METODE OPTIMIZACIJE
METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Dr Tina Dašić
Dr Miloš Stanić

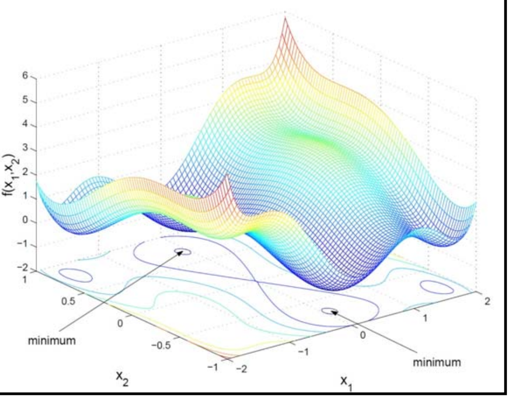
Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu
2014.

FORMULACIJA PROBLEMA NLP-a

Zadatak optimizacije je pronalaženje promenljivih pri kojima ciljna (kriterijumska) funkcija uzima ekstremnu (minimalnu ili maksimalnu) vrednost, uz ograničenja sa kojima se definiše prostor mogućih rešenja.

$$\min_{X \in R^n} f(X)$$
$$\varphi_j(X) = 0,\ j = 1,...,J$$
$$\psi_k(X) \le 0,\ k = 1,...,K$$

f kriterijumska funkcija,
φ ograničenja u formi jednakosti
Ψ funkcije ograničenja u formi nejednakosti.



LOKALNE I GLOBALNE METODE OPTIMIZACIJE

Podela

1. Podela prema ***tipu problema*** koji se rešava sa jedne strane i prema ***algoritmima*** koji se za to koriste sa druge (pojedini algoritmi su primenljivi za rešavanje samo jednog ili više tipova problema).
2. Podela koja je najzanimljivija za rešavanje inženjerskih problema, i o kojoj će biti reči u narednom delu teksta, je podela **na metode lokalne i globalne optimizacije**.

Podela prema vrsti optimizacionog problema

1. Broj kriterijumskih funkcija
   - jednokriterijumska
   - višekriterijumska
2. Ograničenja
   - bez ograničenja
   - sa ograničenjima
     - linearna
     - nelinearna
3. Forma kriterijumske funkcije
   - linearna
   - nelinearna
     - kvadratna
     - ...
4. Domen promenljivih
   - diskretan
   - realan
   - mešovit

Podela prema metodama optimizacije

1. Determinističke
   - linearno programiranje (LP)
   - kvadratno programiranje (QP)
   - kombinatorna optimizacija (grafovi)
   - nelinearno programiranje (NLP) (metode lokalne optimizacije)
     - sa gradijentima
     - bez gradijenata
2. Stohastičke (metode globalne optimizacije - heuristike)
   - Skup rešenja
   - Jedno rešenje

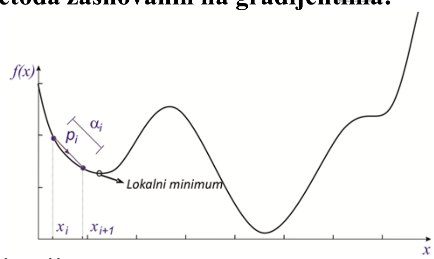
LOKALNE I GLOBALNE METODE OPTIMIZACIJE

Osnovni koraci lokalnih optimizacionih metoda zasnovanih na gradijentima:

Definiše se početna tačka X_0

$i = 0,1,2,.....$

- proveriti konvergenciju u tački X_i
- sračunati pravac pomeranja p_i
- odrediti veličinu koraka pomeranja α_i
- odrediti položaj nove tačke $X_{i+1} = X_i + \alpha_i p_i$



Nedostatci primene metoda lokalne optimizacije:

- pronalazi se lokalni minimum - inženjerski problemi su obično mnogodimenzionalni i pronalaženje lokalnog optimuma može biti veoma daleko i od inženjerski prihvatljivog rešenja a pogotovo od željenog globalnog minimuma
- kod inženjerskih problema, priroda kriterijumske funkcije je često potpuno nepoznata, pa ni primena analitičkog izraza za izvod funkcije nije moguća. Gradijenti se moraju računati što predstavlja dodatni utrošak računarskog vremena. Postavlja se problem veličine koraka pomeranja.
- spora konvergencija u oblasti malih gradijenata kriterijumske funkcije, kao i u slučaju kada se vrednosti unutar vektora gradijenata (f') razlikuju za red veličine.

