# *Matrična analiza*

## *Teorija konstrukcija – HVE*

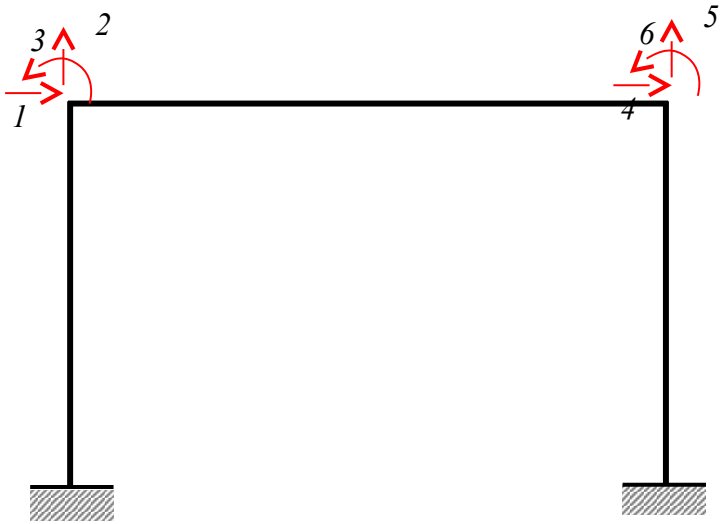
*Vežbe: 12. i 13. sedmica*

*Ova prezentacija je delom sačinjena od slajdova koje je obezbedila prof. Mira Petronijević.*

*Uz prezentaciju preporučujemo da pročitate i istoimeno poglavlje u knjizi prof. Mire Petronijević "Teorija konstrukcija 1"*

# Ortogonalni nosači

- Ortogonalni nosači su nosači čiji su štapovi međusobno pod pravim uglom.



- <u>Kod ortogonalnih nosača uticaj normalnih sila na deformaciju se može zanemariti</u>.
- Posledica:

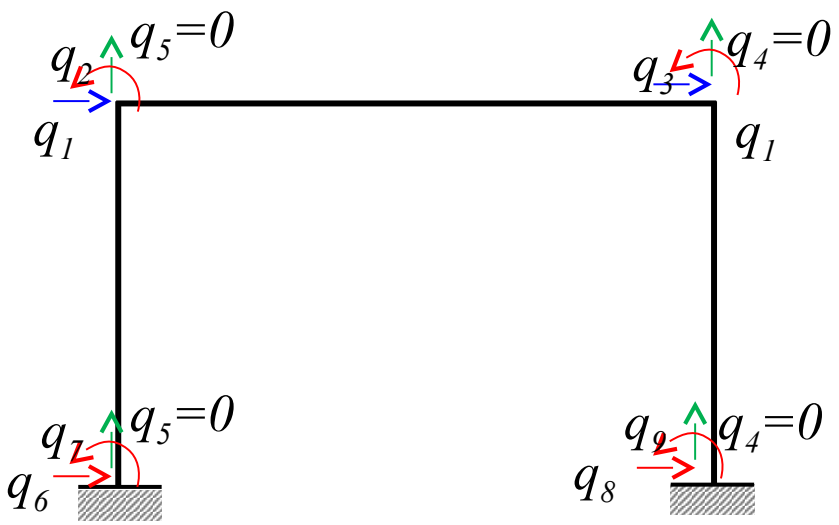
  - Sva pomeranja u pravcu jednog poteza štapova su ista.

- Prednosti:

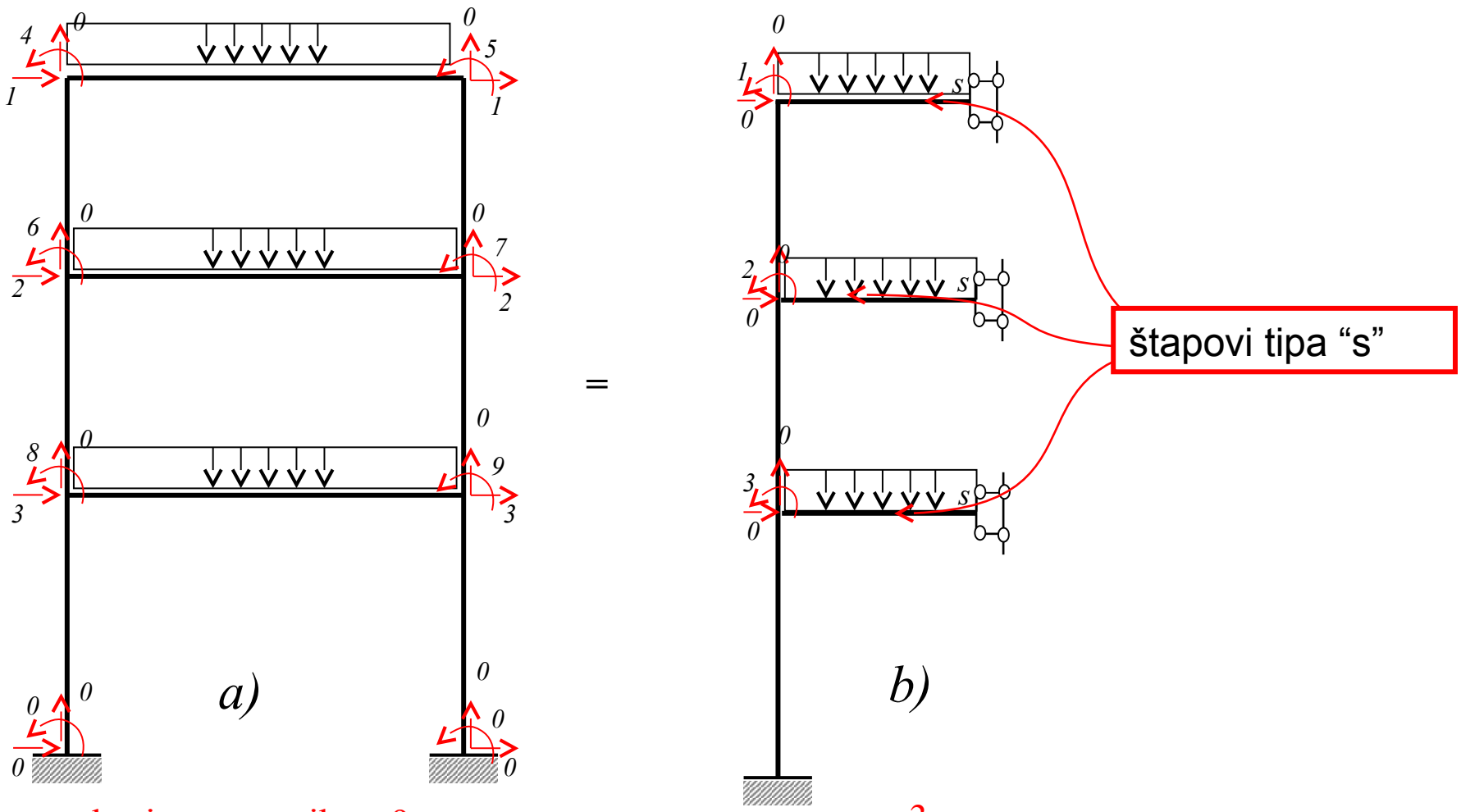
— Smanjuje se broj nepoznatih,

— Matrice krutosti se redukuju na matrice krutosti pri savijanju,

— Pravilnim izborom lokalnog koordinatnog sistema izbegava se transformacija



Na slici a) je predstavljen tipičan ortogonalni nosač simerično opterećen. Sva vertikalna pomeranja čvorova duž vertikalnog poteza štapova su ista i jednaka nuli. Horizontalna pomeranja čvorova su ista na svakoj etaži. Nepoznate su: horizontalna pomeranja spratova i obrtanja slobodnih čvorova. Ukupan br. nepoznatih je n=3+6=9. Ako se iskoristi osobina simetrije, slika b), dobiće se da su sva horizontalna pomeranja spratova jednaka nuli, pa je br. nepoznatih n=3.

