ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ

Нека је Ω скуп догађаја и $A, B \in \Omega$. За унију догађаја A и B користимо ознаку $A+B$, док пресек означавамо са AB. Супротан догађај догађају A означавамо са $\overline{A}$.

Пример 1 Скуп догађаја бацања два новчића се може описати са

$$\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГП}, \text{ПГ}, \text{ПП}\}.$$

Ако је A догађај описан са *бар једно писмо*, а B *оба ишода су иста*, тада је

$$A = \{\text{ГП}, \text{ПГ}, \text{ПП}\} \quad \text{и} \quad B = \{\text{ГГ}, \text{ПП}\}.$$

Приметимо да је

$$A + B = \Omega \quad \text{и} \quad AB = \{\text{ПП}\}.$$

Пример 2 Стрелац гађа мету четири пута. За погодак ћемо користити ознаку $+$, а за промашај ознаку $-$. Приметимо да за свако гађање имамо две могућности ($+$ и $-$), па је $|\Omega| = 2^4$. *Гађање започето поготком* се може описати са

$$A = \{++++, +++-, ++-+, ++--, +-++, +-+-, +--+, +---\}.$$

Догађај B *бар један погодак* је лакше описати преласком на супротан догађај *сва четири промашаја*, то јест

$$\overline{B} = \{----\} \quad \text{и} \quad B = \Omega \setminus \overline{B}.$$

Дефиниција 1 *Вероватноћа* је функција $P : \mathcal{P}(\Omega) \mapsto [0, 1]$ за коју важи:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad \text{и} \quad P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

уз напомену да је $0 \leq P(A) \leq 1$ и $P(\Omega) = 1$.

Напомена 1 У случају када је Ω коначан скуп, *вероватноћа догађаја A* се дефинише са

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{број повољних догађаја}}{\text{број свих догађаја}}.$$

Задатак 1 Коцкицу бацамо два пута. Одредити вероватноћу да је збир добијених бројева 11 или 12.

Решење Пошто за свако гађање имамо шест могућности важи $|\Omega| = 6^2$. Скуп Ω можемо описати на следећи начин:

$$\Omega := \left\{ \begin{array}{cccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{array} \right\}$$

Догађај A *збир добијених бројева је* 11 *или* 12 је описан са $A = \{56,\ 65,\ 66\}$, па важи

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}.$$

Задатак 2 У једној кутији се налази 6 црних, 4 беле и 5 плавих куглица. Одредити вероватноћу догађаја:

а) A – извучена је црна куглица,

б) B – није извучена црна куглица,

в) C – извучена је црна или бела куглица.

Решење

а) Пошто је повољно да извучемо једну од 6 куглица, а на располагању имамо $6 + 4 + 5$ куглица, следи

$$P(A) = \frac{6}{6 + 4 + 5} = \frac{6}{15}.$$

б) Приметимо да је догађај B супротан догађају A, па је

$$P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{6}{15} = \frac{9}{15}.$$

в) Пошто је повољно да извучемо једну од $6 + 4$ куглица, а на располагању имамо $6 + 4 + 5$ куглица, следи

$$P(C) = \frac{6 + 5}{6 + 4 + 5} = \frac{10}{15}.$$

Задатак 3 У кутији се налази 6 белих и 4 црне куглице. Одједном извлачимо 5 куглица. Одредити вероватноћу догађаја:

а) A – извучене су 3 беле и 2 црне куглице,

б) B – извучена је бар једна црна куглица,

в) C – извучена је бар једна бела куглица.