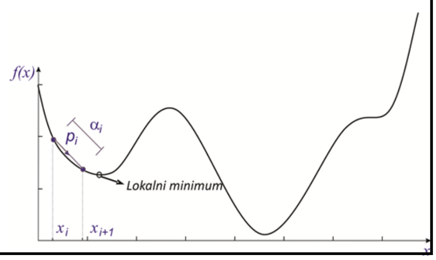
LOKALNE I GLOBALNE METODE OPTIMIZACIJE

Nedostatci primene metoda lokalne optimizacije:

Čini se da bi najrazumniji model korišćenja lokalnih optimizacionih metoda bio, da se kao početni korak definiše inženjerski prihvatljivo rešenje X_0, koje bi zatim bilo *popravljeno*, primenom neke od metoda lokalne optimizacije.

Međutim, nalaženje inženjerski prihvatljivog rešenja, kod složenih problema, može biti veoma težak zadatak. Osim toga početno rešenje (X_0), a samim tim verovatno i krajnje rešenje će zavisiti od iskustva i znanja onoga koji ga je definisao, a to takođe može biti veoma daleko od globalnog optimuma.

Lokalne optimizacione metode se najčešće primenjuju tako što se algoritam pokrene iz nekoliko početnih tačaka (X_0), pa se kao optimum usvoji rešenje koje daje najbolji rezultat.



LOKALNE I GLOBALNE METODE OPTIMIZACIJE

Zahtevi koje se postavljaju pred globalne optimizacine metode:

Pokušaj da se prevaziđu problemi lokalnih metoda:

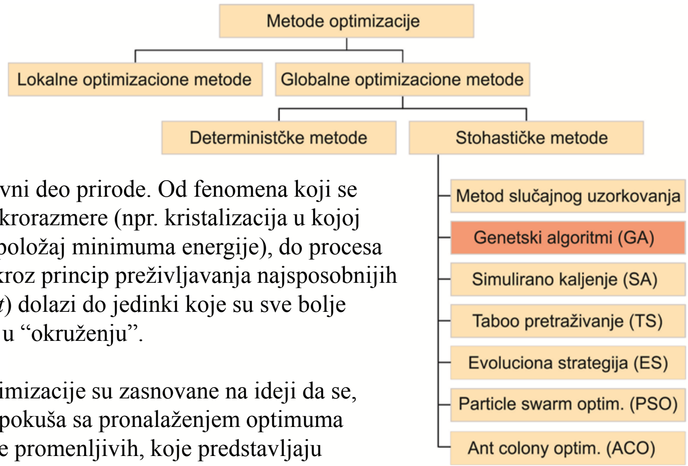
- zarobljavanje rešenja u lokalnom ekstremu
- loša konvergencija u oblastima sa malim gradijentima
- problemi sa konvergencijom kada se gradijenti razlikuju za red veličine
- nepoznata priroda funkcije i njeni analitički izvodi

Šta treba da zadovolji metod optimizacije primeren rešavanju složenih inženjerskih problema ?

- široko pretraživanje prostora mogućih rešenja
- sposobnost praćenja trenutno najpovoljnijeg trenda

METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Metode globalne optimizacije pretražuju prostor mogućih rešenja na *kontrolisano slučajan* način.



Optimizacija je sastavni deo prirode. Od fenomena koji se odvijaju na nivou mikrorazmere (npr. kristalizacija u kojoj molekuli zauzimalu položaj minimuma energije), do procesa evolucije u kojoj se kroz princip preživljavanja najsposobnijih (*survival of the fittest*) dolazi do jedinki koje su sve bolje adaptirane na uslove u "okruženju".