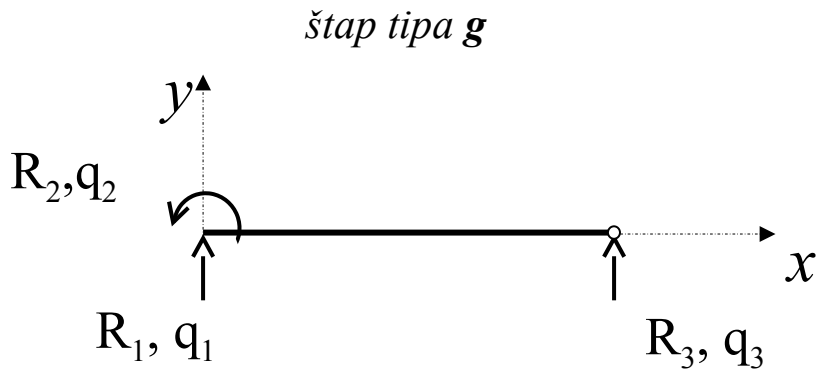


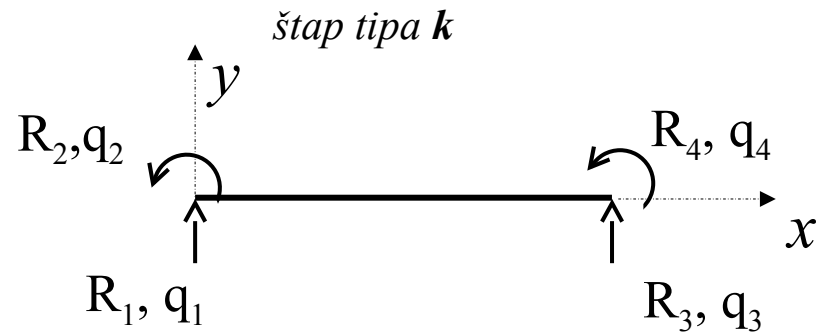

broj nepoznatih n=9

n=3

*Napomena: Ako se uticaj N-sila ne zanemaruje, br. nepoznatih je n=6x3=18*

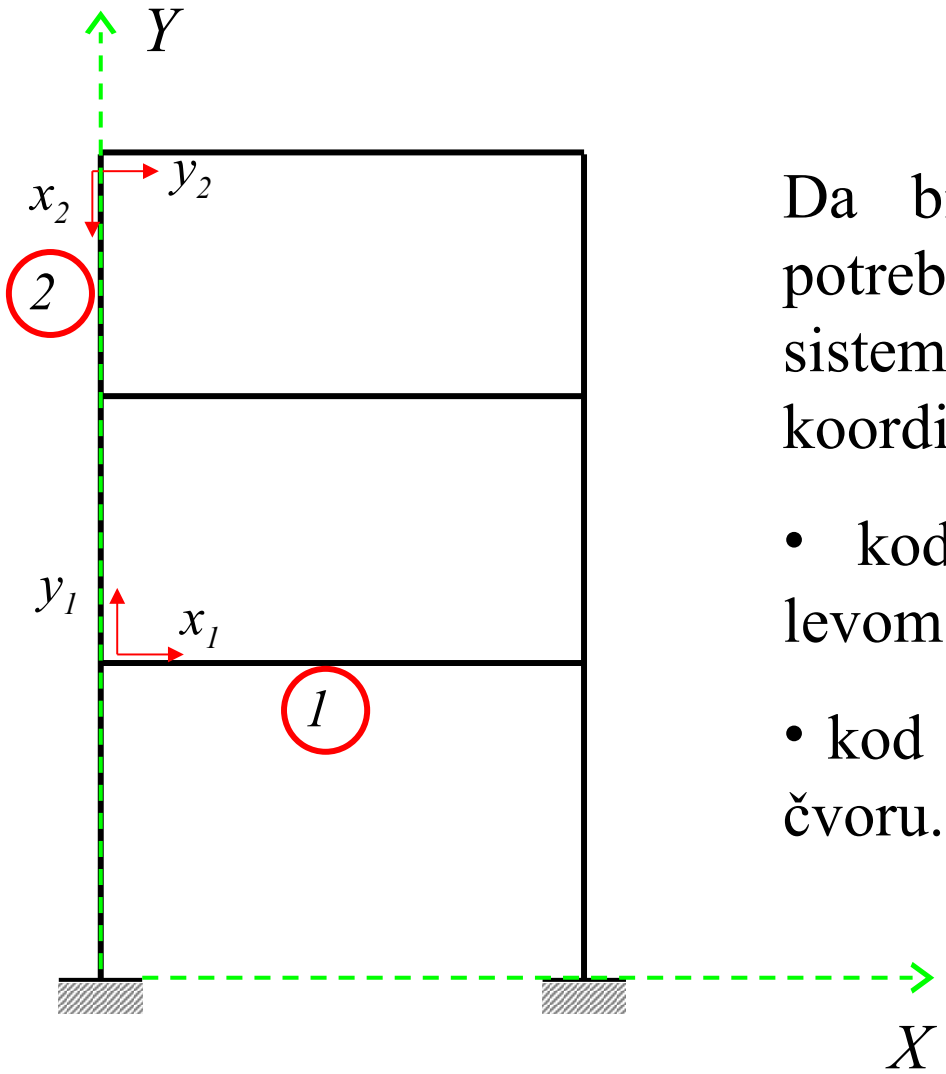
*Matrice krutosti štapova ortogonalnih nosača su matrice krutosti štapova tipa g i k izloženih savijanju savijanju*




$$\mathbf{K}_g^s = \frac{3EI}{l^3}\left[\begin{array}{cc:c} 1 & l & -1 \\ l & l^2 & -l \\ \hdashline -1 & -l & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{K}_k^s = \frac{EI}{l^3}\left[\begin{array}{cc:cc} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \hdashline -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{array}\right]$$




Da bi se izbegla transformacija potrebno je lokalni koordinatni sistem postaviti tako da je koordinatni početak :

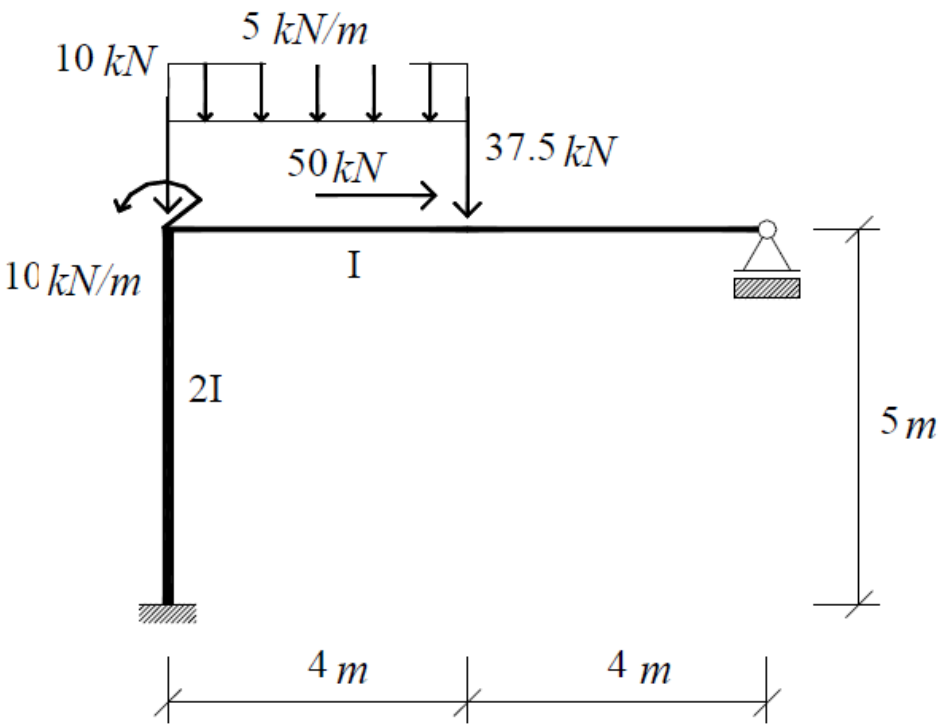
- kod horizontalnih štapova u levom čvoru,
- kod vertikalnih štapova u gornjem čvoru.

# PRIMER 1

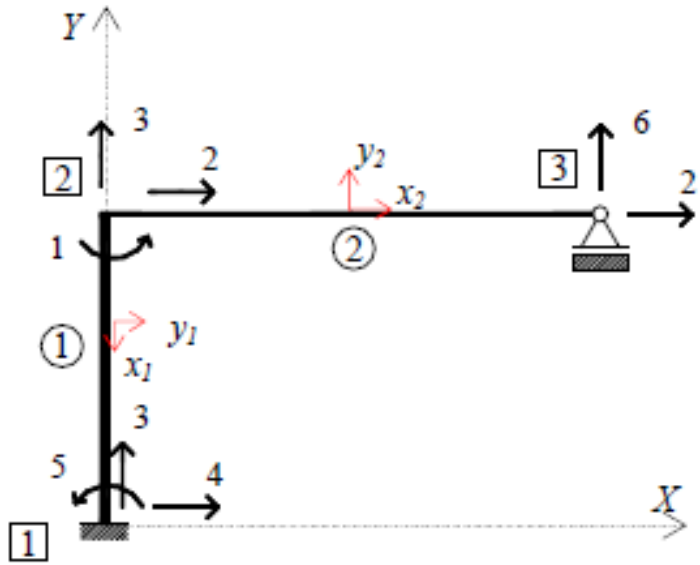
Primer

Za ortogonalni nosač na slici, odrediti sile na krajevima štapova i nacrtati dijagrame sila u presecima usled zadatog opterećenja.

EI=const.



*Shema nosača:*




Nepoznata pomeranja: *1, 2*

Geometrija nosača:

| štap | kraj | | l |
|---|---|---|---|
| | i | k | |
| 1 | 2 | 1 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 8 |

*Matrice krutosti štapova:*

*Štap 1:*

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^* = EI \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.192 & 0.48 & -0.192 & 0.48 \\ 0.48 & 1.6 & -0.48 & 0.8 \\ -0.192 & -0.48 & 0.192 & -0.48 \\ 0.48 & 0.192 & -0.48 & 1.6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

*Štap 2:*

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2^* = EI \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.005859375 & 0.046875 & -0.005859375 \\ 0.046875 & \boxed{0.375} & -0.046875 \\ -0.005859375 & -0.046875 & 0.005859375 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{array}$$

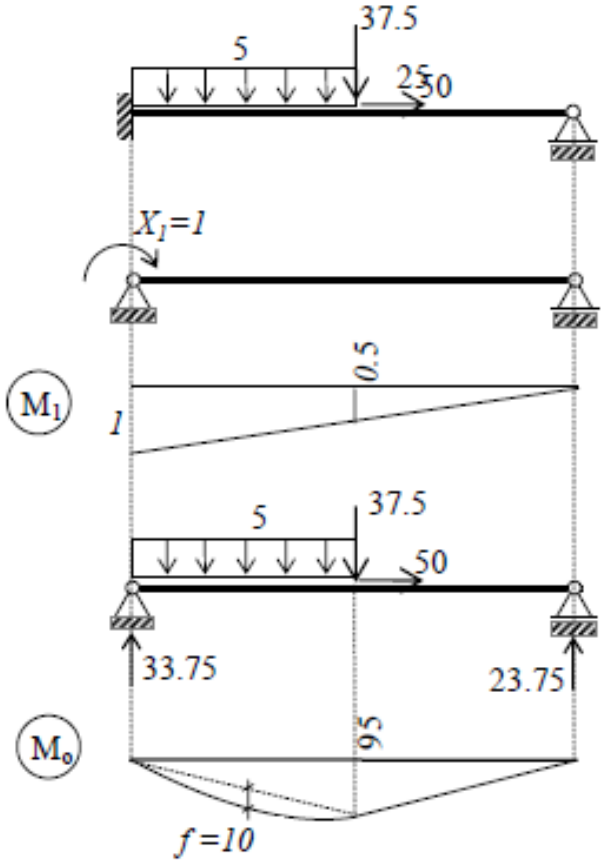
*Submatrica krutosti sistema uz nepoznata pomeranja:*

$$\mathbf{K}_{nn}^* = EI \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{1.975} & 0.48 \\ 0.48 & 0.192 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

1,6+0,375

*Štap 2:*

*Vektor ekvivalentog opterećenja štapa 2 određuje se primenom metode sila.*




*Uslovna jednačina metode sila:*

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$EI\delta_{11} = \int_i^k M_1^2 ds = \frac{8}{3}$$

$$EI\delta_{10} = \int_i^k M_1 M_0 ds = \frac{4}{6}\cdot 95\cdot(2\cdot 0.5+1)+$$

$$+\frac{4}{3}\cdot 10\cdot(1+0.5)+\frac{4}{3}\cdot 95\cdot 0.5 = 210$$

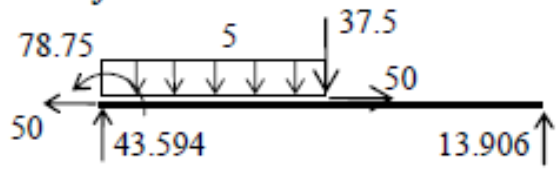
$$X_1 = -\frac{\delta_{11}}{\delta_{10}} = -\frac{210\cdot 3}{8} = -78.75$$

*Reakcije oslonaca:*

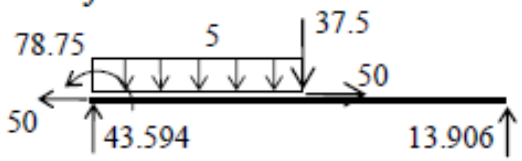
$$T_{ig} = \frac{1}{8}(78.75+37.5\cdot 4+20\cdot 6) = 43.594$$

$$T_{gi} = \frac{1}{8}(-78.75+37.5\cdot 4+20\cdot 2) = 13.906$$

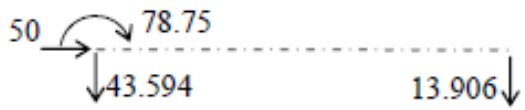
*Reakcije oslonaca*



*Reakcije oslonaca*




*Vektor ekvivalentnog opterećenja*




*Vektor ekvivalentnog opterećenja:*

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^* = \begin{Bmatrix} 50 \\ -43.594 \\ -78.75 \\ -13.906 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{matrix}$$

