ТЕОРИЈА КОНСТРУКЦИЈА – Б2Х2ТК

ПРЕДАВАЊЕ 4 (02.03.2022.)

www.grf.bg.ac.rs

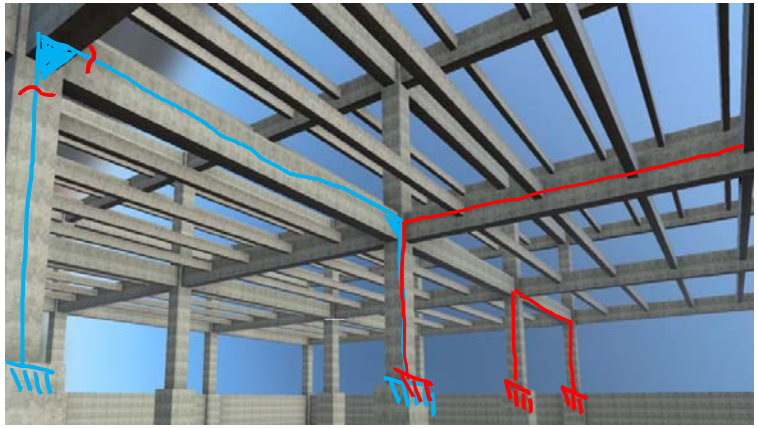
Студијски програм: ГРАЂЕВИНАРСТВО
Модул: ХИДРОТЕХНИКА И ВОДНО-ЕКОЛОШКО ИНЖЕЊЕРСТВО
Година / семестар: 2. година / 4. семестар
Школска година: 2021/22.

Наставници: в. проф. Витомир Рацић, доц. др Марко Радишић, доц. др Невенка Коларевић

Грађевински факултет Универзитета у Београду - Катедра за техничку механику и теорију конструкција

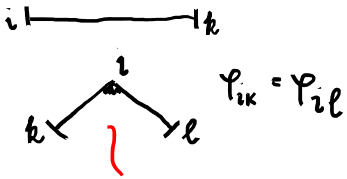
Сва ауторска права аутора презентације и/или видео снимака су заштићена. Снимак или презентација се могу користити само за наставу на даљину студента Грађевинског факултета Универзитета у Београду у школској 2021/2022 и не могу се користити за друге сврхе без писмене сагласности аутора материјала.

2. РАВНИ ЛИНИЈСКИ НОСАЧИ



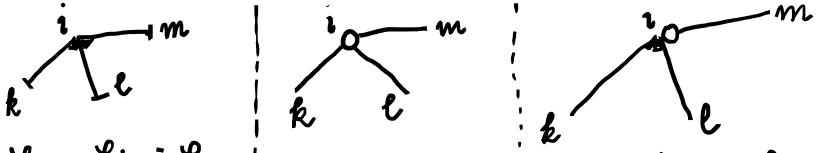
2.1. Елементи носача

УНУТРАШЊИ:



СПРЕЧАВА РЕЛ. ОБРТАЊА

Везе између штапова

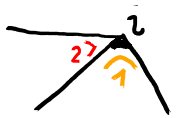


$\varphi_{ik} = \varphi_{il} = \varphi_{im}$ КРУТЕ

$\varphi_{ik} \neq \varphi_{il} \neq \varphi_{im}$ ЗГЛАВКАСТЕ

$\varphi_{ik} = \varphi_{il} \neq \varphi_{im}$ МЕШОВИТЕ

КРУТИ УГАО!

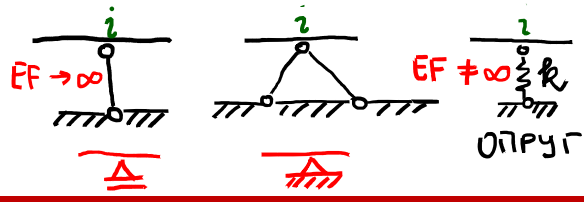


n ШТАПОВА

n-1 КРУТИ УГАО

СПОЉАШЊИ ЕЛЕМЕНТИ:

СПРЕЧАВАЈУ abs ПОМЕРАЊА И ОБРТАЊА



2. РАВНИ ЛИНИЈСКИ НОСАЧИ

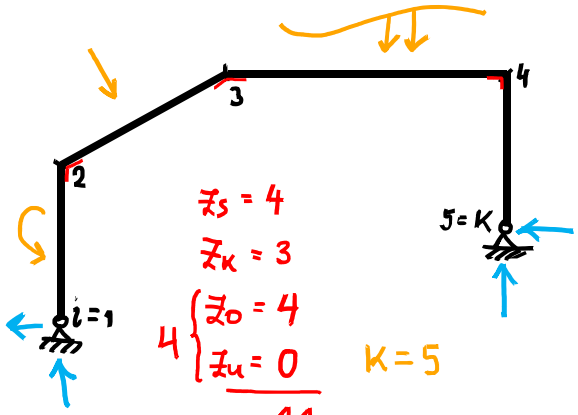
2.2. Непознате величине носача

У { z_s = БРОЈ ШТАПОВА
z_k = -II- КРУТИХ УГЛОВА

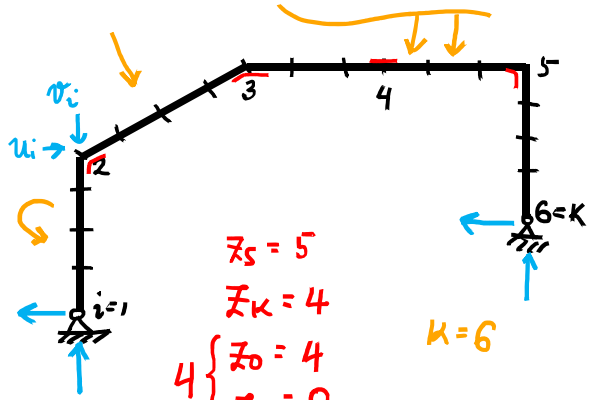
С { z_o = -II- ОСЛОНАЦА
z_u = -II- УКЉЕШТЕЊА

} z

К = БРОЈ ЧВОРОВА

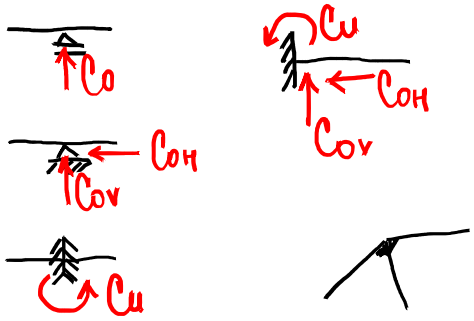


$z_s = 4$
$z_k = 3$
4 { $z_o = 4$, $z_u = 0$ }
11
К = 5



$z_s = 5$
$z_k = 4$
4 { $z_o = 4$, $z_u = 0$ }
13
К = 6

- АКТИВНЕ СИЛЕ
- РЕАКТИВНЕ СИЛЕ



Број статички непознатих величина у носачу ⟷ **Укупан број непознатих померања**

C_o	z_o
C_u	z_u
S_{ik}	z_s
M_i, M_k	$z_k + m$

z

S_{ik}, M_i, M_k

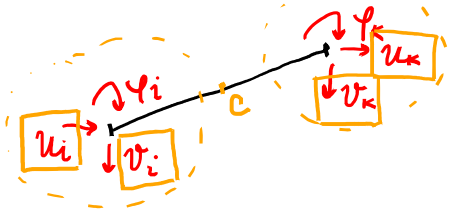
БРОЈ ГРУПА КРУТО ВЕЗАНИХ ШТАПОВА

$m = 2$
$z_k = 3$

$$\underbrace{z_o + z_u + z_s + z_k}_{z} + m$$

УКУПНО

$$z + m + 2K$$



БИРАМО 4 ПОМЕРАЊА

$$u_i, v_i \ \ldots\ 2K$$

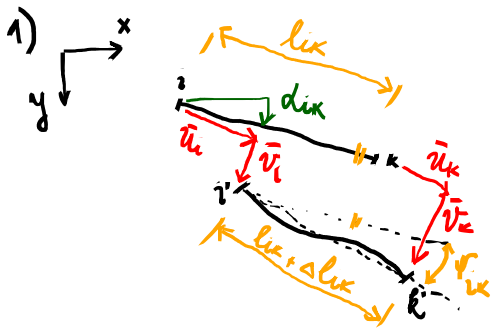
2. РАВНИ ЛИНИЈСКИ НОСАЧИ

$\boxed{Z + m + 2K}$ → ПОСТОЈЕ 2 ГРУПЕ Ј-НА ИЗ КОЈИХ ОДРЕЂУЈЕМО НЕПОЗНАТЕ

2.3. Основне једначине носача

- 2.3.1. Услови **компатибилности померања** чворова носача

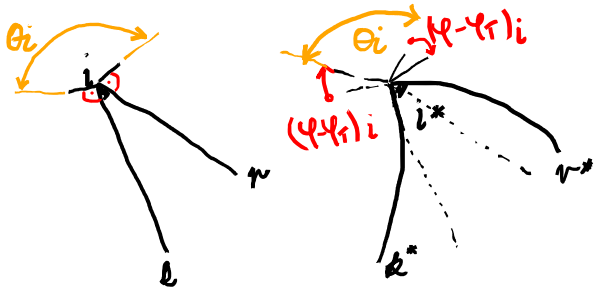
1)



$$\boxed{\Delta l_{ik} = \bar{u}_k - \bar{u}_i = F_1(i,k) \quad u_i, v_i \ldots \quad \ldots\ldots Z_s}$$

