Matrična analiza

Teorija konstrukcija – HVE

Predavanja: 12. i 13. sedmica

Ova prezentacija sačinjena je od slajdova koje je obezbedila prof. Mira Petronijević.

Uz prezentaciju preporučujemo da pročitate i istoimeno poglavlje u knjizi
prof. Mire Petronijević "Teorija konstrukcija 1"

10. Matrična analiza konstrukcija

10.1 Uvod

Istorijski razvoj

1930 Prvi put primenjena matrična analiza u rešavanju problema aeroelastičnosti, Collar i Duncan,avio-industrija, GB

1934 Prva knjiga Collar, Duncan i Frazer

1955 Argyris, metoda sila i metoda deformacije

1959 Tyrner, Direct Stiffness Method

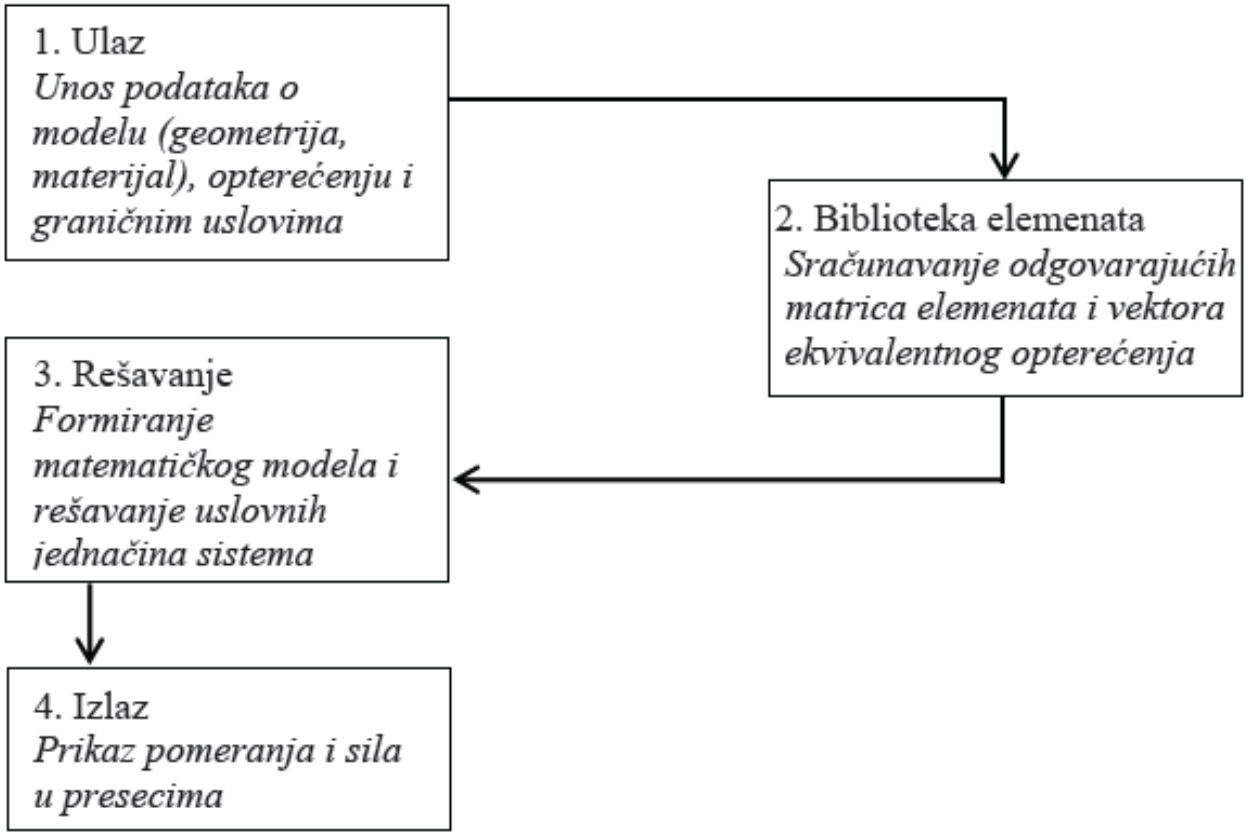
1964 Wilson, metoda konačnih elemenata (MKE)

