Универзитет у Београду-Грађевински факултет

Студијски програм: ГРЂЕВИНАРСТВО

Година/семстар: Друга/први

Наыив предмета (шифра предмета): МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 2 (Б2О2А2)

Наставник: АЛЕКСАНДРА ЕРИЋ

Наслов предавања: ИНТЕГРАЛИ-двојни, тројни, криволинијски и површински

Датум: 4.11.2021.

Београд, 2021.

Глава 1

Интеграли

1.1 Двојни интеграли

1.1.1 Опште о двојном интегралу

Нека је $D \subseteq \mathbb{R}^2$ мерљив скуп (има површину) и нека је $f : D \to \mathbb{R}$ ограничена функција на D.

Дефиниција 1: Подела скупа D је било који коначан скуп $\{D_1, D_2, ..., D_n\}$ подскупова скупа D тако да важи:

1. $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$
2. $D_i, i = 1, 2, ..., n$ су мерљиви скупови
3. $P(D_i \cap D_j) = 0, i \neq j$.

Са P означимо скуп свих подела скупа D,и нека $\pi \in P$, па је $\pi = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ једна подела скупа D.

Дефиниција 2: Избор тачака за поделу $\pi = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ је било који скуп тачака $\xi = \{T_1, T_2, ..., T_n\}$ тако да је $T_i \in D_i, i = 1, 2, ..., n$.

Дефиниција 3: Параметар поделе $\pi = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ је $\lambda(\pi) = \max diam_{1\leqslant i\leqslant n}(D_i)$, где је $diam(D_i) = \sup_{x,y\in D_i} d(x,y)$.

Са ξ_π означимо скуп свих могућих избора за поделу π и са ξ означимо један избор поделе π. Нека је

$$S(f,\pi,\xi) = \sum_{i}^{n} f(T_i)P(D_i).$$

интегрална сум.
Дефиниција 4: I је двојни интеграл функције f на скупу D ако и само ако важи

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)\,(\forall\pi \in P)\,(\forall\xi \in \xi_\pi)\,(\lambda(\pi) < \delta \Rightarrow |I - S(f,\pi,\xi)| < \varepsilon)\,.$$

Ознака за двојни интеграл је:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Ако постоји двојни интеграл I кажемо да је функција f интеграбилна на скупу D.

Теорема 1: Ако је функција f непрекидна на затвореном скупу D, онда је функција f интеграбилна функција.

Теорема 2: Ако је функција f интеграбилна на скупу D и нека је скуп $E \subset D$ мерљив скуп онда је f интеграбилна на E.

Теорема 3: Ако је функција f интеграбилна на $D = A \cup B$, где су скупови A и B мерљиви и дисјунктни скупови, односно $P\,(A \cap B) = 0$, онда је:

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)dxdy = \iint_A f(x,y)dxdy + \iint_B f(x,y)dxdy.$$

Теорема 4: Ако су функције f и g интеграбилне на скупу D, онда су и функције $\alpha f \pm \beta g, (\alpha, \beta \in R)$ интеграбилне на скупу D и важи:

$$\iint_D (\alpha f \pm \beta g)\, dxdy = \alpha \iint_D f dxdy \pm \beta \iint_D g dxdy.$$

Теорема 5:

(а) Ако је функција f интеграбилна на скупу D, онда је и функција $|f|$ интеграбилна на скупу D