У.К. ПОМЕРАЊА КРАЈЕВА ШТАПА

2) У.К. ОБРТАЊА ПРЕСЕКА КРУТО ВЕЗАНИХ У 1 ЧВОРУ



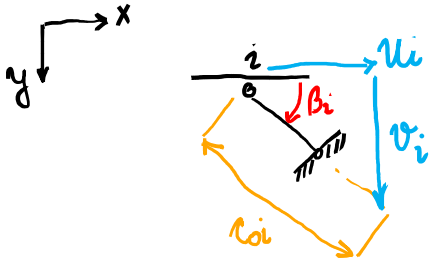
$$(\varphi-\varphi_T)_i = \tau_{ik} + \psi_{ik}$$

$$(\varphi-\varphi_T)_i = \tau_{ir} + \psi_{ir}$$

$$\boxed{\tau_{ik} - \tau_{ir} = \psi_{ir} - \psi_{ik} \quad \ldots\ldots Z_K}$$

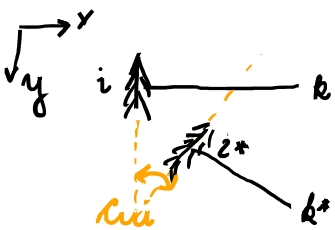
$F_2(i,k)$

3) У.К. ПОМЕРАЊА ОСЛОНАЦА



$$\boxed{u_i \cos\beta_i + v_i \sin\beta_i = c_{oi} \quad \ldots Z_o}$$

4)



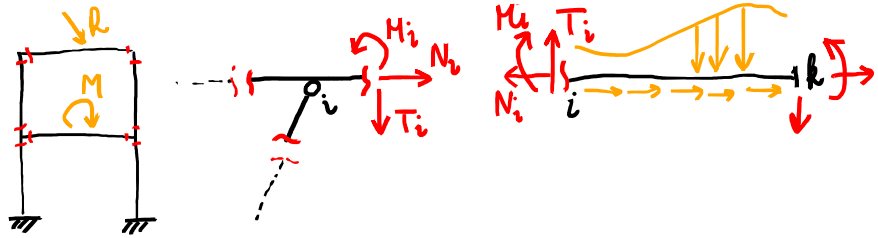
$$\boxed{c_{ui} = (\varphi-\varphi_T)_i = \tau_{ik} + \psi_{ik} \quad \ldots\ldots Z_u}$$

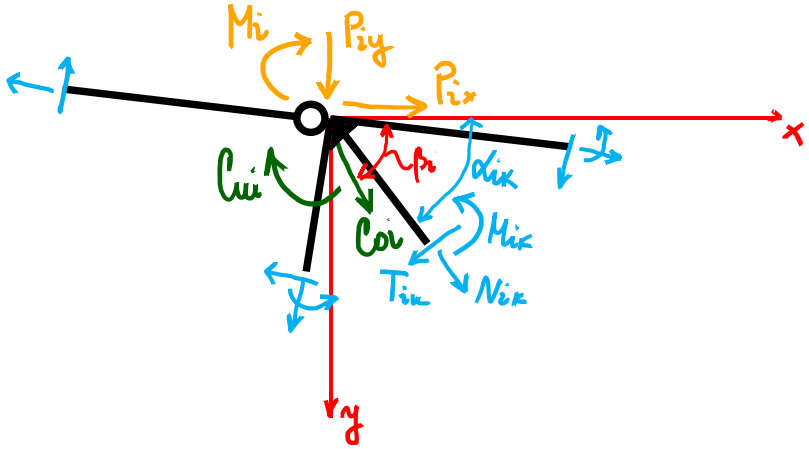
УКУПАН БРОЈ УСЛОВА КОМПАТИБИЛНОСТИ

$u_i, v_i, u_k, v_k \ldots 2K$ ← $Z_o + Z_u + Z_s + Z_K = Z$

2. РАВНИ ЛИНИЈСКИ НОСАЧИ

- **2.3. Основне једначине носача**
  - 2.3.2 Услови **равнотеже** чворова носача





$$\sum_k N_{ik}\cos\alpha_{ik} - \sum_k T_{ik}\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cos\beta_i + P_{ix} = 0$$

$$\sum_k N_{ik}\sin\alpha_{ik} + \sum_k T_{ik}\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + P_{iy} = 0$$

$$\sum \lambda_{ik} M_{ik} + C_{ui} + M_i = 0 \qquad (\lambda_{ik} = \pm 1)$$

$$\left\{\begin{aligned} N_{ik} &= \underline{N_{ik,0}} + S_{ik} \\ T_{ik} &= \underline{T_{ik,0}} + \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}} \\ M_{ik} &= M_i \end{aligned}\right.$$

$$\sum_k S_{ik}\cos\alpha_{ik} - \sum_k \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cos\beta_i + H_i = 0 \quad \ldots k$$

$$\sum_k S_{ik}\sin\alpha_{ik} + \sum_k \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + V_i = 0 \quad \ldots k$$

$$\sum \lambda_{ik} M_{ik} + C_{ui} + M_i = 0 \quad \ldots m$$

$$H_i = P_{ix} + \sum N_{ik,0}\cos\alpha_{ik} - \sum T_{ik,0}\sin\alpha_{ik}$$

$$V_i = P_{iy} + \sum N_{ik,0}\sin\alpha_{ik} + \sum T_{ik,0}\cos\alpha_{ik}$$

$2k + m$ услова равнотеже

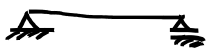
2. РАВНИ ЛИНИЈСКИ НОСАЧИ

$\boxed{z_o + z_u + z_s + z_k} + \boxed{2k + m} = z + 2k + m$

НЕПОЗНАТЕ: $\underbrace{u_i, v_i}_{2k}$, $\underbrace{S_{ik}}_{z_s}$, $\underbrace{M_{ik}, M_{ki}}_{z_k + m}$, $\underbrace{C_{oi}}_{z_o}$, $\underbrace{C_{ui}}_{z_u}$