1964 Gallagher, Irons, Martin, Clough, Zienkiewicz

1977 Sekulović

- *Od 1960-te godine sa ekspanzijom računara, MATRIČNA ANALIZA KONSTRUKCIJA (metoda deformacije) se sve više primenjuje u analizi linijskih nosača.*
- *Metoda je u literaturi poznata i kao DIRECT STIFFNESS METHOD (Direktna metoda krutosti). Ime potiče od matrice krutosti koja daje vezu između sila i pomeranja krajeva štapa.*
- *Iz ove metode se praktično razvila METODA KONAČNIH ELEMENATA - mnogo opštija metoda koja se primenjuje u linearnoj i nelinearnoj, statičkoj i dinamičkoj analizi složenih nosača.*

MKE_Shema rada kompjuterskog programa

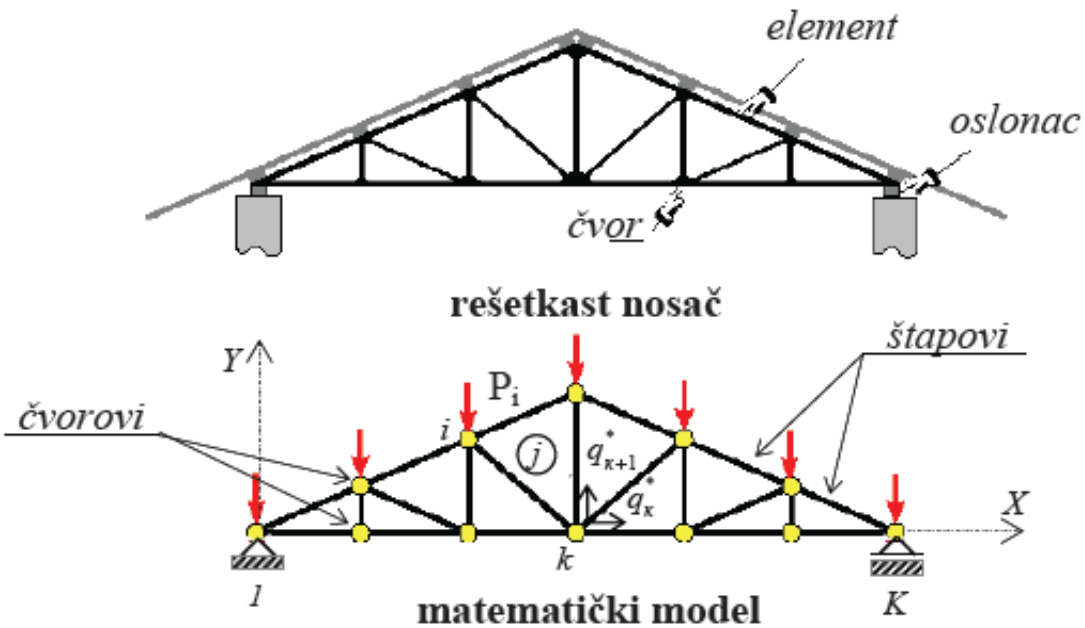


Slika 10.1

Koncept matrične analize konstrukcija

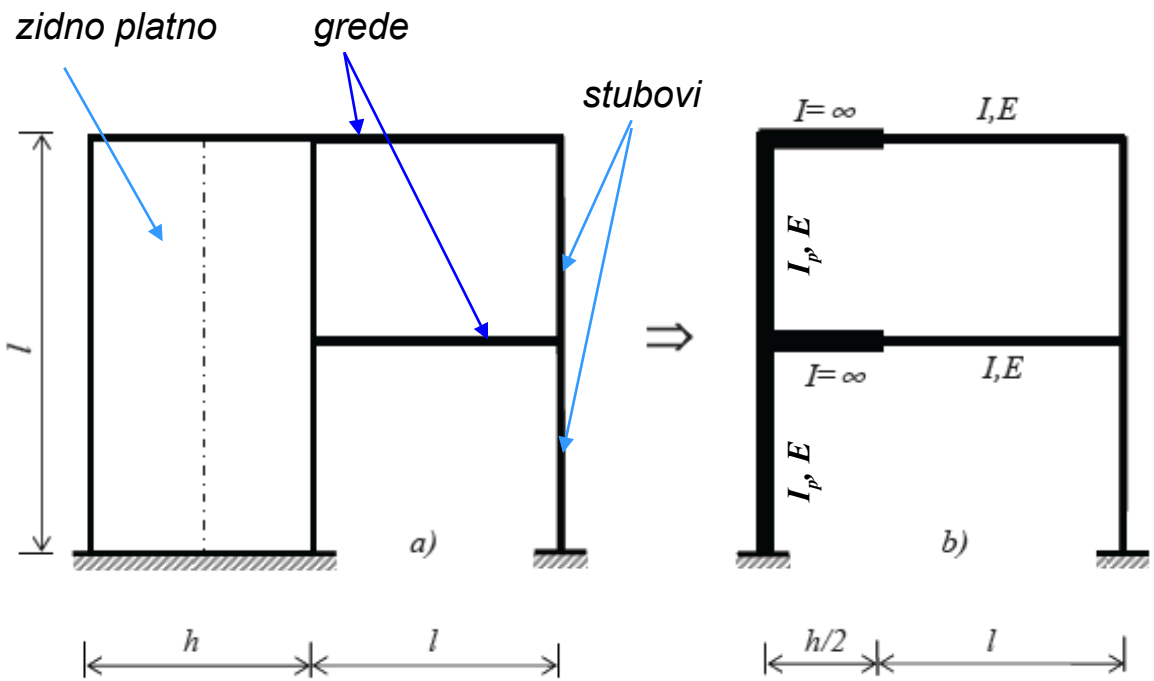
- *Nosač sa posmatra kao sistem sastavljen od diskretnih elemenata – **štapova** koji su povezani u **čvorovima** nosača,*
- *Za nepoznate veličine se usvajaju **pomeranja**/sile u čvorovima,*
- *Na nivou elementa (štapa) uspostavljaju se veze između sila i pomeranja krajeva štapa,*
- *Formiraju se jednačine za određivanje nepoznatih veličina (uslovne jednačine),*
- *Određuju se nepoznate, a zatim i sile u presecima nosača*