$$\left| \iint_D f dxdy \right| \leq \iint_D |f| dxdy$$

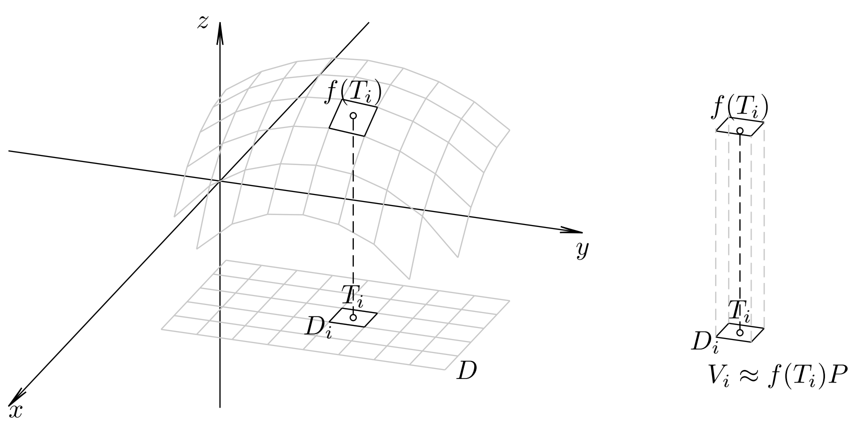
(б) Ако је функција f интеграбилна на скупу D и важи да је $f \geq 0$ на скупу D онда важи

$$\iint_D f dxdy \geq 0$$

(в) Ако су функције f и g интеграбилне на скупу D и важи да је $f \geq g$ на скупу D онда важи

$$\iint_D f dxdy \geq \iint_D g dxdy.$$

1.1.2 Геометријска интерпретација



$$V(T) \approx \sum_{i=1}^{n} f(T_i)P(D_i)$$

$$\lambda(\pi) \to 0 \Rightarrow V(T) = \iint_D f(x,y)dxdy, f(x,y) \geq 0$$

Специјално, ако је $f(x,y) = 1$ на D интегрална сума је

$$\sum_{i=1}^{n} P(D_i) = P(D) \Rightarrow \iint_D dxdy = P(D)$$

1.1.3 Рачунање двојног интеграла

Теорема 1: Нека је функција f интеграбилна на правоугаонику $D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, ако постоји интеграл $\int_c^d f(x,y)dy$ за свако $x \in [a,b]$ тада је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Теорема 2: Нека је функција f интеграбилна на некој области $D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, где су функције $g_1(x)$ и $g_2(x)$ непрекидне на сегменту $[a,b]$ и нека постоји $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$ за свако $x \in [a,b]$ тада је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

Слично, ако је $D = \{(x,y)|c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ онда имамо

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx.$$

1.1.4 Смена променљивих у двојном интегралу

Дефиниција 1: Дата је функција $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ и нека је дата функција $F : D' \to D, F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. Функције $x, y, x'_u, x'_v, y'_u, y'_v$ су непрекидне на D'. Ако је функција f интеграбилна на D, онда је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))|J|dudv$$

где је J Јакобијан и рачуна се $J = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$.

Пример: Израчунати површину елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Површина елипсе је:

$$P(D) = \iint_D dxdy.$$

Да би решили овај интеграл уводимо поларне координате: $x(r,\phi) = ar\cos\phi; y(r,\phi) = br\sin\phi; r \in [0, +\infty), \phi \in [-\pi, \pi]$.

Да би описали област $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ у поларним координатама ова област је $D' : -\pi \leq \phi \leq \pi; 0 \leq r \leq 1$.

Јакобијан поларних координата је:

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_r & y'_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\phi & b\sin\phi \\ -ar\sin\phi & br\cos\phi \end{vmatrix} = abr$$

$$P(D) = \iint_D dxdy = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^1 abrdr = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ab}{2} d\phi = ab\pi$$

1.1.5 Примена двојног интеграла на рачунање површине

Теорема 1:Нека је površ Γ дефинисана функцијом $f : D \to R, D \subset R$. Ако је $p = f'_x$, $q = f'_y$ онда је вектор нормале на ову површ $\overrightarrow{N} = (-p, -q, 1)$, површину површи Γ рачунамо:

$$P(\Gamma) = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy.$$

1.2 Тројни интеграл

1.2.1 Општо о тројном интегралу

Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^3$ мерљив скуп (има запремину) и нека је $f : S \to \mathbb{R}$ ограничена функција на S.

Дефиниција 1: Подела скупа S је било који коначан скуп $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ подскупова скупа S тако да важи:

1. $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$
2. $S_i, i = 1, 2, ..., n$ су мерљиви скупови
3. $V(S_i \cap S_j) = 0, i \neq j$.

Са P означимо скуп свих подела скупа S и нека $\pi \in P$, па је $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ једна подела скупа S.