Metode globalne optimizacije su zasnovane na ideji da se, imitiranjem prirode, pokuša sa pronalaženjem optimuma složenih funkcija više promenljivih, koje predstavljaju matematičku apstrakciju složenog inženjerskog problema.

METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Simulirano kaljenje (*Simulated annealing*) (SA)

Statistička termodinamika se bavi ponašanjem tela na konačnoj temperaturi. Verovatnoća *p(T,s)* da sistem koji je u termičkoj ravnoteži na temperaturi T, ima konfiguraciju s, zavisi od energije *E(s)* i računa se po Boltzmann-ovoj raspodeli:

$$p(s,T)=\frac{e^{-E(s)/(kT)}}{\sum_{w\in U} e^{-E(w)/(kT)}}$$, gde je k-Bolcmanova konstanta i U - skup svih mogućih stanja.

Pretpostavlja se da je u trenutku t *(pri temperaturi T)* sistem u stanju q. Stanje r u trenutku $t+1$ se generiše na slučajan način. Verovatnoća prelaska iz stanja q u r zavisi od energija koja su vezana za ta stanja:

$$p_{qr}=\frac{p(r,T)}{p(q,T)}=\begin{cases} 1.0, & E(r)\le E(q) \\ e^{-(E(r)-E(q))/(kT)}, & E(r)>E(q) \end{cases}$$

Ukoliko je p_{qr}=1, to znači da je energija novog stanja r manja od energije prethodnog q, pa se r odmah prihvata kao novo stanje za trenutak $t+1$.
Stanje sa većom energijom se takođe prihvata kao moguće, ali sa sračunatom verovatnoćom prelaska p_{qr}.

METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Simulirano kaljenje (*Simulated annealing*) (SA)

Analogija koja je uočena i pretočena u metod optimizacije (*Kirkpatrik*) podrazumeva da bi energija sistema mogla odgovarati vrednosti kriterijumske funkcije ***f*** čiji se **minimum** traži, a stanje sistema (*s*) vektoru nezavisno promenljivih *X*.

Osnovni koraci optimizacionog algoritma SA

Ulazni podaci:

Definiše se, ili se na slučajan način generiše, početno rešenje X_0, ($t=0$)

Definiše se zakon promene parametra *T*: $T(t)$ – hlađenje: $T(t)=\alpha\, T(t-1)$, $(0.9< \alpha <0{,}99)$

t=1,2,.....

1. U Δ okolini tačke X_{t-1} ($N(X_{t-1},\Delta)$) na slučajan način se izabere novo moguće rešenje problema X_t.
2. Sračuna se vrednost kriterijumske funkcije koja odgovara novom rešenju $f(X_t)$.
3. Ukoliko novo rešenje ima manju vrednost kriterijumske funkcije, X_t se odmah prihvata kao novo stanje. U suprotnom, prelazak u nepovoljnije stanje, je vezan za verovatnoću:

$$p = e^{-(f(X_t)-f(X_{t-1}))/T(t)}$$

4. Ispituje se ispunjenost uslova za prekid proračuna ili se ispituje ispunjenost uslova za korekciju Δ okoline i ide se u naredni korak *t*.

METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Simulirano kaljenje (*Simulated annealing*) (SA)

Metod simuliranog kaljenja neprestano traži kompromis između dva zahteva: široko pretraživanja prostora i praćenja trenutno najpovoljnijeg trenda.

- U početku primene metode, kada su vrednosti parametra *T* visoke, metoda intenzivno i široko pretražuje prostor mogućih rešenja (verovatnoća prihvatanja i lošijih rešenja je relativno visoka). Zavisno od specifičnosti problema koji se rešava, u toj fazi bi trebalo obezbediti i da Δ okolina bude relativno velika.
- Kasnije faze proračuna, sa malim vrednostima parametra *T*, više vode računa o praćenju najpovoljnijeg trenda. U tim fazama bi i Δ okolina iz koje se bira rešenje trebalo da bude manja, čime bi se obezbedila samo mala korekcija vektora *X* i polako približavanje konačnom rešenju.