*Subvektor ekvivalentnog opterećenja nosača*

$$\mathbf{Q}_n^* = \begin{bmatrix} -78.75 \\ 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

*Subvektor sila u čvorovima nosača*

$$\mathbf{P}_n^* = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

*Subvektor slobodnih članova*

$$\mathbf{S}_n^* = \mathbf{P}_n^* + \mathbf{Q}_n^* = \begin{bmatrix} -68.75 \\ 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

*Uslovna jednačina* $\mathbf{K}_{nn}^* \mathbf{q}_n^* = \mathbf{S}_n^*$

*Vektor nepoznatih pomeranja:*

$$EI \begin{bmatrix} 1.975 & 0.48 \\ 0.48 & 0.192 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -68.75 \\ 50 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_n^* = \frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} -250.0 \\ 885.4167 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

*Vektor sila na krajevima štapova:* $\mathbf{R}_j = \hat{\mathbf{K}}_j \mathbf{q}_j^* - \mathbf{Q}_j = \mathbf{K}_j \mathbf{q}_j - \mathbf{Q}_j$

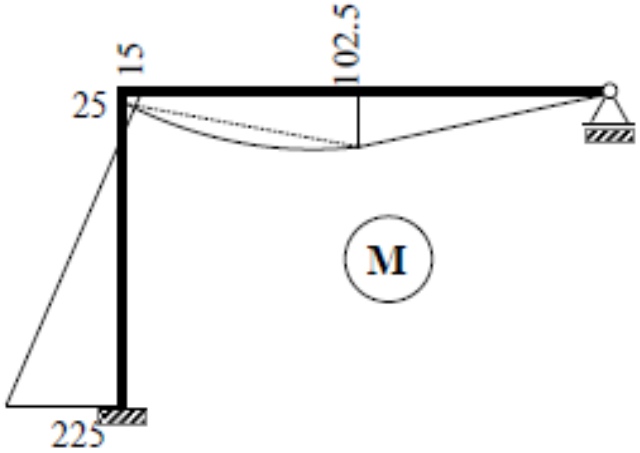
*Štap 1*

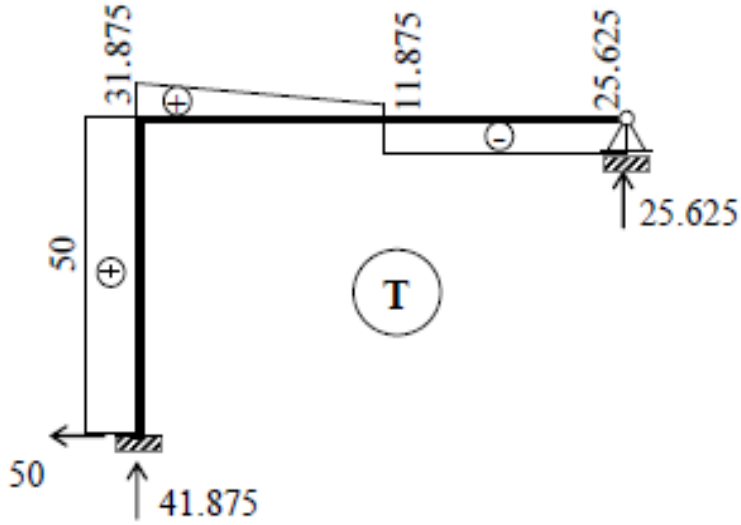
$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0.192 & 0.48 & -0.192 & 0.48 \\ 0.48 & 1.6 & -0.48 & 0.8 \\ -0.192 & -0.48 & 0.192 & -0.48 \\ 0.48 & 0.8 & -0.48 & 1.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 885.4167 \\ -250 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 50.0 \\ 25.0 \\ -50.0 \\ 225.0 \end{Bmatrix}$$

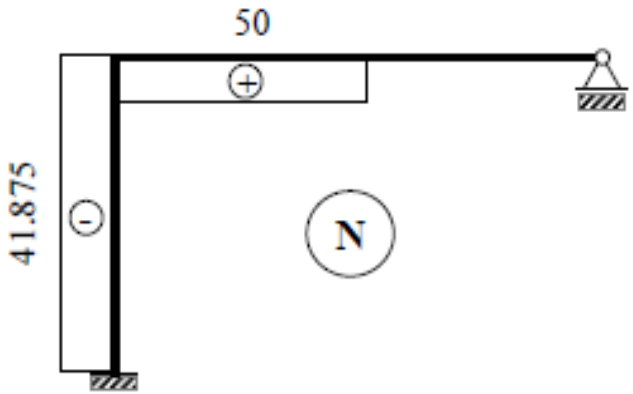
*Štap 2*

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.005859375 & 0.046875 & -0.005859375 \\ 0.046875 & 0.375 & -0.046875 \\ -0.005859375 & -0.046875 & 0.005859375 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -250 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{matrix} - \begin{Bmatrix} -43.564 \\ -78.75 \\ -13.906 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 31.875 \\ -15 \\ 25.625 \end{Bmatrix}$$

*Normalne sile određujemo iz uslova ravnoteže nosača. Dijagrame sila duž pojedinih štapova crtamo na osnovu zadatog opterećenja na štapu.*



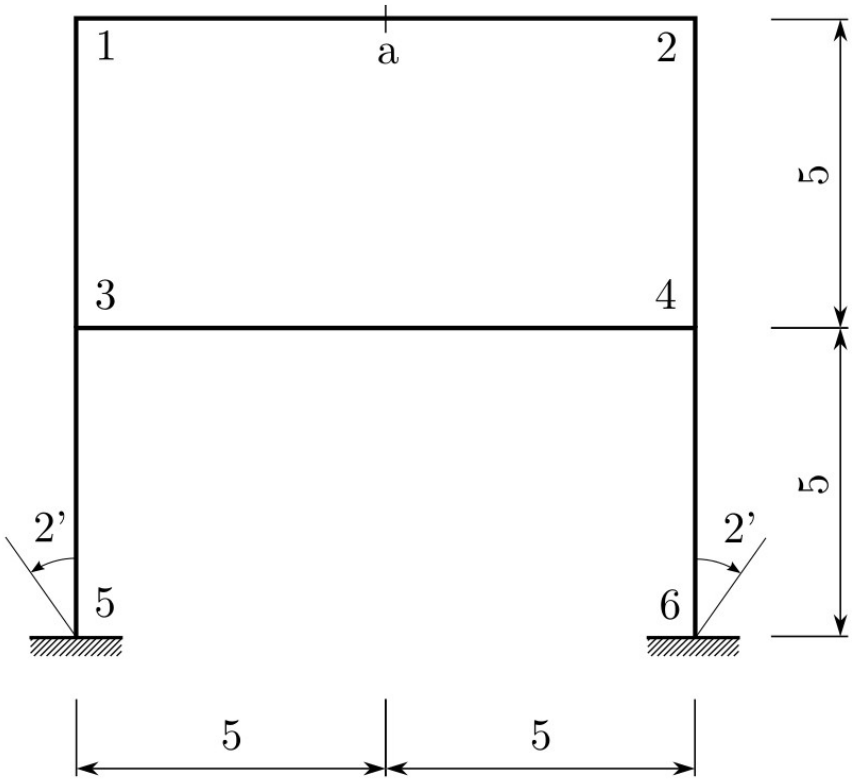



# PRIMER 2

Primenom matrične analize konstrukcija odrediti dijagram momenata na štapu 5-3 usled zadatog obrtanja uklještenja.

Koristiti osobinu simetrije nosača.



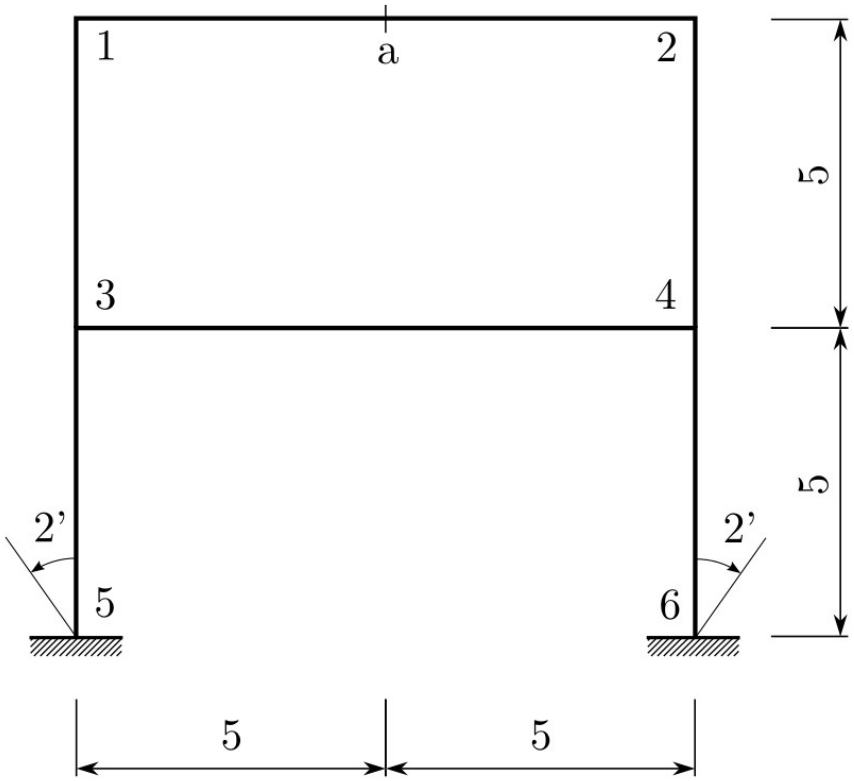

$$EI = 10^5\,\mathrm{kNm}^2$$

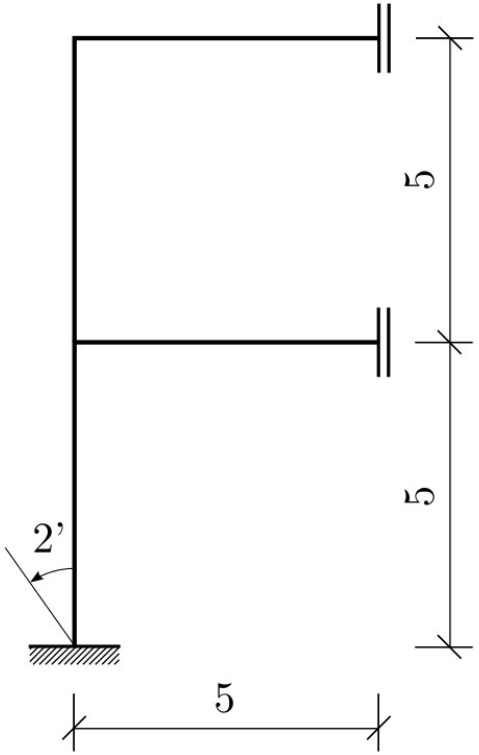
$$I/F = 0$$

Zadato obrtanje uklještenja je čisto simetričan uticaj.