Дефиниција 2: Избор тачака за поделу $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ је било који скуп тачака $\xi = \{T_1, T_2, ..., T_n\}$ тако да је $T_i \in S_i, i = 1, 2, ..., n$.

Дефиниција 3: Параметар поделе $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ је $\lambda(\pi) = \max diam_{1\leqslant i\leq n}(S_i)$, где је $diam(S_i) = \sup_{x,y\in S_i} d(x, y)$.

Са ξ_π означимо скуп свих могућих избора за поделу π и са ξ означимо један избор поделе π. Нека је

$$S(f,\pi,\xi)=\sum_{i}^{n} f(T_i)V(S_i).$$

интегрална сума.

Дефиниција 4: I је двојни интеграл функције f на скупу S ако и само ако важи

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall\pi\in P)\,(\forall\xi\in\xi_\pi)\,(\lambda(\pi)<\delta\Rightarrow|I-S(f,\pi,\xi)|<\varepsilon)\,.$$

Ознака за тројни интеграл је:

$$I=\iiint_S f(x,y,z)dxdydz.$$

Ако постоји двојни интеграл I кажемо да је функција f интеграбилна на скупу S.

Теорема 1: Ако је функција f непрекидна на затвореном скупу S, онда је функција f интеграбилна функција.

Теорема 2: Ако је функција f интеграбилна на скупу S и нека је скуп $E\subset S$ мерљив скуп онда је f интеграбилна на E.

Теорема 3: Ако је функција f интеграбилна на $S=A\cup B$, где су скупови A и B мерљиви и дисјунктни скупови, односно $V\,(A\cap B)=0$, онда је:

$$\iiint_{A\cup B} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_A f(x,y,z)dxdydz+\iiint_B f(x,y,z)dxdydz.$$

Теорема 4: Ако су функције f и g интеграбилне на скупу S, онда су и функције $\alpha f \pm \beta g, (\alpha, \beta \in R)$ интеграбилне на скупу S и важи:

$$\iiint_S (\alpha f \pm \beta g)\, dxdydz = \alpha \iiint_D f dxdydz \pm \beta \iiint_S g dxdydz.$$

Теорема 5:

(а) Ако је функција f интеграбилна на скупу S, онда је и функција $|f|$ интеграбилна на скупу S

$$\left|\iiint_S f dxdydz\right| \leq \iiint_S |f| dxdydz$$

(б) Ако је функција f интеграбилна на скупу S и важи да је $f \geq 0$ на скупу S онда важи

$$\iiint_S f dxdydz \geq 0$$

(в) Ако су функције f и g интеграбилне на скупу S и важи да је $f \geq g$ на скупу S онда важи

$$\iiint_S f dxdydz \geq \iiint_S g dxdydz.$$

Специјално, ако је $f(x, y, z) = 1$ на S интегрална сума је

$$\sum_{i=1}^{n} V(S_i) = V(S) \Rightarrow \iiint_S dxdydz = V(S)$$

1.2.2 Рачунавање тројног интеграла

Теорема 1: Нека је функција f интеграбилна на квадру $S = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\, e \leq z \leq g\}$, ако постоји двојни интеграл $\int_c^d dy \int_e^g f(x, y, z) dz$ за свако $x \in [a, b]$ тада је

$$\iiint_S f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g f(x, y, z) dz.$$

Теорема 2: Нека је функција f интеграбилна на некој области $S = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), h_1(x, y) \leq z \leq$

$h_2(x, y)\}$, где су функције $g_1(x)$ и $g_2(x)$ непрекидне на сегменту $[a, b]$ и нека постој одређени интеграли, тада је

$$\iiint_S f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} dz.$$

1.2.3 Смена промењљивих у тројном интегралу

Дефиниција 1: Дата је функција $f : S \to R, S \subset R^3$ и нека је дата функција $F : S' \to S, F(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$. Функције $x, y, z, x'_u, x'_v, x'_w, y'_u, y'_v, y'_w, z'_u, z'_v, z'_w$ су непрекидне на S'. Ако је функција f интеграбилна на S, онда је

$$\iiint_S f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{S'} f(x(u, v, w), y(u, v, w, z(u, v, w)))|J|dudvdw$$

где је J Јакобијан и рачуна се $J = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix}$.