Решење

а) Од 10 куглица које се налазе у кутији, 5 кулгица одједном можемо извући на $\binom{10}{5}$ начина. Слично, од 6 белих извлачимо 3 одједном на $\binom{6}{3}$ начина и од 4 црне одједном извлачимо 2 на $\binom{4}{2}$ начина. Важи

$$P(A) = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}}{\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{10}{21}.$$

б) Извучена бар једна црна куглица значи да је извучена тачно 1 или тачно 2 или тачно 3 или тачно 4 црне куглице. Према претходном имамо

$$P(B) = \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{4}{1}+\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{3}+\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{3}+\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{123}{126}.$$

Ради лакшег рачуна, ако посматрамо супортан догађај $\overline{B}$ – све извучене кулгице су беле, добијамо

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{4}{0}}{\binom{10}{5}} = 1 - \frac{3}{126} = \frac{123}{126}.$$

в) Посматрајмо супротан догађај $\overline{C}$ – све извучене куглице су црне. Пошто извлачимо 5 кулгица, а на располагању нам је само 4 црне куглице следи да је одговарајућа вероватноћа једнака нули (увек ће бити макар једна бела куглица), па је

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0 = 1.$$

Задатак 4 У групи од 50 студената 40 процената су девојке. Одредити вероватноћу да је група од 5 студента мешовита.

Решење У групи се налази 20 девојака и 30 момака. Нека је догађај A описан са група од 5 студента је мешовит. Супротан догађа $\overline{A}$ гласи групу од 5 студента сачињвају само девојке или само момци. Према томе

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{20}{5} \cdot \binom{30}{0} + \binom{20}{0} \cdot \binom{30}{5}}{\binom{50}{5}}$$
$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 + 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}.$$

Задатак 5 Студент зна одговор на 50 од 60 питања. Одредити вероватноћу да положи испит, ако од 5 извучених питања мора знати одговор на бар 3.

Решење Пошто студент полаже испит ако зна одговор на 3, 4 или 5 питања важи

$$P(A) = \frac{\binom{50}{3} \cdot \binom{10}{2} + \binom{50}{4} \cdot \binom{10}{1} + \binom{50}{5} \cdot \binom{10}{0}}{\binom{60}{5}}.$$

Задатак 6 Одредити вероватноћу да се случајно извучен двоцифрен број завршава са 3 или 7.

Решење Тражени догађај A се може написати у облику $A = B + C$, где је $B -$ извучени број се завршава са 3 и $C -$извучени број се завршава са 7. Тада важи

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) - P(BC), \tag{1}$$

где је $BC -$ вероватноћа да је извучени број завршава и са 3 и са 7. Пошто у исто време двоцифрени број не може задовољавати услове догађаја B и догађаја C, имамо да је $P(BC) = 0$ и једначина (1) постаје

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) = \frac{9}{90} + \frac{9}{90} = \frac{1}{5}.$$

Задатак 7 Одредити вероватноћу да је случајно извучен двоцифрен број дељив са 2 или са 5.

Решење Тражени догађај A се може написати у облику $A = B + C$, где је $B -$ извучени број је дељив са 2 и $C -$извучени број је дељив са 5. Тада важи

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) - P(BC),$$

где је $BC -$ вероватноћа да је извучени број дељив са 10 (дељив са 2 и дељив са 5). Према томе, имамо следећу једнакост

$$P(A) = \frac{45}{90} + \frac{18}{90} - \frac{9}{90} = \frac{54}{90}.$$

НЕЗАВИСНИ ДОГАЂАЈИ И УСЛОВНА ВЕРОВАТНОЋА

Дефиниција 2 За догађаје A и B кажемо да су *независни* уколико важи

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Задатак 8 Стрелац гађа мету 4 пута. Вероватноћа поготка је 7/8. Одредити вероватноћу да је погодио мету тачно 3 пута.