Iskoristićemo osobinu simetrije i posmatrati jednu polovinu nosača.

Pošto se nosač deformiše simetrično, u osi simetrije sprečićemo horizontalna pomeranja i obrtanja.



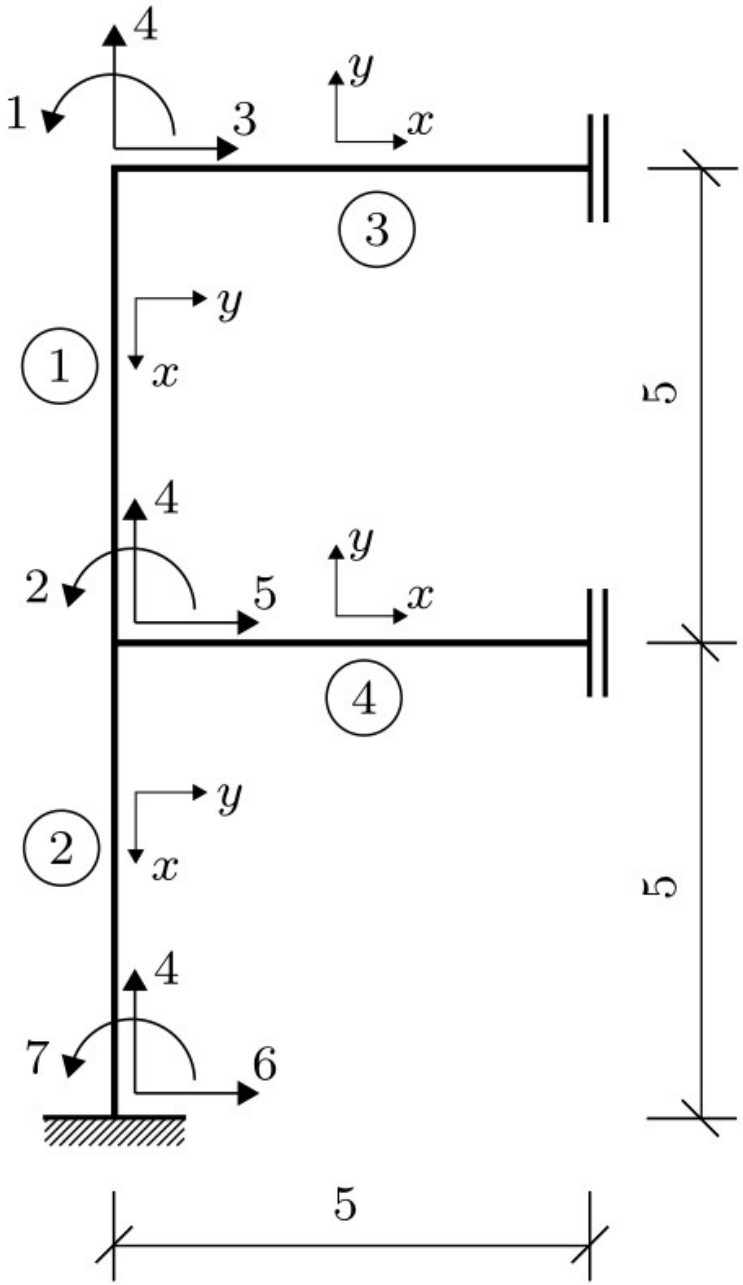



Kategorizacija štapova:
- štapovi 1 i 2 – tip *k*
- štapovi 3 i 4 – tip *s*

Na osnovu kategorija štapova usvajamo generalisana pomeranja.

Pošto je uticaj normalnih sila na deformaciju zanemaren, pomeranja 4, 3 i 5 su sprečena – jednaka nuli. Pomeranje 7 je sprečeno uklještenjem.

**Nepoznata pomeranja su 1 i 2.**



Nepoznata pomeranja određujemo pomoću izraza:

$$\mathbf{q}_n^* = \mathbf{K}_{nn}^{*\,-1}\left(\mathbf{S}_n^* - \mathbf{K}_{np}^* \times \mathbf{q}_p^*\right)$$

Subvektor vektora pomeranja (nepoznata pomeranja)

Submatrica matrice krutosti

Subvektor vektora čvornih sila

Submatrica matrice krutosti

Subvektor vektora pomeranja (poznata pomeranja)

Nosač je neopterećen, pa je vektor čvornih sila jednak nultom vektoru.

$$\mathbf{q}_n^* = \mathbf{K}_{nn}^{*\,-1}(\mathbf{S}_n^* - \mathbf{K}_{np}^* \times \mathbf{q}_p^*)$$

Subvektor
vektora
čvornih sila

Vektor poznatih pomeranja određujemo iz postavke zadatka.

$$\mathbf{q}_n^* = \mathbf{K}_{nn}^{*\,-1}(\mathbf{S}_n^* - \mathbf{K}_{np}^* \times \boxed{\mathbf{q}_p^*})$$

Subvektor
vektora pomeranja
(poznata pomeranja)

$$\mathbf{q}_p^* = \frac{1}{\mathrm{EI}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 58.1776 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$\mathbf{q}_n^* = \boxed{\mathbf{K}_{nn}^*}^{-1}(\mathbf{S}_n^* - \boxed{\mathbf{K}_{np}^*} \times \mathbf{q}_p^*)$$

Submatrica matrice krutosti

Submatrica matrice krutosti

Da bismo odredili submatrice matrice krutosti sistema, moramo prvo odrediti matrice krutosti štapova u lokalnom koordinatnom sistemu, a zatim izvršiti njihovu tranfsormaciju iz lokalnog u globalni koordinatni sistem.

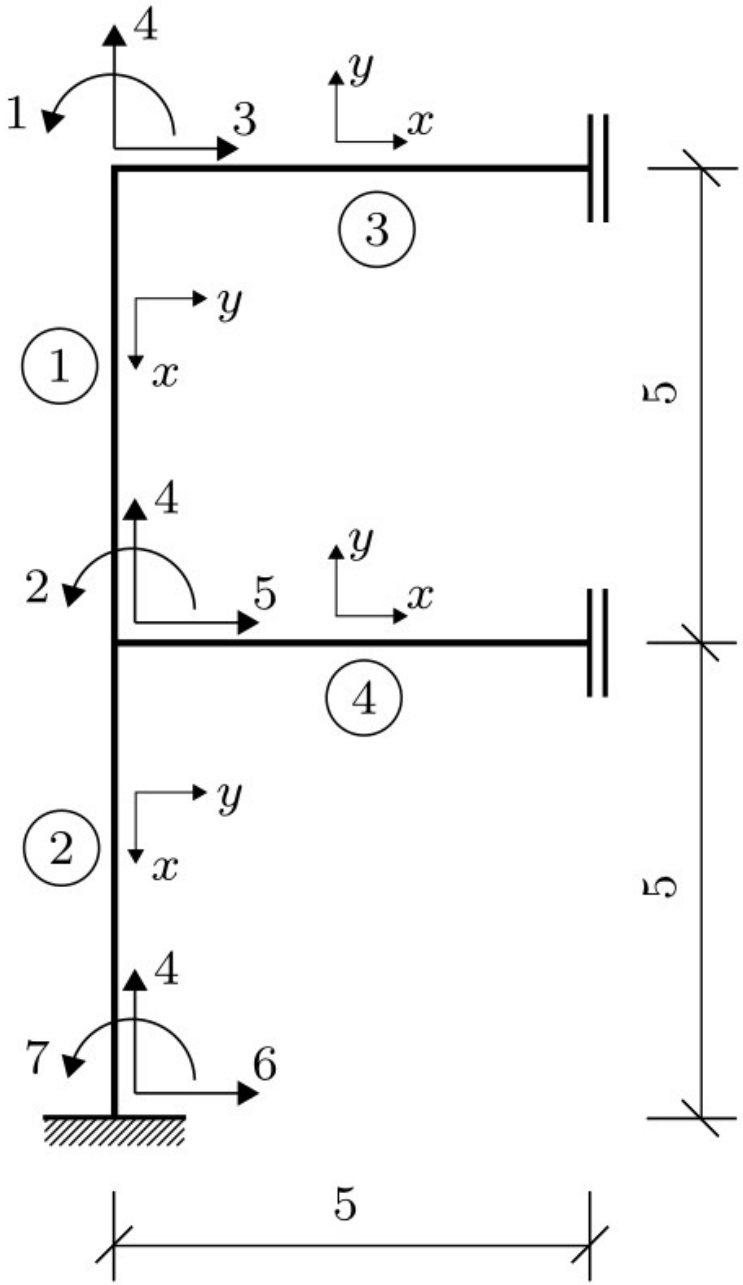
Dati nosač predstavlja ortogonalni nosač, pa nam je u interesu da lokalne koordinatne sisteme (LKS) za štapove 1 i 2 usvojimo kao prema slici, da bismo izbegli transformacije veličina iz lokalnog u globalni koordinatni sistem (GKS).

LKS štapova 3 i 4 usvajamo prema konvenciji usvojenoj prilikom izvođenja matrice krutosti štapa tipa s.

LKS štapova 3 i 4 se poklapaju sa GKS.

**Na ovaj način izbegli smo transformaciju svih veličina iz LKS u GKS.**

Sledeći korak je ispisivanje matrica krutosti u LKS (u ovom slučaju automatski i u GKS).



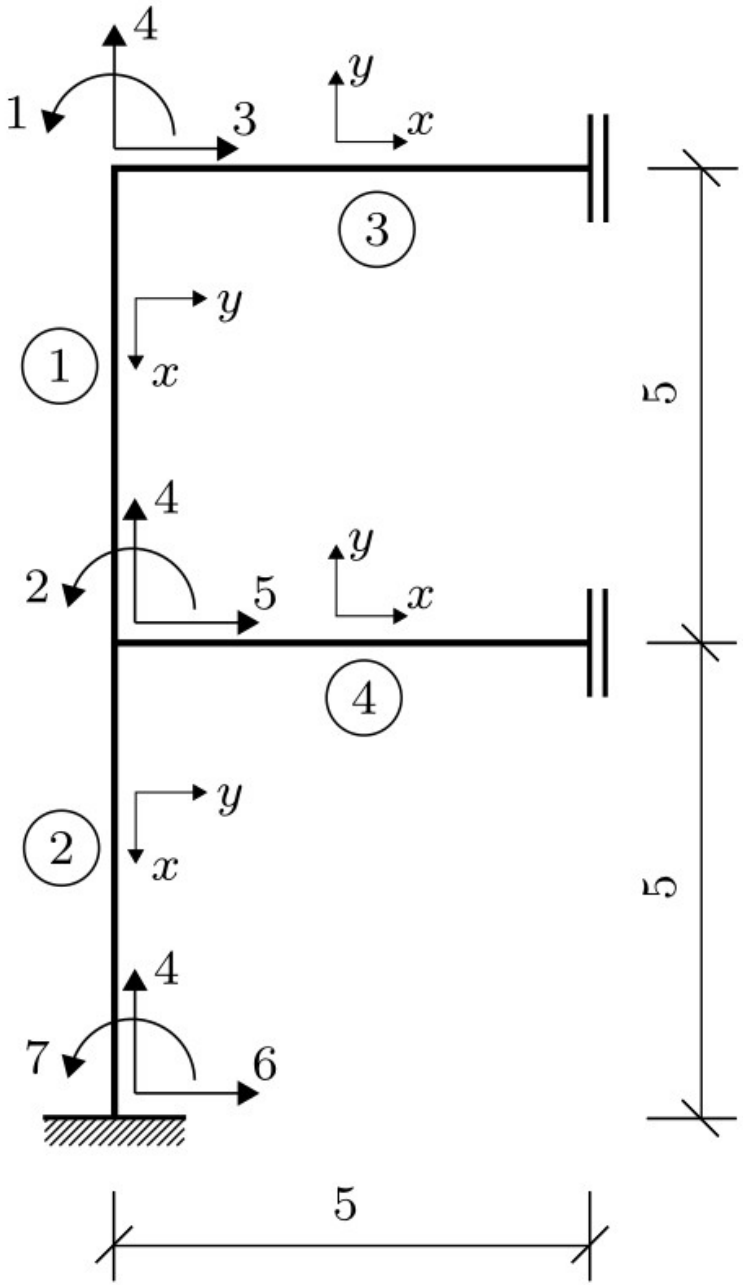
Geometrijske i materijalne karakteristike štapova 1 i 2 su jednake, pa su i elementi matrica krutosti tih štapova jednaki.