Цилиндричне координате:

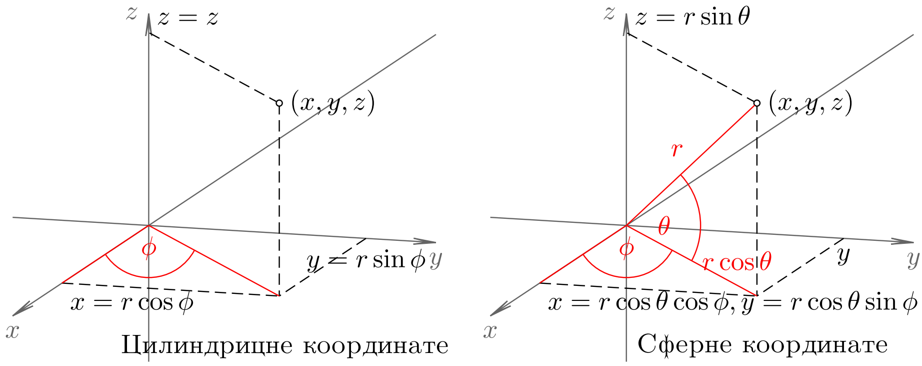
$$\begin{array}{ll} x(r, \phi, z) = r \cos \phi & r \in [0, +\infty) \\ y(r, \phi, z) = r \sin \phi & \phi \in [-\pi, \pi] \\ z(r, \phi, z) = z & z \in (-\infty, +\infty) \end{array}$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r & z'_r \\ x'_\phi & y'_\phi & z'_\phi \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -r \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Сферне координате:

$$\begin{array}{ll} x(r, \phi, \theta) = r \cos \theta \cos \phi & r \in [0, +\infty) \\ y(r, \phi, \theta) = r \cos \theta \sin \phi & \phi \in [-\pi, \pi] \\ z(r, \phi, \theta) = r \sin \theta & \theta \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \end{array}$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r & z'_r \\ x'_\phi & y'_\phi & z'_\phi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & \sin\theta \\ -r\cos\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi & 0 \\ -r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta \end{vmatrix} = r^2\cos\theta$$



Пример:Израчунати запремину сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Да би описали све тачке које се налазе унутар сфере у сферним координатама параматри r, ϕ, θ морају узимати следеће вредности: $r \in [0, R]; \phi \in [-\pi, \pi]; \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$V(T) = \iiint_S dxdydz = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r^2\cos\theta dr = \frac{4R^3\pi}{3}$$

1.3 Криволинијски интеграли

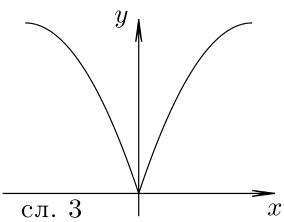
1.3.1 Криве у простору

Крива $C \in \mathbb{R}^3$ је задата векторском функцијом $C : \overrightarrow{r} = (x(t), y(t), z(t))$, док је извод овако задате криве $\overrightarrow{r'} = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Дефиниција 1: Крива C је проста крива ако и само ако постоји сегмент $[a, b]$ и непрекидна бијекција $\overrightarrow{r} : [a, b] \to C$, осим можда у крајњим тачкама.То је у случају да је затворена крива. Просте криве су криве без тачака самопресецања

Дефиниција 2: Проста крива C је глатка ако и само ако су $x'(t), y'(t), z'(t)$ непрекидне на $[a, b]$.

Дефиниција 3: Крива C је део по део глатка ако се може поделити на коначно много глатких кривих.
Пример криве која није глатка, али јесте део по део глатка је дата на слици 3.



сл. 3

1.3.2 Криволинијски интеграл прве врсте

Нека C проста крива и $f : C \to R$ ограничена. Нека су тачке A и B крајеви криве C.

Дефиниција 1: Подела просте криве C је било који коначан скуп тачака криве $\{A_0, A_1, ..., A_n\}$ тако да важи $A = A_0 \prec A_1 \prec \cdots \prec A_n = B$.