Idealizacija nosača i stepeni slobode pomeranja



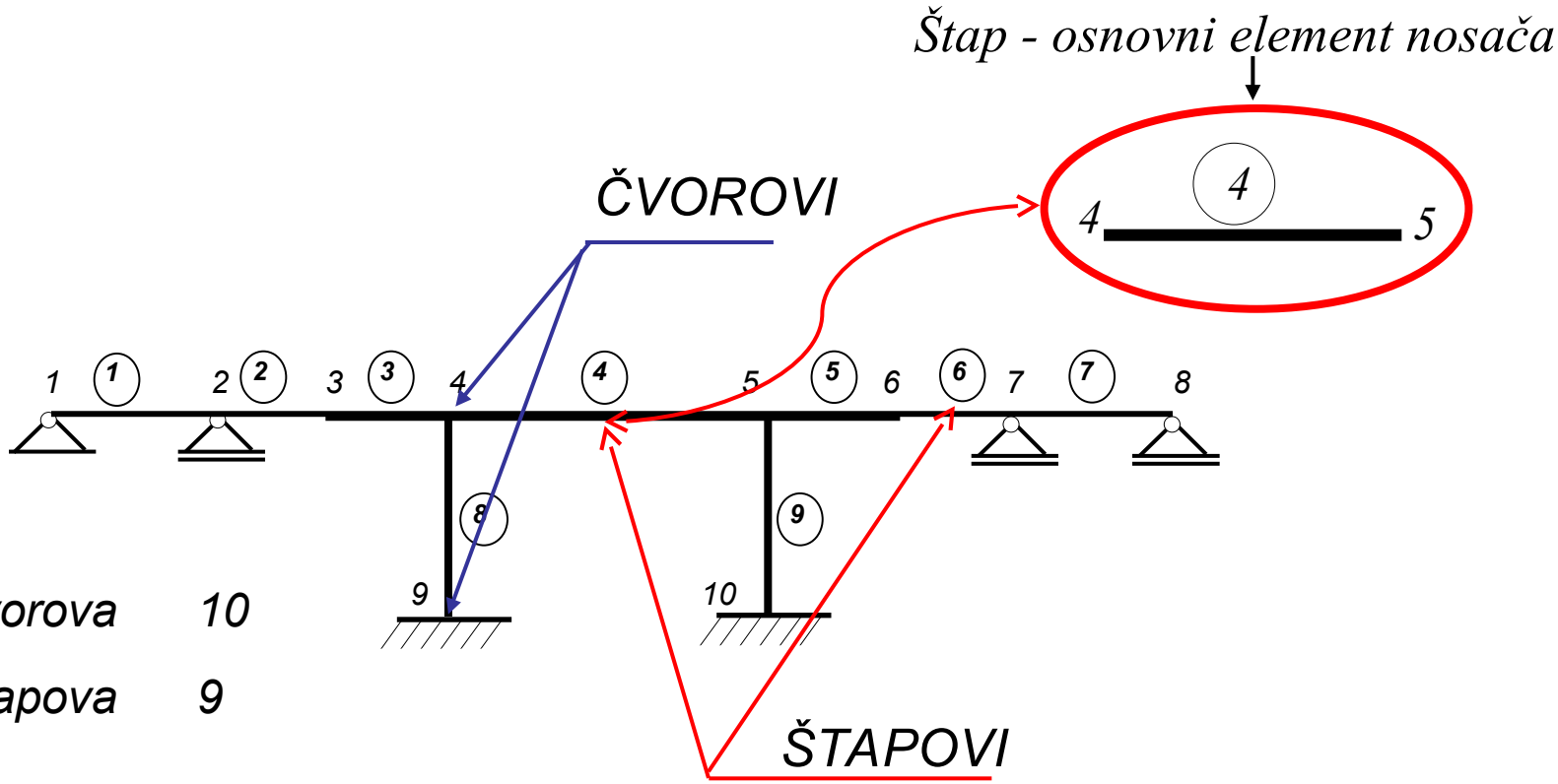
Slika 10.2 Idealizacija nosača tipa krovne rešetke[2]

[2] Carlos Felippa: *Introduction to FEM*,



Slika 10.3 Idealizacija ravnog okvira

Numeracija čvorova i štapova nosača



Br. čvorova 10

Br. štapova 9

Slika 10.4

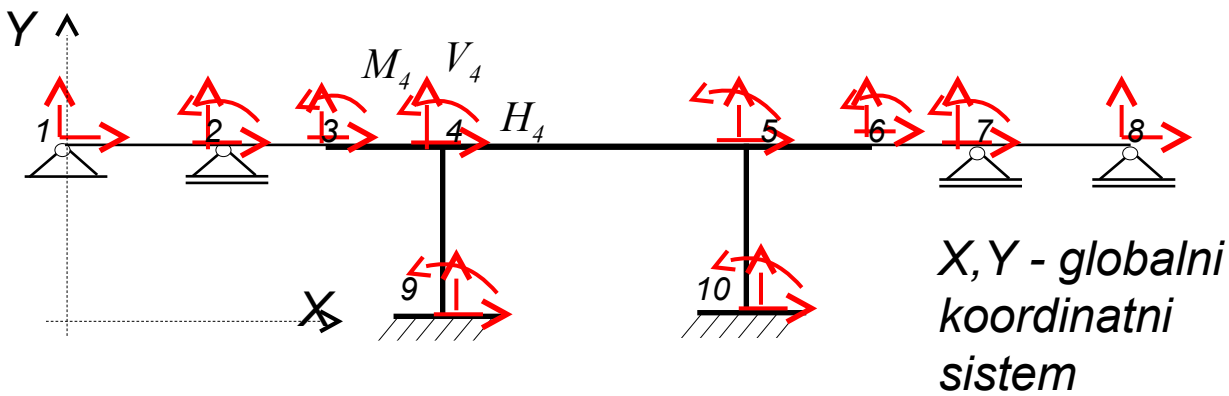
- *Nepoznate veličine su parametri u čvorovima nosača.*
- *U zavisnosti od izbora parametara u čvorovima, postoje 2 metode analize:*