Решење Уколико погодак означимо са $+$, а промашај за $-$, догађај A можемо описати са

$$A = \{+++-,\ ++-+,\ +-++,\ -+++\},$$

где је

$$P(+) = \frac{7}{8} \quad \text{и} \quad P(-) = 1 - P(+) = \frac{1}{8}.$$

Пошто исход у $i-$том гађању не зависи од исхода у $j-$том гађању, то јест гађања су независни догађаји, за исход $+++-$ важи

$$P(+++-) = P(+)P(+)P(+)P(-) = \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8},$$

Слично, за претостале исходе догађаја A добијамо

$$P(++-+) = P(+-++) = P(-+++) = \frac{7^3}{8^4}.$$

Приметимо да су поменути исходи међусобно дисјунктни, па је

$$P(A) = P(+++-) + P(++-+) + P(+-++) + P(-+++) = 4 \cdot \frac{7^3}{8^4}.$$

Дефиниција 3 (Условна вероватноћа) Вероватноћа догађаја A, *при услову* B, је једнака

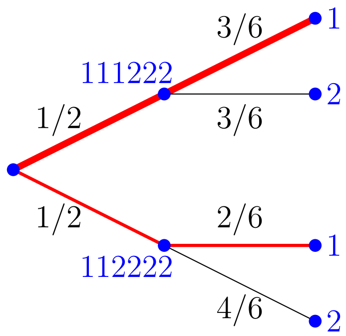
$$P(A \mid B) := \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Напомена 2 Претходна дефиниција одређује вероватноћу догађаја A ако знамо да остварио догађај B. Уколико су A и B независни догађаји, то јест догађај A не зависи од догађаја B, добијамо

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Задатак 9 Дате су две коцке. Једна има 3 јединице и 3 двојке, а друга 2 јединице и 4 двојке. Случајно извлачимо коцкицу и бацамо је. Добили смо број 1. Одредити вероватноћу да смо извукли прву коцкицу.

Решење Пошто на располагању имамо две коцкице вероватноћа да извучемо прву је иста као и вероватноћа да извучемо другу коцку, то јест 1/2. Ако смо извукли прву коцку вероватноћа да добијемо 1 је једнака 3/6, а вероватноћа да добијемо 2 је 3/6. Ако смо извукли другу коцку вероватноћа да добијемо 1 је 2/6, а вероватноћа да добијемо 2 је једнака 4/6. Графички приказано:



Нека је A – извукли смо прву коцку, а B – добили смо број 1. Потребно је одредити

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Приметимо да је AB – извукли смо прву коцку и добили смо број 1, што одговара црвеној подебљаној грани

$$P(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{12}.$$

Догађај B одговара црвеним гранама, па је

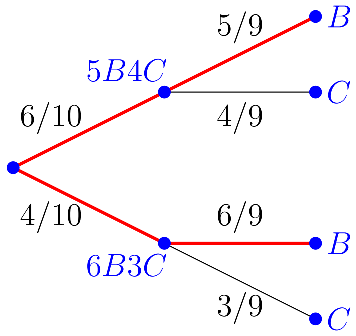
$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{12}.$$

На крају, одговарајућа условна вероватноћа је једнака

$$P(A \mid B) = \frac{2}{5}.$$

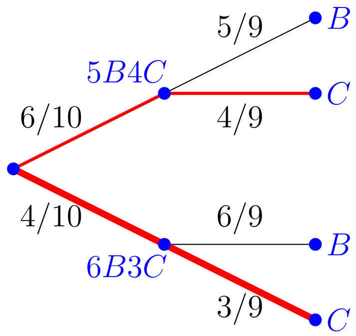
Задатак 10 У кутији се налази 6 белих и 4 црне куглице. Једна куглица се изгубила. Извлачимо једну куглицу. Одредити вероватноћу да ћемо извући белу куглицу, а потом и вероватноћу да је изгубљена црна ако знамо да је извучена црна куглица.