Ознака $A_i \prec A_j$ значи да када се крећемо по кривој C од тачке A до тачке B најпре наилзаимо на тачку A_i, а затим A_j.

Са P означимо скуп свих подела криве C. Једну поделу криве C означимо са $\pi = \{A_0, ..., A_n\}$. $s(A_i, A_j)$ је дужину лука са криве између тачака A_i и A_j, а $\lambda(\pi) = max_{i=\overline{0,n-1}} s(A_i, A_{i+1})$

Дефиниција 2: Избор тачака за поделу $\pi = \{A_0, A_1, ..., A_n\} \in P$ је било који коначан скуп $\{T_0, T_1, ..., T_{n-1}\}$ тачака, таквих да важи T_i припада кривој C и налази се између тачака A_i и A_{i+1} за свако $i = 0, 1, ..., n-1$. Нека је ξ_π скуп свих избора за поделу π, а нека је $\xi = \{T_0, T_1, ..., T_n\} \in \xi_\pi$. Интегрална сума за поделу π и избор тачака ξ је

$$S(f, \pi, \xi) = \sum_{n=0}^{n-1} f(T_i) s(A_i, A_{i+1})$$

Дефиниција 3: I криволинијски интеграл прве врсте функције f по кривој C ако и само ако

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall \pi \in P)\,(\forall \xi \in \xi_\pi)\,(\lambda(\pi) < \delta \Rightarrow |I - S(f, \pi, \xi)| < \varepsilon)\,.$$

Ознака за криволинијски интеграл прве врсте је $I = \displaystyle\int_C f(x, y, z) ds$.

Приметимо да је важи $s(A_i A_j) = s(A_j A_i)$ па криволинијски интеграл не зависи од оријентације криве C па имамо

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) ds = \int_{\widehat{BA}} f(x, y, z) ds$$

1.3.3 Рачунање криволинијског интеграла прве врсте

Нека је крива $C : \overrightarrow{r} = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$ и нека је дата подела $\pi = \{A_0, A_1, ..., A_n\} \in P$, и избор тачака $\xi = \{T_0, T_1, ..., T_{n-1}\} \in \xi_\pi$. $A_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i)), i = \overline{0, n}$, $T_i \in A_i A_{i+1}$, $T_i(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))$ онда је $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ и $\pi = \{t_0, ..., t_n\}$ је подела сегмента $[a, b]$, а $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}], i = \overline{0, n-1}$.

$$s(A_iA_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt =$$
$$= \sqrt{x'^2(\eta_i) + y'^2(\eta_i) + z'^2(\eta_i)}(t_{i+1} - t_i) \text{ где је } \eta_i \in [t_i, t_{i+1}].$$

Онда имамо:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda(\pi)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(T_i)s(A_iA_{i+1}) =$$
$$= \lim_{\lambda(\pi)\to 0} \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x(\eta_i), y(\eta_i), z(\eta_i))\sqrt{x'^2(\eta_i) + y'^2(\eta_i) + z'^2(\eta_i)}\Delta t_i =$$
$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt = \int_C f(x,y,z)ds$$

Криволинијски интеграл прве врсте можемо да користимо да израчунамо површину цилиндричне површи чија је директриса крива C, а горња граница јој је дефинисана са $f : C \to \mathbb{R},\ P = \displaystyle\int_C f(x,y)ds.$

Пример 1: Израчунати површину цилиндра $x^2 + y^2 = R^2, x > 0, y > 0$ ограничене са $f(x,y) = xy$.