БРОЈ НЕПОЗНАТИХ = БРОЈ ЈЕДНАЧИНА

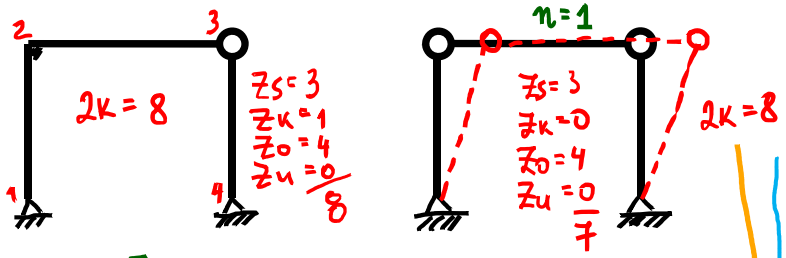
ПРОБЛЕМ ЈЕ МОГУЋЕ РЕШИТИ!



$z_o = 3$, $z_u = 0$
$z_s = 1$, $z_k = 0$
$2k = 4$, $m = 0$
8

2.4. Класификација носача

- 2.4.1. Кинематичка класификација



z

а) $z_o + z_u + z_s + z_k > 2k$ $\quad \boxed{z - 2k}$ СУВИШНИ ЕЛ.

КИНЕМАТИЧКИ ВИШЕСТРУКО СТАБИЛАН

б) $z_o + z_u + z_s + z_k = 2k$ $\quad z - 2k = 0$

ПРОСТО СТАБИЛАН

в) $z_o + z_u + z_s + z_k < 2k$ $\quad 2k - z = n$

ЛАБИЛАН БРОЈ СТЕПЕНИ С.

Кинематички критеријум

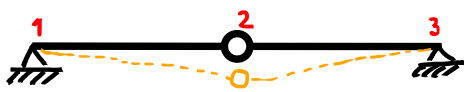
БРОЈ НЕП. ПОМЕРАЊА . . . . . $2k$

БРОЈ УСЛОВА КОМПАТИБИЛНОСТИ . . . $z_s + z_k + z_o + z_u$

Неправилан распоред елемената - примери

$z_o = 4$, $z_u = 0$, $z_s = 2$, $z_k = 0$

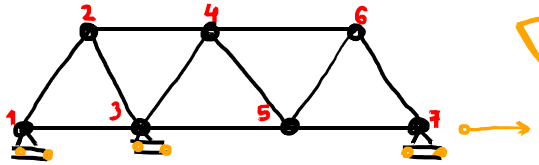
$2k = 6$ $\quad 6$



!

$z_o = 3$, $z_u = 0$, $z_k = 0$, $z_s = 11$

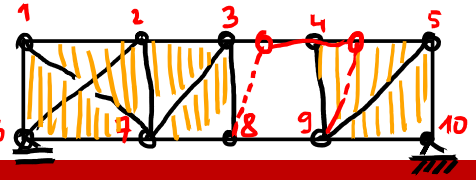
$2k = 14$ $\quad 14$



!

$z_o = 3$, $z_u = 0$, $z_s = 17$, $z_k = 0$

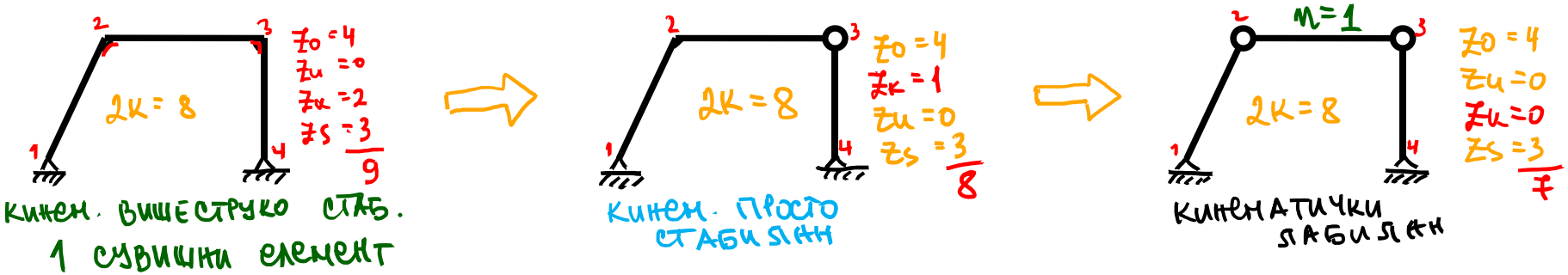
20



!