Važan aspekt ovog algoritma je definisanje funkcije promene parametra *T* tokom iteracija proračuna (*t*). Ova funkcija se zove šema hlađenja i treba da obezbedi dovoljno sporo smanjenje parametra *T*. Najčešće se koristi sledeći oblik funkcije: $T(t)=\alpha T(t-1)$
gde je α parametar čija vrednost treba da bude bliska 1 ($\alpha<1$) kako bi se obezbedilo dovoljno sporo smanjivanje parametra *T*.

METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Genetski Algoritmi (GA)

Šta su GA ?
GA predstavljaju metod optimizacije u ”diskretnom” mnogodimenzionalnom prostoru bez ograničenja.

Kako GA funkcionišu ?
Osnovni operatori GA se primenjuju na kodiranom skupu rešenja koja se inicijalizuje na slučajan način.

- selekcija
- ukrštanje
- mutacija

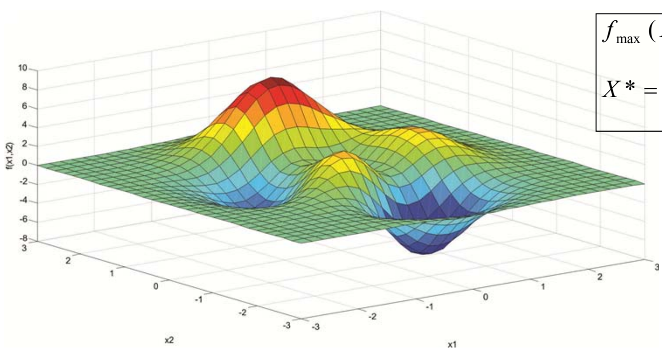
METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Genetski Algoritmi (GA)

Primer: Odrediti maksimum funkcije sa tačnošću 0.0001.

$$f(x_1, x_2) = 3 \cdot (1 - x_1)^2 e^{-x_1^2 - (x_2+1)^2} - 10 \cdot \left(\frac{x_1}{5} - x_1^3 - x_2^5\right) \cdot e^{-x_1^2 - x_2^2} - \frac{1}{3} e^{-(x_1+1)^2 - x_2^2}$$

$$x_1, x_2 \in [-3,\ 3]$$



$$f_{\max}(X = X^*) = 8.1062$$

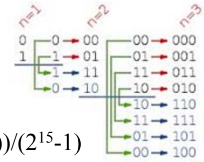
$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0093 \\ 1.5814 \end{bmatrix}$$

METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Genetski Algoritmi (GA)

Primer:

Određivanje broja bitova za kodiranje x_1 i x_2:



$$\boxed{\frac{x_i^{\max} - x_i^{\min}}{2^{nb_{xi}} - 1} < \varepsilon_{xi} \rightarrow nb_{xi}} \longleftrightarrow \quad 3\text{-}(\text{-}3))/(2^{16}\text{-}1) < 0.0001 < (3\text{-}(\text{-}3))/(2^{15}\text{-}1)$$

Broj bita za jedno kodirano rešenje X': $Nb = nb_{x1} + \ldots + nb_{xn}$

	gen $_{x1}$	gen $_{x2}$
Hromozom – kodirano rešenje X' $\longleftrightarrow$	1101011101110111	1010001000100010
		⇩ ***dekodiranje***
Nezavisne prom. $-X$ $\longleftrightarrow$	$x_1 = 2.5997$	$x_2 = -1.3999$
		⇩ ***evaluacija***
Vrednost funkcije $\longleftrightarrow$	$f(x_1,x_2) = 0.0267$	

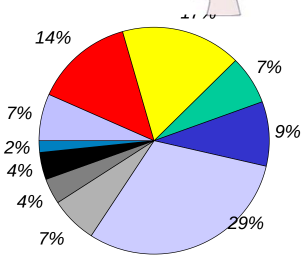
METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Genetski Algoritmi (GA) – kanonična forma

Primer:

Populacija - skup kodiranih rešenja P_t

$$P_t = [X'_1, X'_2, \ldots, X'_N] \xrightarrow{\text{dekod. + evaluacija}} F_t = [f_1, f_2, \ldots, f_N]$$



- **Selekcija** - kontrolisano slučajna $\quad p_i = \dfrac{f_i}{\sum_{j=1}^{N} f_j}$