Криву C параметризујмо поларним координатама па имамо да је $C : x = R\cos t; y = R\sin t; t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Па је $\sqrt{x'^2 + y'^2} = R$.

$$P = \int_C xyds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \cos t \sin t dt = \frac{R^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \frac{R^3}{2}.$$

1.3.4 Криволинијски интеграл друге врсте

Нека је крива $C = \widehat{AB}$ проста крива и $P : C \to R$. У интегралној суми уместо дужине $s(A_i A_{i+1})$ узимамо дужину $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ где су x_i и x_{i+1} пројекције тачака A_i и A_{i+1} на x осу.

$$S_x = \sum_{i=0}^{n-1} P(T_i)\Delta x_i$$

Дефиниција 1: I је интеграл $\displaystyle\int_{AB} P(x,y,z)dx$ ако и само ако

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall \pi \in P)\,(\forall \xi \in \xi_\pi)\,(\lambda(\pi) < \delta \Rightarrow |I - S_x| < \varepsilon)\,.$$

На исти начин дефинишемо $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} Q(x,y,z)dy$ и $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} R(x,y,z)dz$.

Криволинијски интеграл друге врсте је:

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_C P(x,y,z)dx + \int_C Q(x,y,z)dy + \int_C R(x,y,z)dz$$

Приметимо да криволинијски интеграл друге врсте зависи од смера интеграције, пошто се у интегралној суми појављује $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ које у случају промене смере постаје $\Delta x_i = -(x_{i+1} - x_i)$.

Дакле:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= -\int_{\widehat{BA}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Ако је крива C састављена од простих кривих $C_1, C_2, ..., C_n$ онда важи:

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n}.$$

Ако је крива C затворена крива, криволинијски интеграл друге врсте по кривој C ћемо означавати са $\oint_C$.

1.3.5 Рачунање криволинијског интеграла друге врсте

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)dx = \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$$

$$\int_{\widehat{AB}} Q(x,y,z)dy = \int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt$$

$$\int_{\widehat{AB}} R(x,y,z)dz = \int_a^b R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$$

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_a^b \left(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right)dt$$

Теорема 1: Интеграл $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ не зависи од путање $\widehat{AB}$ већ само од крајњих тачака ако и само ако је израз $Pdx + Qdy + Rdz$ диференцијал неке функције $u = u(x,y,z)$ дефинисане у некој области која садржи $\widehat{AB}$. Тј. важи

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Дефиниција 1: Област D је елементарна акко је

$$D = \{(x,y) | f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

$$D = \{(x, y)|g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

где су функције f_1, f_2 и g_1, g_2 непрекидне. То значи да праве паралелне x-оси и y-оси секу руб области D у највише две тачке.

Гринова формула: Нека је D коначна унија елементарних области и C граница области D (затворена крива) је део по део глатка и функције $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ су непрекидне у D. Онда важи:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Доказ: Уколико је D елементарна област то значи да праве паралелне x и y оси секу D по дужима.

$$C = C_1 \cup C_2; \qquad C_1 : \begin{cases} x = g_1(y) \\ y \in [d, c] \end{cases} ; C_2 : \begin{cases} x = g_2(x) \\ y \in [c, d] \end{cases}$$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_a^b dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d \left(Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)\right) dy =$$
$$\int_c^d Q(g_2(y), y)dy - \int_c^d Q(g_1(y), y)dy = \int_c^d Q(g_2(y), y)dy + \int_d^c Q(g_1(y), y)dy =$$
$$\int_{C_2} Qdy + \int_{C_1} Qdy = \oint_C Qdy$$

Такође:

$$C = C_1' \cup C_2'; \qquad C_1' : \begin{cases} y = f_1(y) \\ x \in [a, b] \end{cases} ; C_2' : \begin{cases} y = f_2(x) \\ x \in [a, b] \end{cases}$$

$$\iint_D \frac{\partial p}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dx = \int_a^b \left(P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))\right) dx =$$
$$\int_a^b P(x, f_2(x))dx - \int_a^b P(x, f_1(x))dx = -\int_b^a P(x, f_2(x))dx - \int_a^b Q(x, f_1(x))dx =$$
$$-\int_{C_2'} Pdx - \int_{C_1'} Pdx = -\oint_C Pdx$$

Коначно имамо:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_C Qdy + \oint_C Pdx =$$

$$= \oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

У случају да област D није елементарна, поделимо је на елементарне подобласти D_1 D_2.