Položaj štapova 1 i 2 u sistemu je različit, pa će se kodni brojevi koje vežemo uz štapove 1 i 2 razlikovati.

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^* = \mathrm{EI}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 5 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{array}$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2^* = \mathrm{EI}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 5 & 2 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 5 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{array}$$

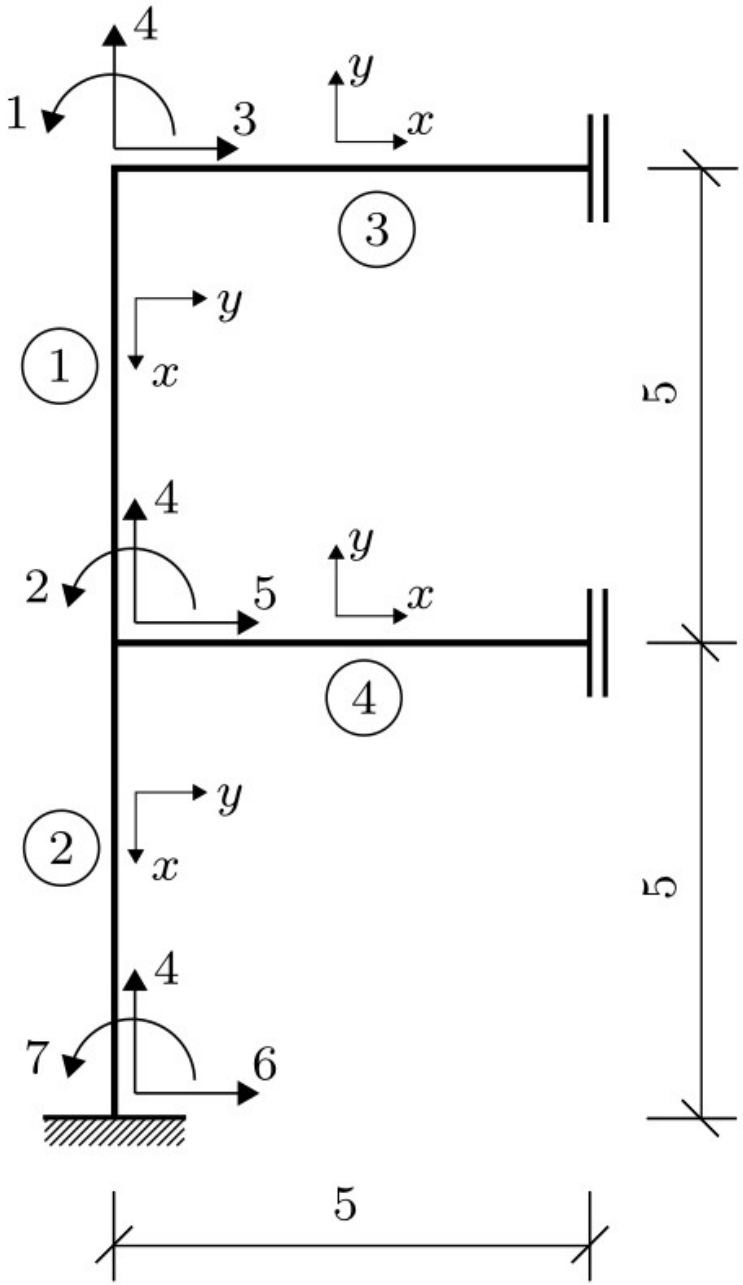
Kodiramo samo veličine u globalnom koordinatnom sistemu



Geometrijske i materijalne karakteristike štapova 3 i 4 su jednake, pa su i elementi matrica krutosti tih štapova jednaki. Kodni brojevi su različiti.

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_3^* = \mathrm{EI} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{array}$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{K}_4^* = \mathrm{EI} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 5 & 4 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{array}$$



$$\mathbf{K}^*_{nn} = \mathrm{EI}\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1.00 & 0.40 \\ 0.40 & 1.80 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Submatrica matrice krutosti

Za proizvod nam je potrebna samo kolona submatrice krutosti uz indeks 7

$$\mathbf{q}^*_n = \boxed{\mathbf{K}^*_{nn}}^{-1}(\mathbf{S}^*_n - \boxed{\mathbf{K}^*_{np}} \times \boxed{\mathbf{q}^*_p})$$

Submatrica matrice krutosti

$$\mathbf{K}^*_{np} = \mathrm{EI}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0.40 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

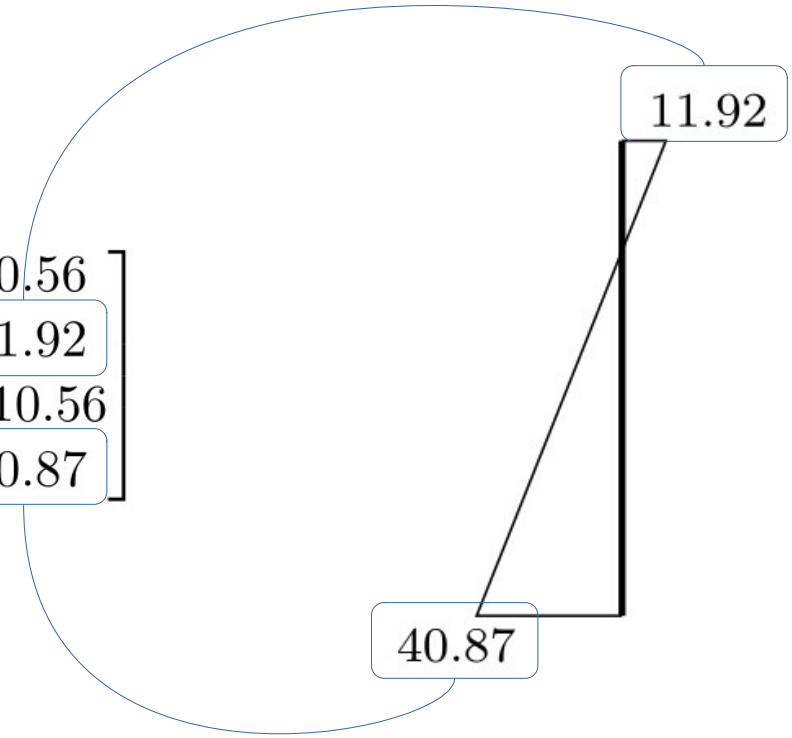
$$\mathbf{q}^*_p = \frac{1}{\mathrm{EI}}\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 58.1776 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \end{array}$$

Nepoznata pomeranja:

$$\mathbf{q}_n^* = \mathbf{K}_{nn}^{*\,-1}(\mathbf{S}_n^* - \mathbf{K}_{np}^* \times \mathbf{q}_p^*) = \frac{1}{\mathrm{EI}} \begin{bmatrix} 5.6759 \\ -14.1897 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

# Momenti na krajevima štapa 2

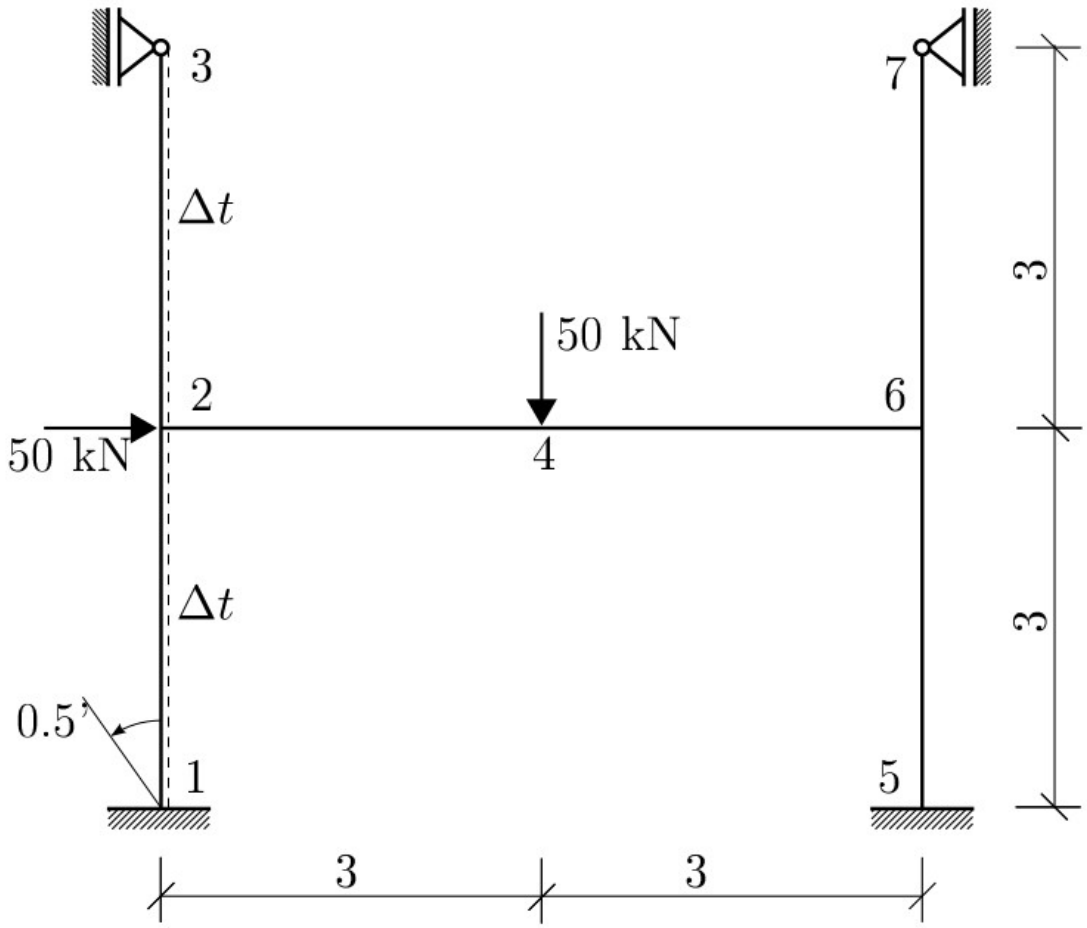
$$\mathbf{q}_2^* = \frac{1}{\mathrm{EI}} \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -14.1897 \\ 0.0000 \\ 58.1776 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \qquad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 10.56 \\ \boxed{11.92} \\ -10.56 \\ \boxed{40.87} \end{bmatrix}$$



# PRIMER 3

Odrediti dijagrame sila u presecima datog nosača usled uticaja koji izazivaju horizontalno pomeranje čvora 4.