Решење Бела куглица се губи са вероватноћом $6/10$ и тада у кутији остаје 5 белих и 4 црне куглице. Црна куглица се губи са вероватноћом $4/10$ и тада у кутији остаје 6 белих и 3 црне куглице. Графички приказано



Догађај A – извучена је бела куглица одговара црвеним гранама, па је

$$P(A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{54}{90}.$$



Нека је B – изгубљена је црна куглица, а C – извучена је црна куглица. Потребно је одредити

$$P(B \mid C) = \frac{P(BC)}{P(C)}.$$

Догађај BC одговара црвеној подебљаној грани, па је

$$P(BC) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90}.$$

Догађај C одговара црвеним гранама, па је

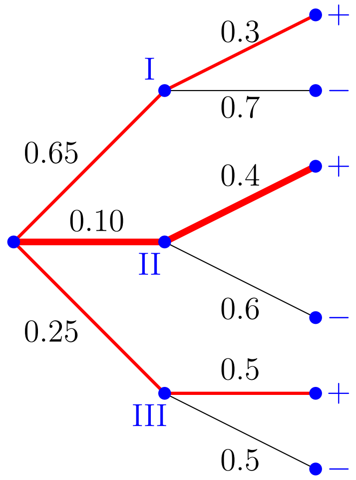
$$P(C) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{36}{90}.$$

На крају, одговарајућа условна вероватноћа је једнака

$$P(B \mid C) = \frac{12}{36}.$$

Задатак 11 Студент из прве групе (65 процената студената) полаже испит са вероватноћом 0.3, из друге (10 процената студената) са вероватноћом 0.4 и из треће групе (25 процената студената) са вероватноћом 0.5. Случајно изабрани студент је положио испи. Одредити вероватноћу да је из друге групе.

Решење Графички приказано



Нека је A – изабрани студент је из друге групе, а B – изабрани студент је положио испит. Потребно је одредити

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Догађај AB одговара црвеној подебљаној грани, па је

$$P(AB) = 0.10 \cdot 0.4 = 0.04.$$

Догађај B одговара црвеним гранама, па је

$$P(B) = 0.65 \cdot 0.3 + 0.10 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.5 = 0.36.$$

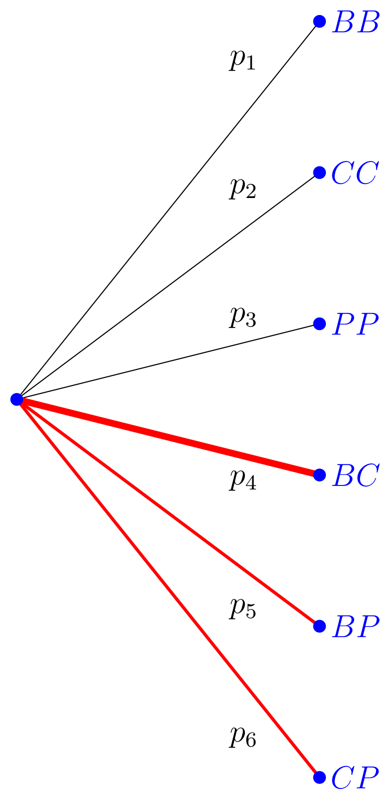
На крају, одговарајућа условна вероватноћа је једнака

$$P(A \mid B) = \frac{0.04}{0.36} = \frac{1}{9}.$$

Задатак 12 У кутији се налази 3 беле, 4 црне и 5 плавих куглица. Одједном извлачимо 2 куглице. Одредити вероватноћу да смо извукли белу и црну куглицу, ако знамо да смо извукли куглице различитих боја.

Решење Графички приказано

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{0}\binom{5}{0}}{\binom{12}{2}} = \frac{3}{66},\\
p_2 &= \frac{\binom{3}{0}\binom{4}{2}\binom{5}{0}}{\binom{12}{2}} = \frac{6}{66},\\
p_3 &= \frac{\binom{3}{0}\binom{4}{0}\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{10}{66},\\
p_4 &= \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{0}}{\binom{12}{2}} = \frac{12}{66},\\
p_5 &= \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{0}\binom{5}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{15}{66},\\
p_6 &= \frac{\binom{3}{0}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{20}{66}.
\end{aligned}
$$



Нека је A – извучена су бела и црна куглица (црвена подебљана грана), а B – извучене су куглице различитих боја (црвене гране). Тада је

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{p_4}{p_4 + p_5 + p_6} = \frac{12}{47}.$$