$\oint_{C_1 \cup C_2} = \int_{\widehat{BA}} + \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{\widehat{AB}}$ јер је $\int_{\widehat{AB}} = -\int_{\widehat{BA}}$, а из претходног имамо:

$\int_{\widehat{BA}} + \int_{C_1} = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$
$\int_{\widehat{AB}} + \int_{C_2} = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$

$$\oint_C = \oint_{C_1 \cup C_2} = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Приметимо да ако су $P(x, y) = -y$ и $Q(x, y) = x$ Гринова формула нам даје

$$\oint_C xdy - ydx = \iint_D 2dxdy = 2P(D)$$

површину области D, тј површину области D можемо да израчунамо применом криволинијског интеграла друге врсте, где је крива C руб области D.

Пример 1: Израчунати површину елипсе $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

$P(D) = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx.$

Параметризујмо елипсу поларним користећи поларне координате:$x = a\cos t; y = b\sin t, t \in [-\pi, \pi]$ па имамо да су $dx = -a\sin tdt; dy = b\cos tdt$.

$$P(D) = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} abdt = ab\pi$$

1.4 Површински интеграли

1.4.1 Површи у простору

Површ $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ је дефинисана непрекидном функцијом $\overrightarrow{r} : D \to \Gamma$

$$\overrightarrow{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Функције x, y и z су непрекидне и $\overrightarrow{r}_u$ и $\overrightarrow{r}_v$ су изводи по u и v. Параметризација је регуларна ако је $|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| \neq 0$.

Дефиниција. Г је глатка површ ако супарцијални изводи функциј x, y и z непрекидне на D.
Ако је Г коначна унија глатких површи, кажемо да је поврх део по део глатка.
Нека је Г део по део глатка површ, M тачка на њој и l затворена крива кроз M која не сече руб површи Г. Нека је $\overrightarrow{n}$ вектор нормале површи кроз тачку M. Ако овај вектор померамо дуж криве l и на крају се вратимо у тачку M а да вектор нормале није променио смер, казэемо да је површ Г двострана или оријентабилна. У супротном је једнострана, на пример то је Мебијусова трака.

1.4.2 Површински интеграл прве врсте

Нека је Γ део по део глатка, ограничена, површ коначне површине и $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ ограничена функција. Са $\sigma(\Gamma)$ ћемо означити површину површи Γ.

Дефиниција 1:. $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ је подела Γ ако
(1) $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots, \Gamma_n$
(2) Γ_i су мерљиви (имају површину)
(3)$\sigma(\Gamma_i \cap \Gamma_j) = 0$ за $i \neq j$

Нека је Π скуп свих подела и $\pi = \{\Gamma_1, ..., \Gamma_n\}$.
Избор за поделу π је коначан скуп $\{T_1, \ldots, T_n\}$ где $T_i \in \Gamma_i$. Нека је ξ_π скуп избора за поделу π.

$$\lambda(\pi) = max\{diam\Gamma_i\}$$

Интегрална сума је

$$S(f, \pi, \xi) = \sum_{1}^{n} f(T_i)\sigma(\Gamma_i)$$

Дефиниција2: $I = \iint_\Gamma f(x, y, z)d\sigma$ је површински интеграл прве врсте функције f по површи Γ акко

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \pi \in \Pi)(\forall \xi \in \xi_\pi)(\lambda(\pi) > 0 \Longrightarrow |I - S(f, \pi, \xi)| < \epsilon$$

Приметимо да $\sigma(\Gamma_i)$ не зависи од оријентације површи па ни површински интеграл прве врсте.
Γ_i се може апроксимирати делом тангентне равни E_i а она пројекцијом на xOy равни D_i.

$$\sigma(\Gamma_i) \approx P(E_i) \approx P(D_i)\frac{1}{\cos\gamma} = P(D_i)\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

где је $\overrightarrow{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$ и p и q су парцијални изводи функције $z = f(x,y)$.

$$S(f,\pi,\xi) = \sum_1^n f(T_i)P(D_i)\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Онда је

$$\iint_\Gamma f(x,y,z)d\sigma = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|dudv$$

Односно

$$\iint_\Gamma f(x,y,z)d\sigma = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy$$

1.4.3 Површински интеграл друге врсте

Нека је Γ део по део глатка, двострана, ограничена, површ коначне површине и $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ ограничена функција и нека се површ једноыначно пројектује на раван xOy. Изаберимо страну површи а затим извршимо поделу и избор тачака као код површинског интеграла прве врсте.
Нека је $S_{xy}(R,\pi,\xi) = \sum_1^n f(T_i))(\pm P(D_i))$ где је D_i нормална пројекција Γ_i на xOy раван и знак зависи од стране површи.