Uticaj normalnih sila na deformaciju zanemariti.
Koristiti osobinu simetrije nosača.




$$EI = 10^5\,\mathrm{kNm}^2$$

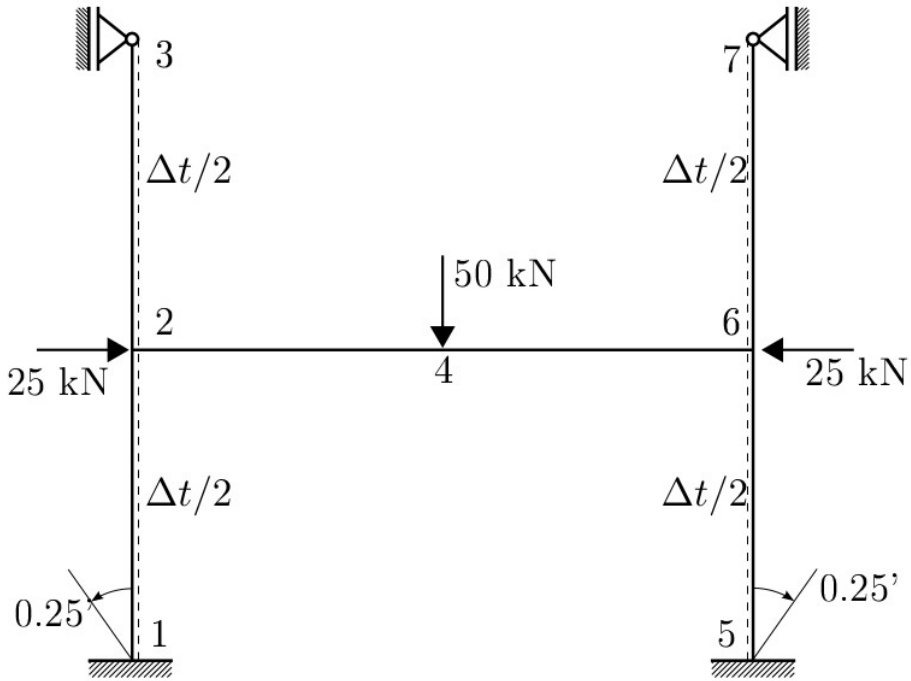
$$I/F = 0$$

$$\Delta t = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$$

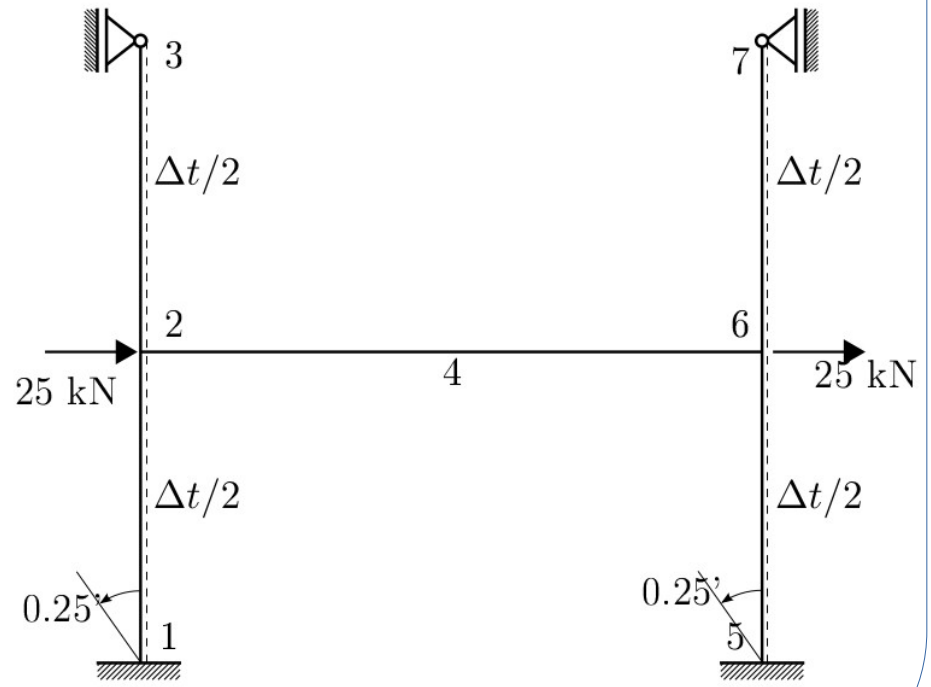
$$\alpha_t = 10^{-5}\,1/^{\circ}\mathrm{C}$$

$$h = 1\,\mathrm{m}$$

Simetričan deo
opterećenja i uticaja




Antisimetričan deo
opterećenja i uticaja

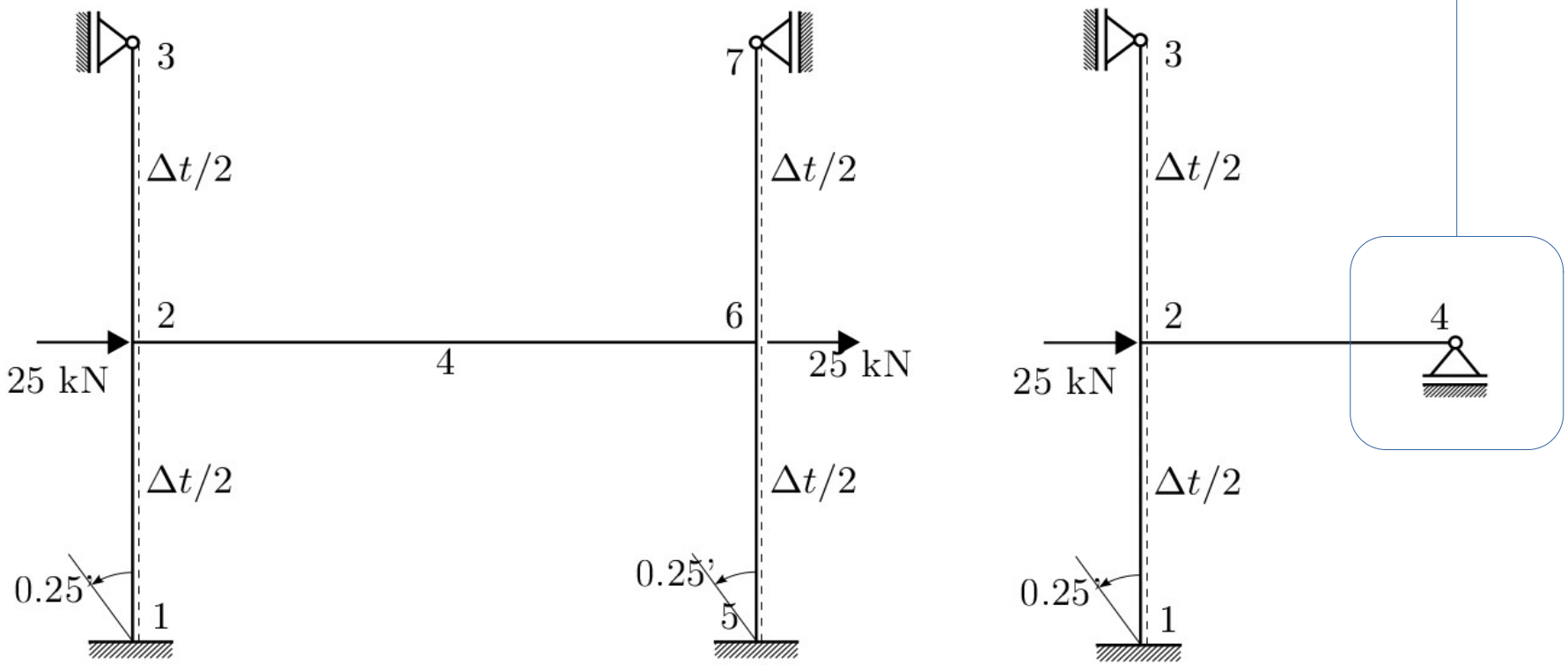



Horizontalno pomeranje čvora 4 postoji samo pri antisimetričnoj deformaciji.

Zato ćemo posmatrati samo antisimetričan deo opterećenja i uticaja.

Posmatramo jednu polovinu nosača.

Na osi simetrije sprečavamo vertikalna pomeranja



Nepoznata pomeranja određujemo pomoću izraza:

$$\mathbf{q}_n^* = \mathbf{K}_{nn}^{*\,-1}\left(\mathbf{S}_n^* - \mathbf{K}_{np}^* \times \mathbf{q}_p^*\right)$$

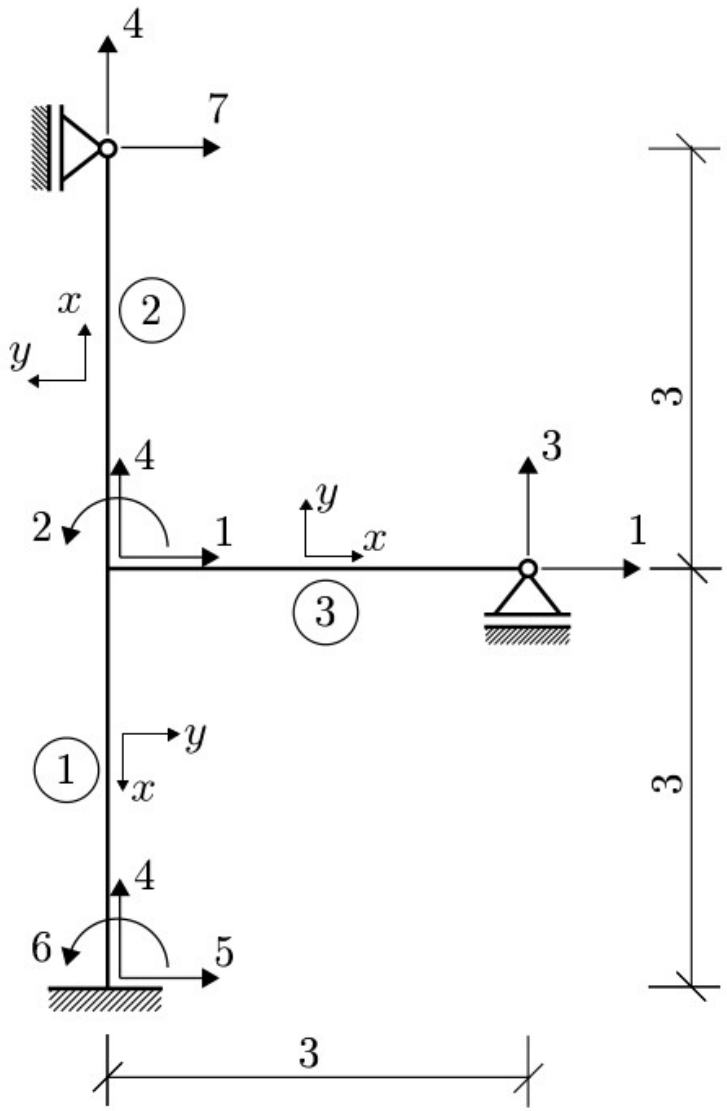
Subvektor vektora pomeranja (nepoznata pomeranja)