Metoda sila

Metoda deformacije

a) Metoda sila

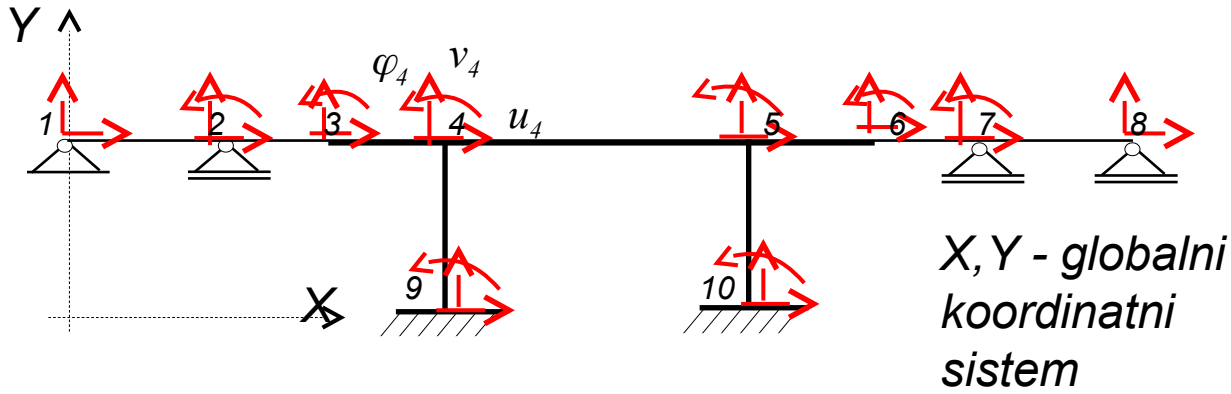
- *Parametri: sile u čvorovima nosača u pravcu osa globalnog koordinatnog sistema: H, V, M*



- *Metoda sila se pokazala inferiornom u odnosu na metodu deformacije i praktično se ne koristi u matričnoj analizi konstrukcija*

b) Metoda deformacije

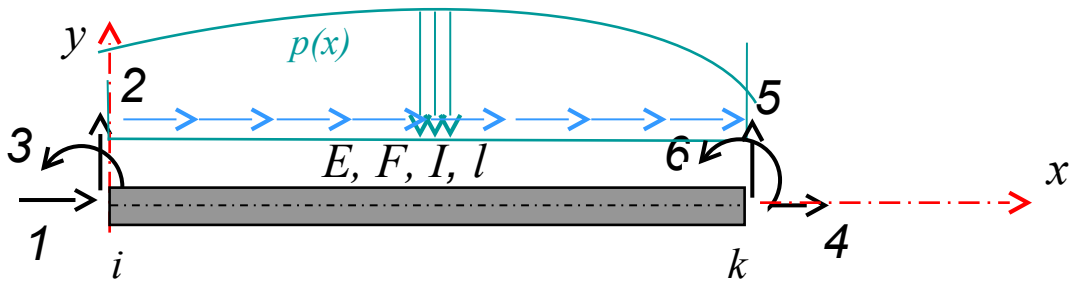
- Parametri: komponente pomeranja u, v i obrtanja φ čvorova nosača.
- Konvencija znaka: pomeranja su pozitivna u smeru pozitivnih osa X i Y globalnog koordinatnog sistema



U metodi deformacije postoje 2 nivoa analize: analiza štapa i analiza nosača (sistema štapova):

- *Analiza štapa: uspostavlja veze između sila i pomeranja na krajevima štapa,*
- *Analiza nosača: formira jednačine za određivanje nepoznatih pomeranja (uslovne jednačine) nosača.*

Analiza štapa



x,y –lokalni koordinatni sistem

P: Važi linearna teorija štapa

Vektor pomeranja

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_k \\ v_k \\ \varphi_k \end{Bmatrix}$$