- **Ukrštanje**

A: 11010111011101111010001000100010 → A': 11010111011101111010001000001000

B: 00011101011100101001001000001000 → B': 00011101011100101001001000100010

- **Mutacija**

A': 11010111011101111010001000001000 ➡ A'': 11010111011101111010001000000000

METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

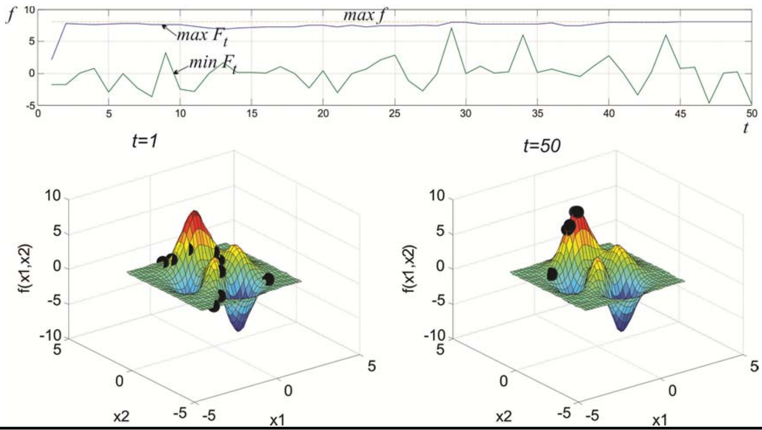
Genetski Algoritmi (GA) – kanonična forma

Primer:

$$f(x_1,x_2) = 3\cdot(1-x_1)^2 e^{-x_1^2-(x_2+1)^2} - 10\cdot\left(\frac{x_1}{5} - x_1^3 - x_2^5\right)\cdot e^{-x_1^2-x_2^2} - \frac{1}{3} e^{-(x_1+1)^2-x_2^2}$$

$$x_1, x_2 \in [-3,\ 3]$$

Populacija
N=10
Generacija
N_t = 50
Ukrštanje
p_c=0,8
Mutacija
p_m=0,03



METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Genetski Algoritmi (GA) – kanonična forma

Teorijske osnove - Fundamentalna teorema GA

Osnovni pojmovi i oznake:

- *Nb* - broj bitova sa kojim se može predstaviti jedno moguće kodirano rešenje
- *U* - skup svih mogućih rešenja problema čija je brojnost 2^{Nb}
- *H* - šema koja se definiše kao niz karaktera (0,1,*) (* je oznaka za “bilo šta” 0 ili 1)

Primer:

Nb = 8	
A = (0 1 0 0 1 1 1 0)	Kodirano rešenje *A* pripada šemi *H.*
B = (0 0 1 0 1 0 1 0)	Kodirano rešenje *B* ne pripada šemi *H.*
*H = (0 1 * * 1 * 1 0)*	Maksimalna brojnost šeme H je 2^3

Definicije:

- *O(H) -r*ed šeme – broj fiksnih pozicija u *H (u primeru: O(H)=5)*
- *L(H)* - dužina šeme - rastojanje između dve najudaljenije fiksne pozicije *(u primeru 3)*
- *f (H)* - *v*aljanost šeme - prosečna vrednost funkcije *f*
- P_t - skup kodiranih rešenja koja čine populaciju u iteraciji *t*

METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Genetski Algoritmi (GA) – kanonična forma

Teorijske osnove - Fundamentalna teorema GA

P_t - populacija od N članova u trenutku t
t - redni broj iteracije proračuna (generacije)
$W_t(H)$ - broj članova šeme H koji su istovremeno i članovi populacije P_t
f_s - prosečna vrednost kriterijumske funkcije unutar populacije P_t
p_c i p_m - definisane verovatnoće ukrštanja i mutacije.