Submatrica matrice krutosti

Subvektor vektora čvornih sila

Submatrica matrice krutosti

Subvektor vektora pomeranja (poznata pomeranja)



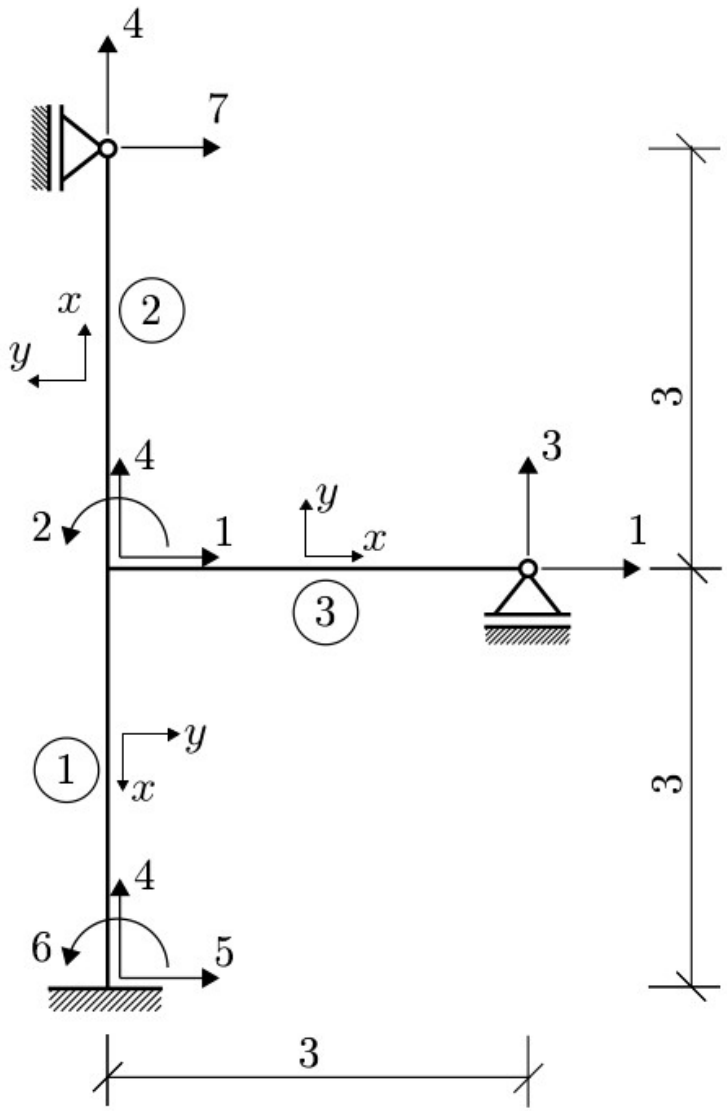

Kategorizacija štapova:
- štap 1: tip k
- štap 2: tip g
- štap 3: tip g

Uticaj normalnih sila na deformaciju je zanemaren.

**Nepoznata pomeranja su pomeranja 1 i 2.**

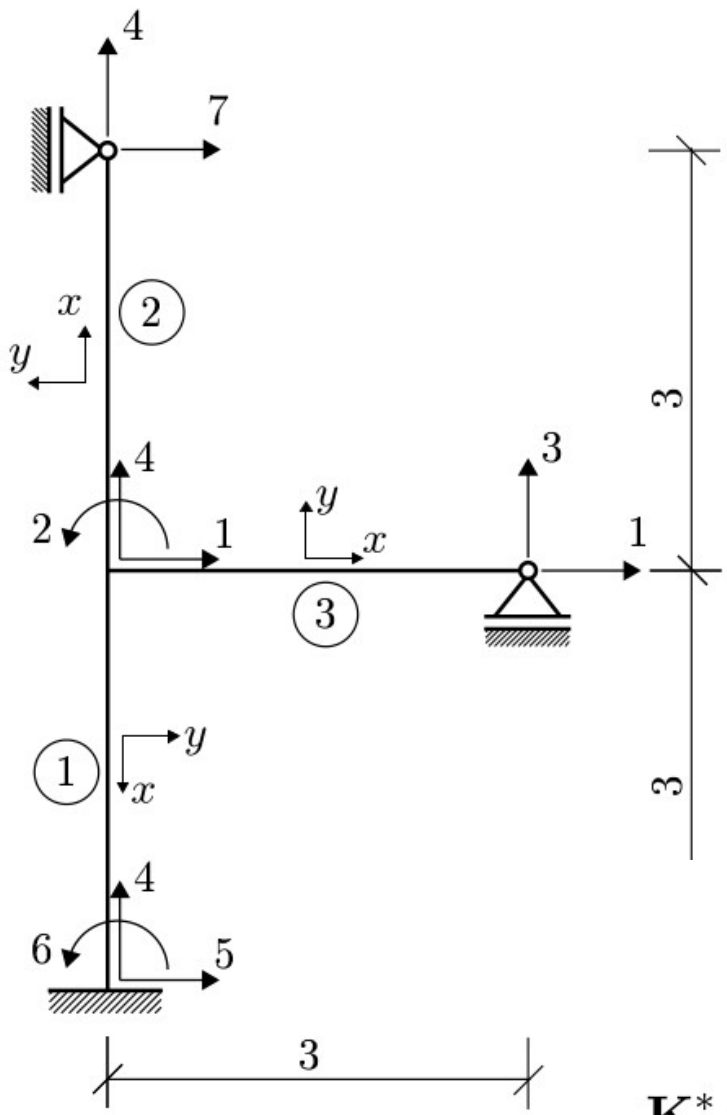
Nosač pripada grupi ortogalnih nosača.

Kada smo u mogućnosti, usvajamo LKS štapa tako da izbegnemo transformaciju veličina iz LKS u GKS.




Štap 1

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^* = \mathrm{EI} \times \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4444 & 0.6667 & -0.4444 & 0.6667 \\ 0.6667 & 1.3333 & -0.6667 & 0.6667 \\ -0.4444 & -0.6667 & 0.4444 & -0.6667 \\ 0.6667 & 0.6667 & -0.6667 & 1.3333 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

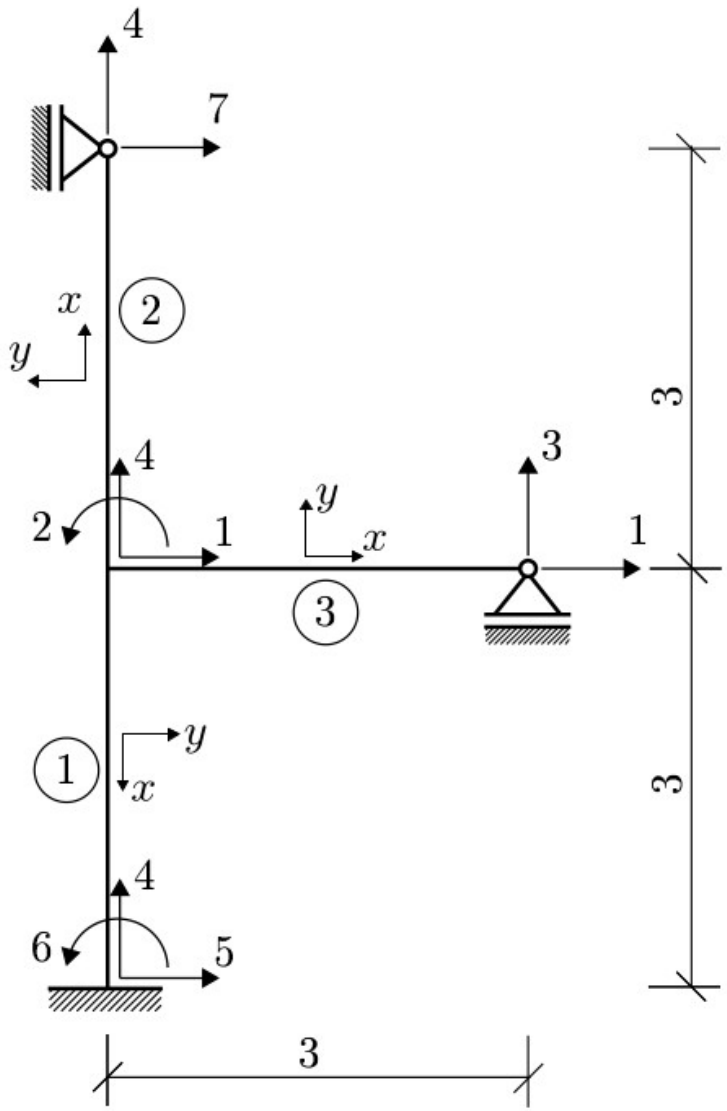



Štap 2

$$\mathbf{K}_2 = \mathrm{EI} \times \begin{bmatrix} 0.1111 & 0.3333 & -0.1111 \\ 0.3333 & 1.0 & -0.3333 \\ -0.1111 & -0.3333 & 0.1111 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2^* = \mathrm{EI} \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 2 & 7 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1111 & 0 & -0.3333 & -0.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 0 & 1.0000 & 0.3333 & 0 \\ -0.1111 & 0 & 0.3333 & 0.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \end{array}$$




Štap 3

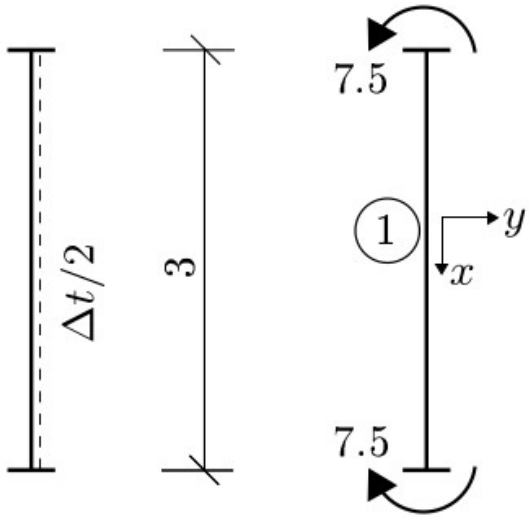
$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_3^* = \mathrm{EI} \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1111 & 0.3333 & -0.1111 \\ 0.3333 & 1.0000 & -0.3333 \\ -0.1111 & -0.3333 & 0.1111 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Submatrice krutosti sistema:

$$\mathbf{K}^*_{nn} = \mathrm{EI} \times \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0.5556 & 0.3333 \\ 0.3333 & 3.3333 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