Дефиниција 1: $I = \iint_\Gamma R(x,y,z)dxdy$ је површински интеграл друге врсте функције R по површи Γ акко

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall\pi \in \Pi)(\forall\xi \in \xi_\pi)(\lambda(\pi) > 0 \Longrightarrow |I - S(R,\pi,\xi)| < \epsilon$$

Слично се дефинишу и $\iint_\Gamma P(x,y,z)dydz$ и $\iint_\Gamma Q(x,y,z)dxdz$ и коначно

$$\iint_\Gamma Pdydz + Qdxdz + RdxdyR = \iint_\Gamma Pdydz + \iint_\Gamma Qdxdz + \iint_\Gamma dxdy$$

Очигледно, интеграл зависи од оријентације, па је:

$$\iint_{\Gamma^-} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = -\iint_{\Gamma^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Ови интеграли се рачунају свођењем на двоструки интеграл:

$$\iint_{\Gamma^-} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \pm\iint_D (P,Q,R)(-p,-q,1)dyxdy$$

где је D пројекција површи на xOy раван.
Веза између површинског интеграла прве и друге врст:

$$\iint_{\Gamma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$$

Дефиниција 2:. Γ је елементарна површ аако има једнозначно представљање

$$z = f(x,y), \quad y = g(x,z) \quad x = h(y,z)$$

где су f, g и h непрекидне функције.

Формула Стокса
Нека се Γ може поделити на коначно много елементарних површи и нека је C руб од Γ. Ако су функције P, Q и R и њихови парцијални изводи непрекидне функције на области која садржи Γ и C, онда

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Gamma} \begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

А ово је

$$\iint_\Gamma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Пример 1: Израчунати

$\oint_C (y+z)dx + (2x+z)dy + (x+y)dz$ где је C крива у преску цилиндра $x^2+y^2=4$ и параболоида $2-z=x^2+y^2$.

Применом Стоксове формуле добијамо

$$\iint_\Gamma \begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & 2x+z & x+y \end{vmatrix}$$

а ово је

$$\iint_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(2x+z)\right) dydz + \left(\frac{\partial}{\partial z}(y+z) - \frac{\partial}{\partial x}(x+y)\right) dxdz$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(2x+z) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z)\right) dxdy.$$

А последњи интеграл је

$$\iint_D dxdy = P(D) = 4\pi$$

где је D пројекција Γ на xOy раван.

Дефиниција 3: Тело T је елементарно акко је

$$T = \{(x,y,z) | f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y), (x,y) \in D_1\}$$

$$T = \{(x,y,z) | g_1(x,z) \leq y \leq g_2(x,y), (x,z) \in D_2\}$$

$$T = \{(x,y,z) | h_1(y,z) \leq x \leq h_2(y,z), (y,z) \in D_3\}$$

где су $f_{1,2}$, $g_{1,2}$ и $h_{1,2}$ непрекидне функције.

Формула Гаус-Остроградског Нека је тело T коначна унија елементарних, Γ његова граница . Ако су P, Q и R као и њихови парцијални изводи $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрекидни на $T \cup \Gamma$, онда је

$$\iint_\Gamma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

Пример 2: Израчунати

$$\iint_S x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$$

ако је S спољна страна (позитивна) сфере $S : x^2+y^2+z^2 = 25$.

Применом формуле Гаус-Остроградског добијамо да је

$$\iint_S x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy = \iiint_T (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)dxdydz$$

Тело T је лопта и увођењем сферних коодината добијамо да је дати интеграл

$$3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^5 \rho^2\rho^2 \cos\theta d\rho = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 625\cos\theta d\theta = 7500\pi$$