$2k = 20$

2. РАВНИ ЛИНИЈСКИ НОСАЧИ



2. РАВНИ ЛИНИЈСКИ НОСАЧИ

- **2.4. Класификација носача**
  - 2.4.2. Статичка класификација

C_{oi}	Z_o	$\Sigma H = 0$	k
C_{ui}	Z_u	$\Sigma V = 0$	k
S_{ik}	Z_s	$\Sigma M = 0$	m
M_{ik}, M_{ki}	$Z_k + m$		
	$Z + \cancel{m}$		$2k + \cancel{m}$

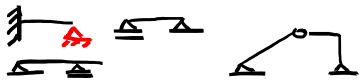
Z

СУВИШНИ ЕЛЕМЕНТИ

$m = (Z_o + Z_u + Z_s + Z_k) - 2k \rightarrow$ СТЕПЕН (БРОЈ) СТАТИЧКЕ НЕОДРЕЂЕНОСТИ

а) $Z_o + Z_u + Z_s + Z_k > 2k$ СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕН

б) —||— $= 2k$ —||— ОДРЕЂЕН



в) —||— $< 2k$ —||— ПРЕОДРЕЂЕН

$\rightarrow 2k - (Z_o + Z_u + Z_s + Z_k)$ БРОЈ НЕДОСТАЈУЋИХ ЕЛЕМ.

- СИСТЕМ ШТАПОВА КОЈИ У ГРАНИЦАМА НОСИВОСТИ МАТЕРИЈАЛА ПРИХВАТА ОПТ. И ПРЕНОСИ ГА ДО ОСЛОНАЦА.

СТАТ. НЕОДРЕЂЕН $\rightarrow$ КИНЕМАТИЧКИ ВИШЕСТРУКО СТАБ.

—||— ОДРЕЂЕН $\rightarrow$ —||— ПРОСТО —||—

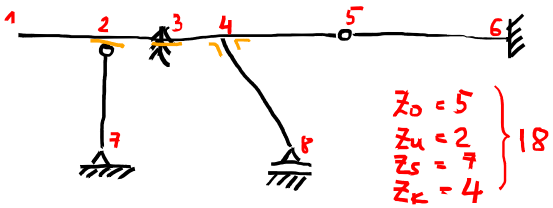
—||— ПРЕОДРЕЂЕН $\rightarrow$ —||— ЛАБИЛАН $\longrightarrow$ НЕ МОЖЕ БИТИ НОСАЧ КОНСТРУКЦИЈЕ!

СНН $\rightarrow$ ∞ РАВНОТЕЖНИХ СТАЊА $\rightarrow$ 1 СТВАРНО РАВН. СТАЊЕ

СОН $\rightarrow$ 1 МОГУЋЕ РАВН. СТАЊЕ $\rightarrow$ СТВАРНО —||— —||—

2. РАВНИ ЛИНИЈСКИ НОСАЧИ

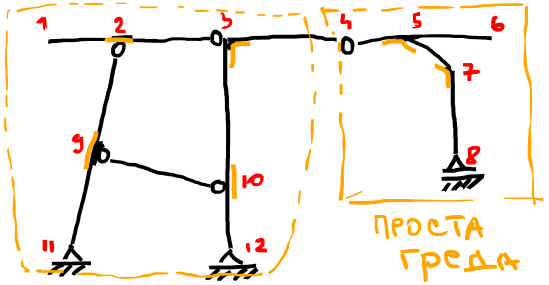
- **2.4. Класификација носача - ПРИМЕРИ**



$2k = 16$

$z_o = 5$, $z_u = 2$, $z_s = 7$, $z_k = 4$ } 18

Носач је 2х статички неодређен.



$z_o = 5$

$z_u = 0$

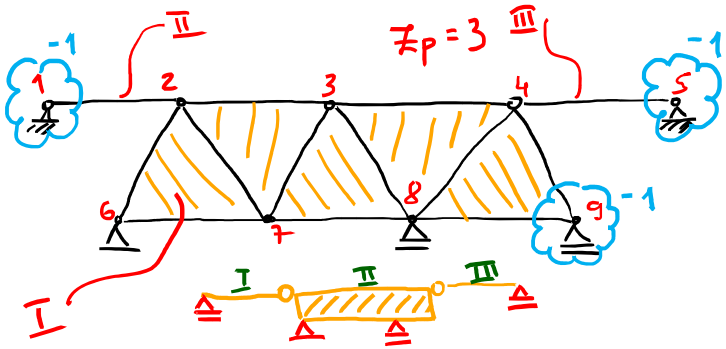
$z_s = 12$

$z_k = 7$

24

$2k = 24$

С. О. Н.