Očekivani broj članova šeme H koji će se naći u narednoj iteraciji, dat je izrazom:

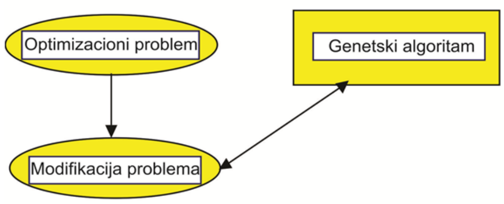
$$\boxed{W_{t+1}(H) = W_t(H)\frac{f(H)}{f_s}\left(1 - p_c\frac{L(H)}{N_b - 1} - O(H)p_m\right)}$$

Broj članova populacije P_t, koji su istovremeno i članovi šeme H - ($W_{t+1}(H)$), raste geometrijskom progresijom, ukoliko je šema kratka - $L(H)$, niskog reda $O(H)$ i sa vrednošću kriterijumske funkcije iznad prosečne f_s.
Takve šeme, koje zadovoljavaju prethodno navedene uslove, nazivaju se blokovi (*building blocks*).

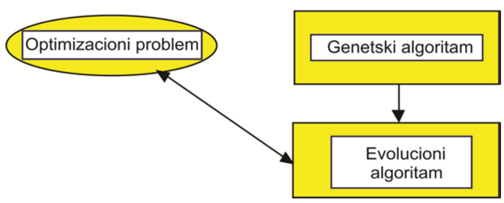
METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Evolucioni algoritmi (EA):

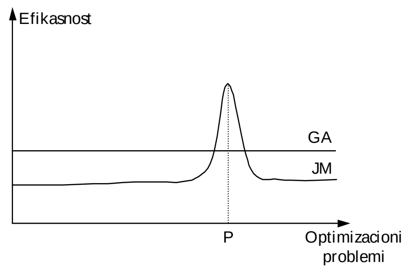
a) Klasičan pristup primeni GA



b) Razvoj metode EA



Slabe i jake metode optimizacije:



Zadatak je naći formulaciju EA koja je pogodna za određeni optimizacioni problem.

METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Evolucioni algoritmi (EA):

Problem trgovačkog putnika (**T**raveling **S**alesmen **P**erson - TSP)
Naći najkraći put kojim se povezuje *n* gradova tako da je svaki potrebno posetiti samo jednom i vratiti se na početnu tačku. Poznat problem iz domena kombinatorne optimizacije. Broj mogućih rešenja *n*!.

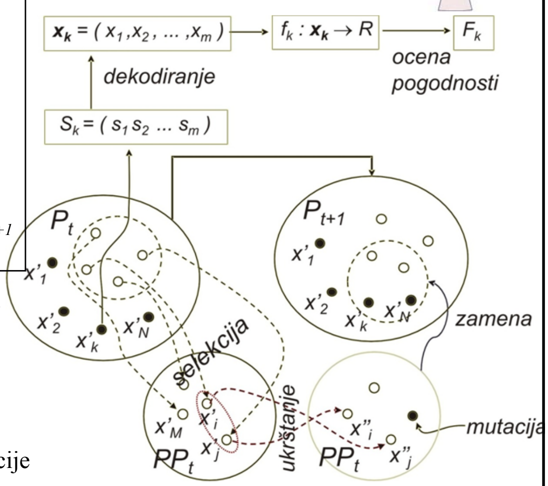
EA pristup rešavanju TSP-a

- kodiranje rešenja nizom bitova nije odgovarajuće za rešavanje TSP-a
- kodirano rešenje treba da bude posebna struktura S u kojoj su promenljive celobrojne vrednosti koje se ne ponavljaju
- klasični operatori ukrštanja i mutacije nisu efikasni jer se njima stvaraju rešenja koja su izvan domena mogućih
- primena klasičnih operatora GA bi zahtevala uvođenje **kaznenih funkcija** kojima se diskvalifikuju nemoguća rešenja, ali je daleko efikasnije kreirati operatore koji bi onemogućili formiranje takvih rešenja

METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Evolucioni algoritmi (EA):

Inicijalizacija: P_t *(t=0)*
t=0,1,2, ...
- vrednovanje rešenja iz P_t
- selekcija - formira se PP_t
- korekcija rešenja iz PP_t :
  - ukrštanje
  - mutacija
- zamena rešenja iz P_t formiranje P_{t+1}
- ispitivanje uslova konvergencije



Primer proračuna F_k za pronalaženje min. funkcije:

$$F_k = \left(\frac{\max_j f - f_k}{\max_j f - \min_j f}\right)\cdot a + b$$

EA obuhvataju brojne modele:
selekcije, zamene, ukrštanja i mutacije

Primena **EA** podrazumeva da modeli ukrštanja i mutacije budu takvi da se dobijaju rešenja koja su unutar domena pretraživanja (*feasible solution*).

