2$, те је функција густине $f_X(x)$ одређена са

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

График функције густине $f_X(x)$ је приказан на следећој слици.



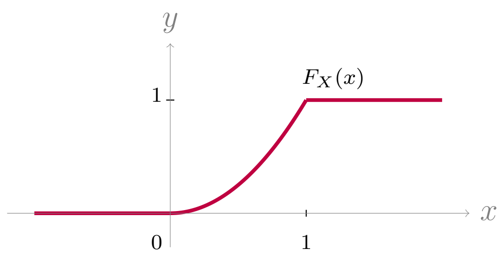
Слика 6 График функције густине случајне променљиве X.

Сада пронађимо функцију расподеле $F_X(x)$. Разматрамо 3 случаја:

1. ако $x \in (-\infty, 0]$, тада је
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot \mathrm{d}t = 0\,.$$
2. ако $x \in (0, 1]$, тада је
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot \mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 2t\mathrm{d}t = x^2\,.$$
3. ако $x \in [1, +\infty)$, тада је
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot \mathrm{d}t + \int_{0}^{1} 2t\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} 0 \cdot \mathrm{d}t = 1\,.$$

Дакле, функција расподеле случајне преоменљиве X је задата са:
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ x^2, & x \in (0, 1], \\ 1, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

График функције расподеле $F_X(x)$ је приказан на следећој слици.



Слика 7 График функције расподеле случајне промењиве X.

Математичко очекивање $E(X)$ је једнако
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x \cdot 2x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\,.$$

Утврдимо да је
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^2 \cdot 2x\mathrm{d}x = \frac{2}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\,,$$

одакле следи да је дисперзија случајне промењиве X једнака

$$D(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

б) Приметимо да важи следећа једнакост:

$$P\{X \leq 1/2\} = F_X(1/2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,.$$

Користећи формулу за условну вероватноћу добијамо:

$$P\{X \leq 1/2 \mid 1/3 < X \leq 2/3\} = \frac{P\{1/3 < X \leq 1/2\}}{P\{1/3 < X \leq 2/3\}}\,.$$

Сада је лако утврдити да је претходни израз једнак:

$$\frac{P\{X \leq 1/2\} - P\{X \leq 1/3\}}{P\{X \leq 2/3\} - P\{X \leq 1/3\}} = \frac{F_X(1/2) - F_X(1/3)}{F_X(2/3) - F_X(1/3)} = \frac{5}{12}.$$