$z_o = 8$

$z_u = 0$

$z_s = 13$

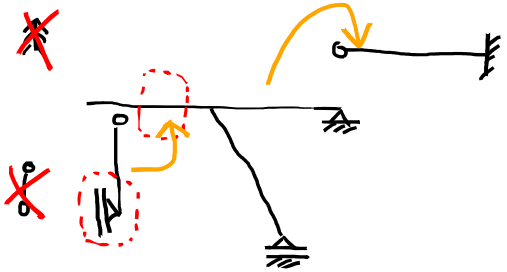
$z_k = 0$

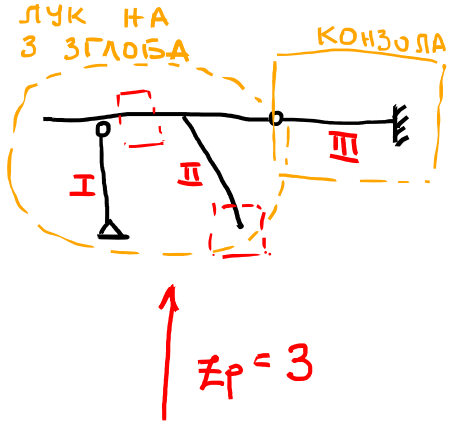
21

$2k = 18$

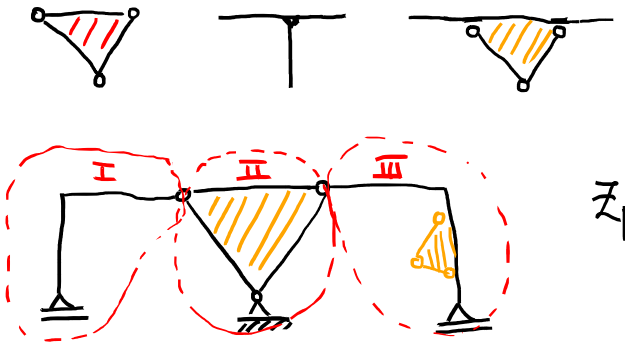
$n = 3$

С.Н.Н.





- 2.4.3. Класификација система крутих плоча



2. РАВНИ ЛИНИЈСКИ НОСАЧИ

- **2.4. Класификација носача**
  - 2.4.3. Класификација система крутих плоча

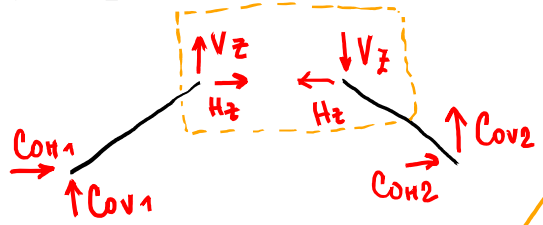
Критеријум за статичку одређеност

СТАТ. НЕПОЗНАТЕ

C_o . . . . . z_o

C_u . . . . . z_u

H_z, V_z . . . . $2 \cdot z_z$



$$\boxed{z_o + z_u + 2 \cdot z_z}$$

УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ : $\boxed{3 \cdot z_p}$

$3 z_p = z_o + z_u + 2 \cdot z_z$ = СТАТ. одређен

$3 z_p <$ -||- = -||- неодређен

$3 z_p >$ -||- -||- преодређен

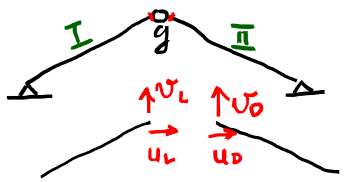
Критеријум за кинематичку стабилност

- БРОЈ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ $3 z_p$
- елементи који укидају степене слободе ⇒ ослонци, укљештења, зглобови

1 2 1

$$\boxed{3 \cdot z_p = z_o + z_u + 2 \cdot z_z}$$

$3 \cdot z_p = 6$ $z_o = 4$ $2 \cdot z_z = 2$



-o- $u_L = u_D$; $v_L = v_D$

$$\boxed{3 z_p < z_o + z_u + 2 \cdot z_z}$$

КИНЕМАТИЧКИ ВИШЕСТРУКО СТАБИЛАН

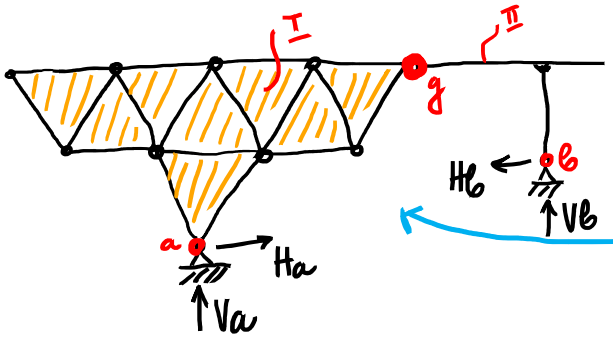
$$\boxed{3 z_p > z_o + z_u + 2 \cdot z_z}$$

-||- СЛАБИЛАН !