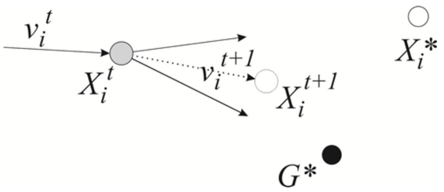
METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Particle Swarm Optimization (PSO):

Algoritam je inspirisan socijalnim (intiligentnim) ponašanjem grupe.
Algoritam pretražuje prostor, tako što se pravac pretraživanja svake jedinke (*particle*) koriguje na kontrolisano slučajan način.
Determinističku komponentu u određivanju pravca pretraživanja čine informacije o trenutno najboljem rešenju cele grupe G^*, ali i o najboljem rešenju same jedinke X_i^*. Stohastička – slučajna komponenta je zadužena da se održi široko pretraživanje prostora mogućih rešenja.

$$\boxed{\begin{aligned} v_i^{t+1} &= \theta \cdot v_i^t + \alpha \cdot e_1 \circ [G^* - X_i^t] + \beta \cdot e_2 \circ [X_i^* - X_i^t] \\ X_i^{t+1} &= X_i^t + v_i^{t+1} \end{aligned}}$$

Inicijalizacija: P_t $(t=0)$
$t=0,1,2,\ldots$
- vrednovanje rešenja iz P_t
- pronalaženje najboljeg G^*
- određivanje pomeranja v^{t+1}
- formiranje novog skupa P_{t+1}
- ispitivanje uslova konvergencije



METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

Particle Swarm Optimization (PSO):

Parametri algoritma:
- brojnost skupa N (najčešće 20 do 30)
- parametri α i β (parametri učenja - najčešće oko 2) ili $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\gamma t}$
- $\theta(t)$ – parametar inercije –usvaja se opadajuća funkcija ili vrednost (0,5-0,9)

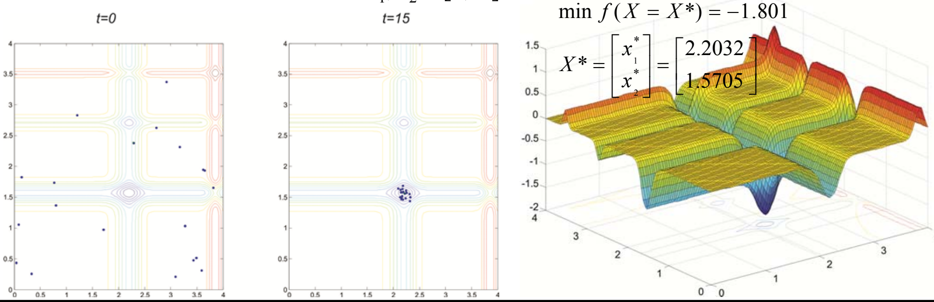
Primer:
Populacija: N=20
Iteracija: t=0,...,15

$$f(x_1,x_2) = -\sin(x_1)\cdot\left[\sin\left(\frac{x_1^2}{\pi}\right)\right]^{2m} - \sin(x_2)\cdot\left[\sin\left(\frac{x_2^2}{\pi}\right)\right]^{2m}$$

$$x_1, x_2 \in [0,\ 4]$$

$$\min f(X = X^*) = -1.801$$

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2032 \\ 1.5705 \end{bmatrix}$$



METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

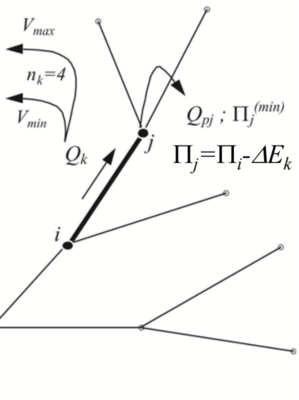
Primena metode GA:

Optimizacija granatih mreža pod pritiskom:

- rešenje se traži u diskretnom domenu
- ograničenja u pogledu minim. pijezometarske kote
- kriterijumska funkcija je minim. investicija

D_k	C_k	S_k
62	35	
85	52	00
110	95	01
150	130	10
200	190	11
250	255	
300	320	

$$N_A = \prod_{k=1}^{ng} n_k$$



$$\min_{\{Dk\}} f = \sum_k C_k L_k$$

$$\Pi_j \geq \Pi_j^{(\min)}, \quad j = 1,\ldots,n$$

- ograničenja se uvode kroz kaznenu funkciju

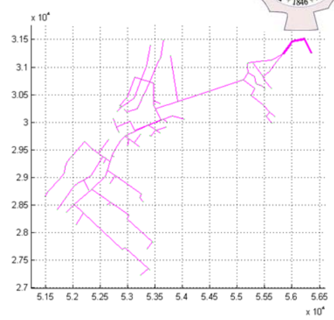
$$\min_{\{D_k\}} f = \sum_k C_k(D_k) L_k + \sum_j O(\max(0, \Pi_j^{\min} - \Pi_j)) \cdot C_p$$

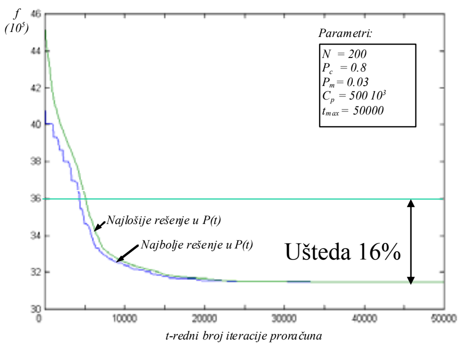
METODE GLOBALNE OPTIMIZACIJE

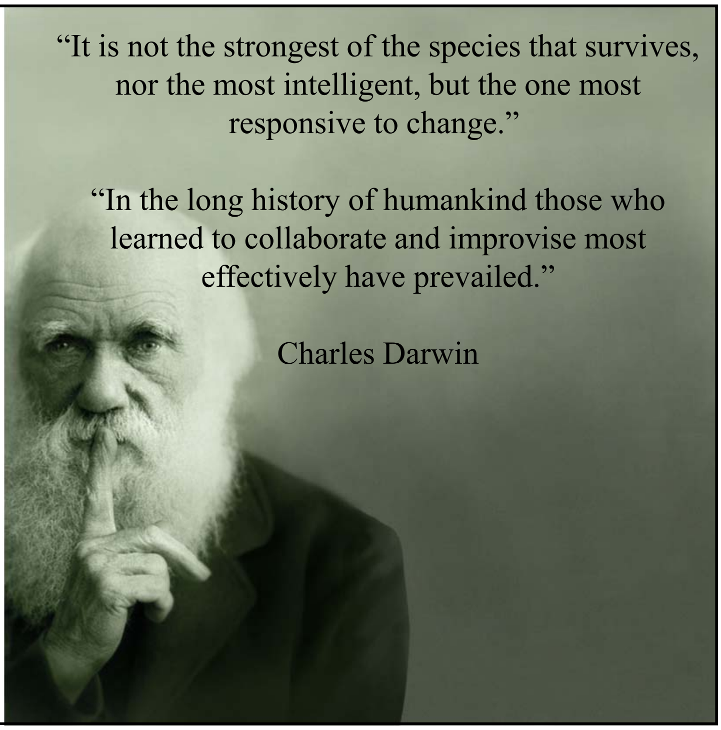
Primena metoda GA:

Primer optimizacije granate mreže:

Kote terena: 175 - 225 mnm
Min.priticak: p_{min} = 2 bara
Gravitaciono: Π_0 = 243 mnm
Broj grana: 147
Prečnici: 60 - 1000 mm






"It is not the strongest of the species that survives, nor the most intelligent, but the one most responsive to change."
"In the long history of humankind those who learned to collaborate and improvise most effectively have prevailed."
Charles Darwin