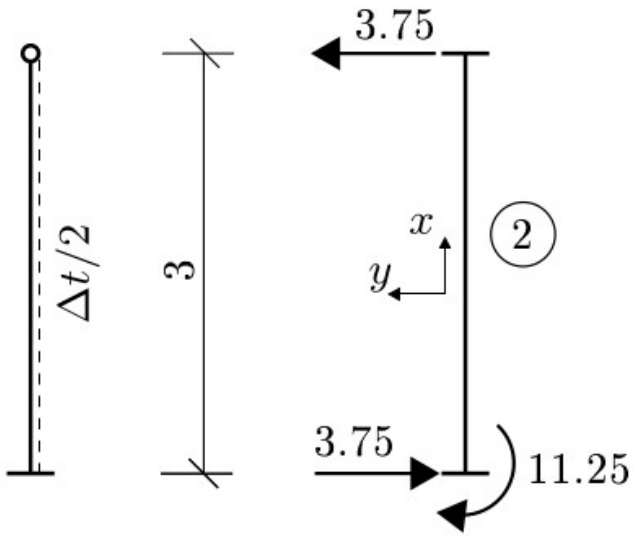
$$\mathbf{K}^*_{np} = \mathrm{EI} \times \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & 0.6667 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0.6667 & \cdots \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Vektor ekvivalentnog opterećenja za štap 1



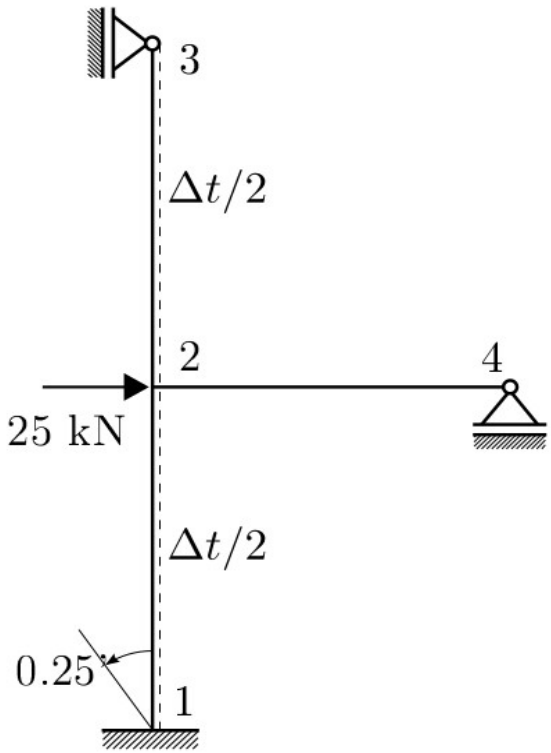

$$\mathbf{Q}_1^* = \mathbf{Q}_1 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 \\ 7.5 \\ 0 \\ -7.5 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

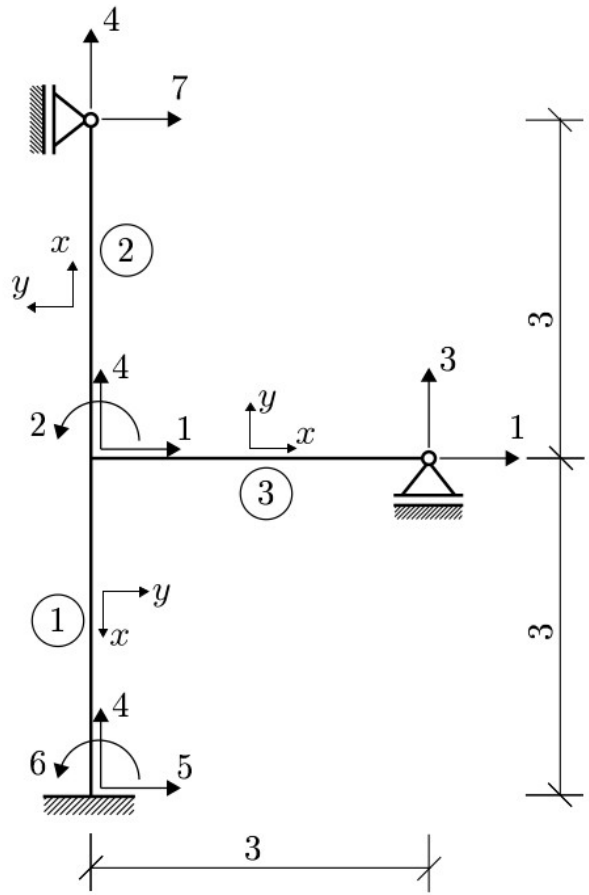
Vektor ekvivalentnog opterećenja za štap 2




$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} -3.75 \\ -11.25 \\ 3.75 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_2^* = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3.75 \\ 0 \\ -11.25 \\ -3.75 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \end{array}$$

Štap 3 je neopterećen.




$$\mathbf{Q}_1^* = \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.5 \\ 0 \\ -7.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\mathbf{Q}_2^* = \begin{bmatrix} 3.75 \\ 0 \\ -11.25 \\ -3.75 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\mathbf{S}_n^* = \mathbf{Q}_n^* + \mathbf{P}_n^* = \begin{bmatrix} 3.75 \\ -3.75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28.75 \\ -3.75 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{S}_n^* = \mathbf{Q}_n^* + \mathbf{P}_n^* = \begin{bmatrix} 3.75 \\ -3.75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28.75 \\ -3.75 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

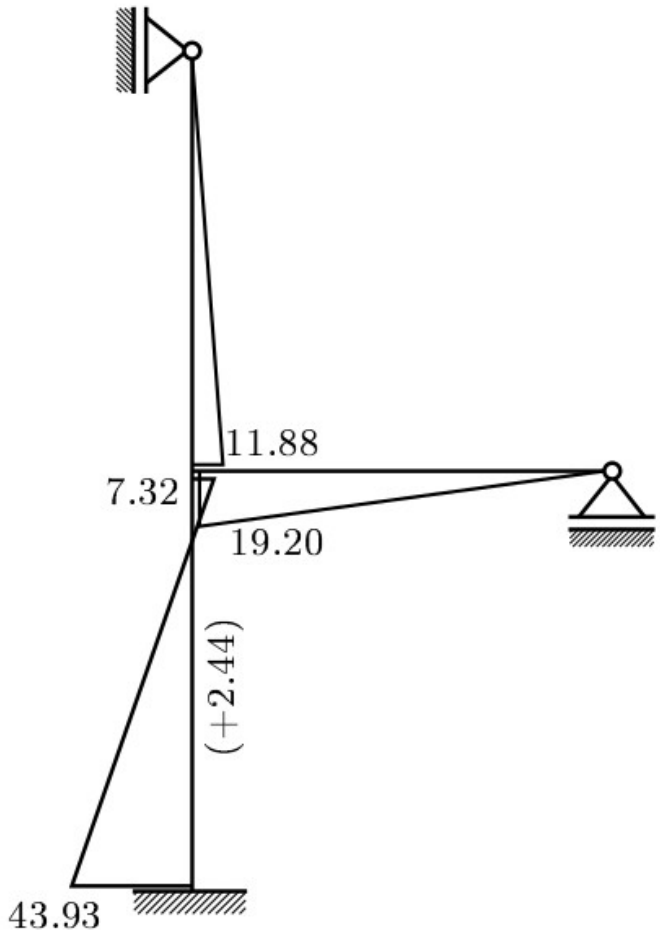
$$\mathbf{K}_{nn}^* = \mathrm{EI} \times \begin{matrix} 1 & 2 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.5556 & 0.3333 \\ 0.3333 & 3.3333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_{np}^* = \mathrm{EI} \times \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & 0.6667 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0.6667 & \cdots \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{q}_p^* = \frac{1}{\mathrm{EI}} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7.2722 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$\boxed{\mathbf{q}_n^* = \mathbf{K}_{nn}^{*\,-1}(\mathbf{S}_n^* - \mathbf{K}_{np}^* \times \mathbf{q}_p^*) = \begin{bmatrix} 47.4160 \\ -7.3210 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}}$$

# Sile na krajevima štapova



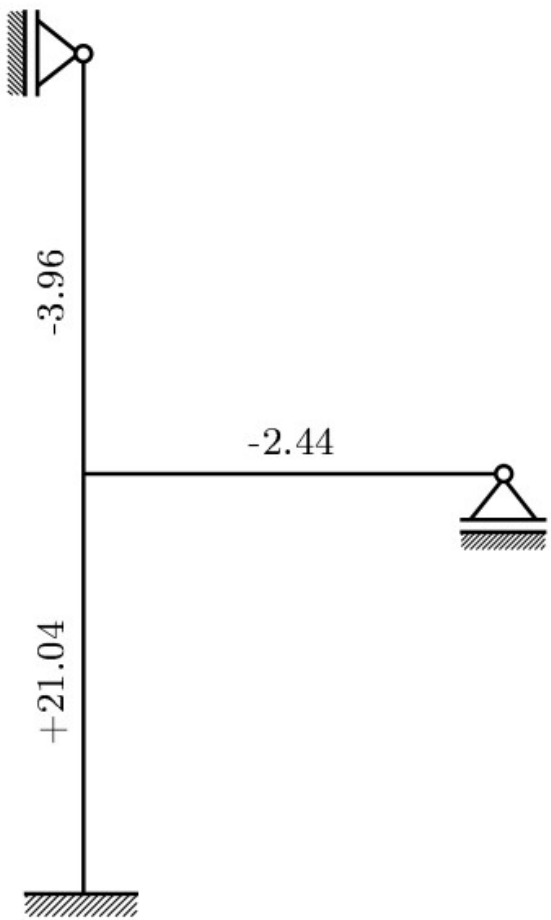

M (N)

$$\mathbf{q}_1^* \frac{1}{\mathrm{EI}} = \begin{bmatrix} 47.4160 \\ -7.3210 \\ 0 \\ 7.2722 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \qquad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 21.04 \\ 19.20 \\ -21.04 \\ 43.93 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_2^* \frac{1}{\mathrm{EI}} = \begin{bmatrix} 47.4160 \\ 0 \\ -7.3210 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \end{matrix} \qquad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -3.96 \\ -11.88 \\ 0.00 \\ 3.96 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_3^* \frac{1}{\mathrm{EI}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7.3210 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \qquad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} -2.44 \\ -7.32 \\ 2.44 \end{bmatrix}$$

# Sile na krajevima štapova




T

$$\mathbf{q}_1^* \frac{1}{\mathrm{EI}} = \begin{bmatrix} 47.4160 \\ -7.3210 \\ 0 \\ 7.2722 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \qquad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 21.04 \\ 19.20 \\ -21.04 \\ 43.93 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_2^* \frac{1}{\mathrm{EI}} = \begin{bmatrix} 47.4160 \\ 0 \\ -7.3210 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \end{matrix} \qquad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -3.96 \\ -11.88 \\ 0.00 \\ 3.96 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_3^* \frac{1}{\mathrm{EI}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7.3210 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \qquad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} -2.44 \\ -7.32 \\ 2.44 \end{bmatrix}$$