$n = 3 \cdot z_p - (z_o + z_u + 2 z_z)$

2. РАВНИ ЛИНИЈСКИ НОСАЧИ

Решеткасти носачи



$z_p = 2$

$z_o = 4$

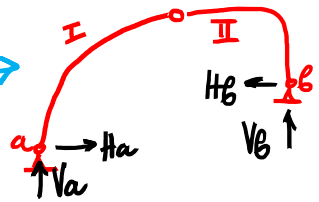
$z_u = 0$

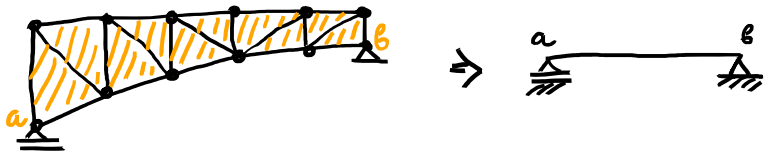
$z_z = 1$

$3 \cdot z_p = 6$

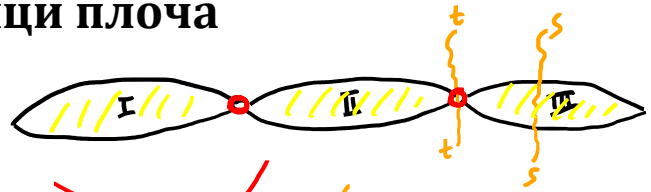
$z_o + z_u + 2\, z_z = 6$

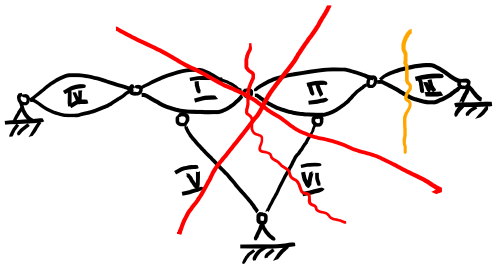
кинем. просто стаб.
(статички одређен)





Ланци плоча





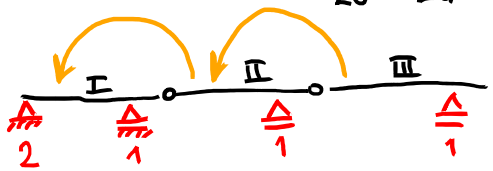
$z_z = z_p - 1$

$z_o + z_u + 2 \cdot z_z = 3 z_p$

$z_o + z_u + 2 \cdot (z_p - 1) = 3 z_p \rightarrow z_o + z_u + 2 z_p - 2 = 3 z_p$

$$\boxed{z_o + z_u = z_p + 2}$$

за 2 везе од z_p!

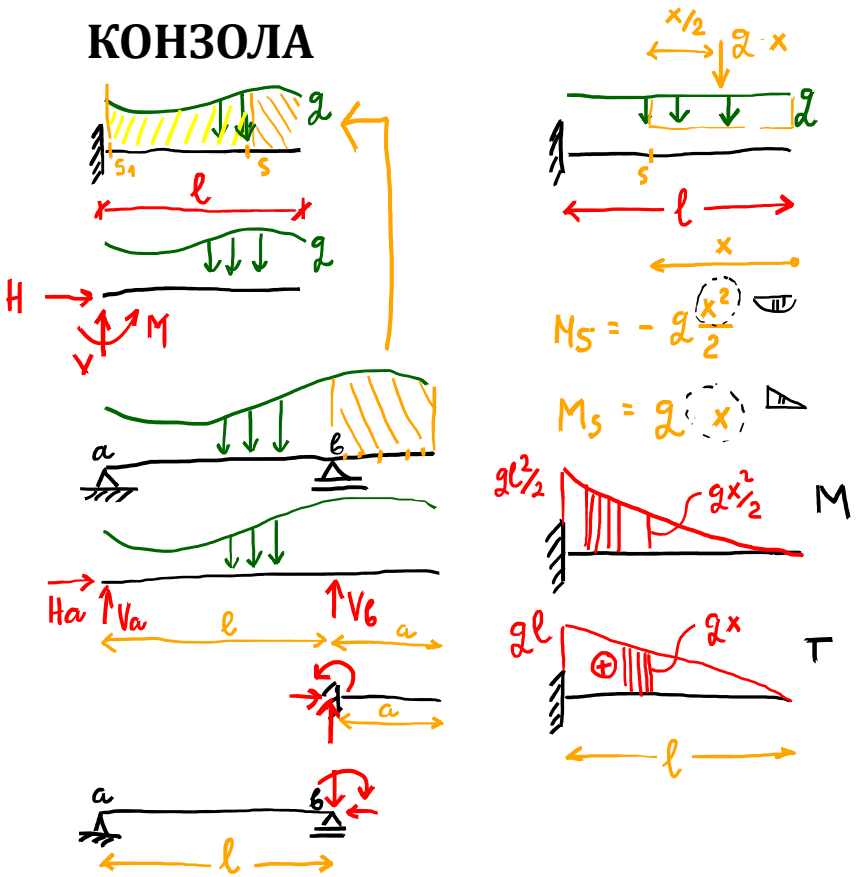


$z_o = 5$

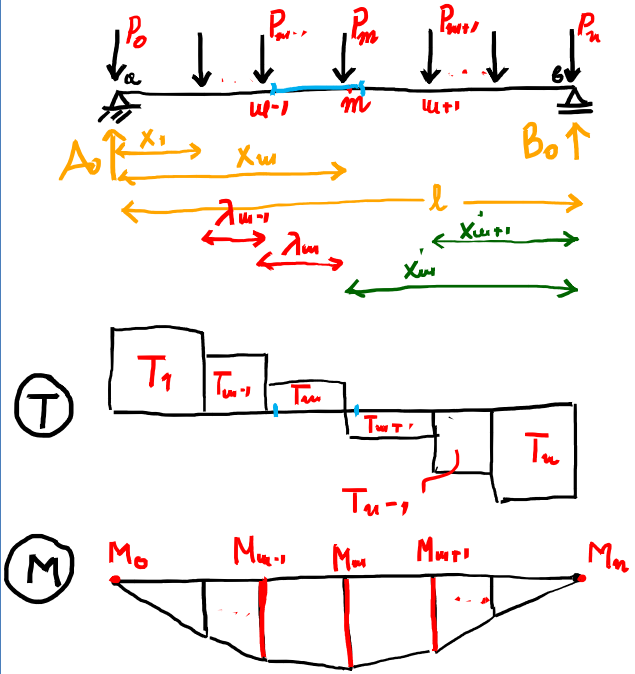
3. ПУНИ НОСАЧИ

- **3.1. Носачи који се састоје из 1 кинематички круте плоче**

КОНЗОЛА



- 3.1.1. Нумерички поступак одређивања сила у пресецима просте греде оптерећене концентрисаним силама

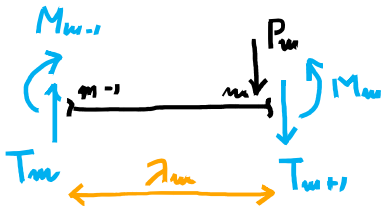


$$\sum M_a = 0: \quad \sum_{m=0}^{n} P_m x_m - B_0 \cdot l = 0$$

$$\boxed{B_0 = \frac{1}{l} \sum_{m=0}^{n} P_m x_m}$$

$$\sum M_b = 0: \quad \sum_{m=0}^{n} P_m x'_m - A_0 \cdot l = 0$$

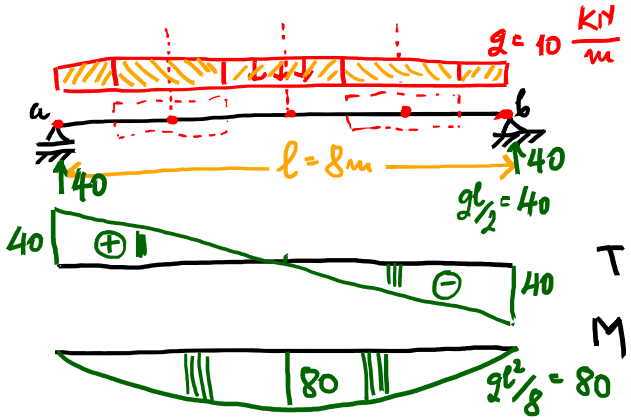
$$\boxed{A_0 = \frac{1}{l} \sum_{m=0}^{n} P_m x'_m} \quad \left(= \sum_{m=0}^{n} P_m - B_0\right)$$

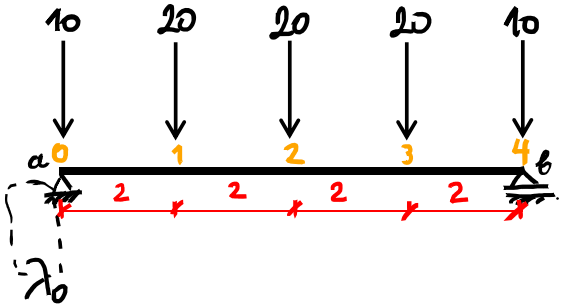


$$\boxed{\begin{aligned} T_{m+1} &= T_m - P_m \\ M_m &= M_{m-1} + T_m \lambda_m \end{aligned}}$$

3. ПУНИ НОСАЧИ

- **3.1. Носачи који се састоје из 1 кинематички круте плоче**
  - 3.1.1. Нумерички поступак одређивања сила у пресецима просте греде оптерећене концентрисаним силама

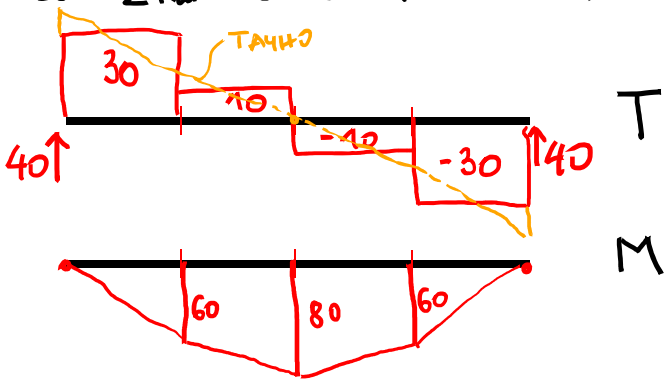




m	λ_m	x'_m	P_m	$P_m x'_m$	T_m	$T_m \lambda_m$	M_m
0	—	8	10	80	40	—	0
1	2	6	20	120	30	60	60
2	2	4	20	80	10	20	80
3	2	2	20	40	-10	-20	60
4	2	0	10	0	-30	-60	0
		Σ	80	320	-40		

$A_0 = \Sigma P_m x'_m \cdot 1/l = 320/8 = 40\ kN$

$B_0 = \Sigma P_m - A_0 = 80 - 40 = 40\ kN$

$T_1 = T_0 - P_0$

$M_1 = M_0 + T_1 \lambda_1$