Vektor sila

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N_i \\ T_i \\ -M_i \\ N_k \\ -T_k \\ M_k \end{Bmatrix}$$

Osnovna jednačina štapa j

$$\mathbf{R}^j = \mathbf{K}^j \mathbf{q}^j - \mathbf{Q}^j$$

Matrica krutosti štapa

Vektor ekvivalentnog opterećenja

- *Veza između vektora sila i pomeranja krajeva neopterećenog štapa u lokalnom koordinatnom sistemu može se dobiti čisto matematičkim razmatranjem. Naime, preslikavanje vektora **q** na vektor **R** definisano je matricom **K**:*

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{q}$$

- *Jednačina predstavlja osnovnu jednačinu neopterećenog štapa. Matrica **K** je matrica krutosti štapa. Pošto su vektori **q** i **R** šestog reda sledi da matrica krutosti **K** mora biti kvadratna matrica šestog reda. Ako elemente matrice krutosti obeležimo sa k_{ij}, i, j= 1,2,...,6, onda se matrica krutosti štapa može napisati u sledećem obliku:*

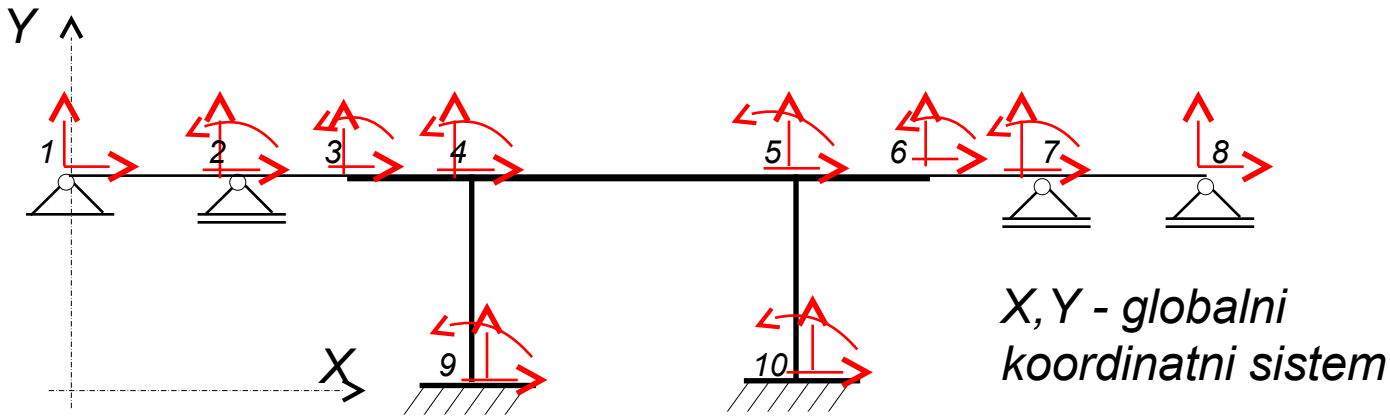
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{26} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{i6} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ k_{61} & k_{62} & \cdots & k_{6j} & \cdots & k_{66} \end{bmatrix}$$

- *Element matrice krutosti k_{ij} ima jasno fizičko značenje, koje se dobija kada osnovnu jednačinu štapa napišemo u razvijenom obliku*

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{26} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{i6} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ k_{61} & k_{62} & \cdots & \underbrace{k_{6j}}_{q_j=1} & \cdots & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_6 \end{Bmatrix}.$$

- *Element matrice krutosti k_{ij} predstavlja silu R_i usled pomeranja $q_j=1$ kada su sva druga pomeranja krajeva štapa q_i, $i \neq j$, jednaka nuli*
- *Matrica krutosti je kvadratna, simetrična ($k_{ij}=k_{ji}$) i singularna.*

Analiza nosača



Moguća pomeranja čvorova nosača

Određivanje broja nepoznatih pomeranja

Pomeranja čvorova:

u,v,φ - u čvorovima gde postoji krut ugao

u,v- u čvorovima gde postoji zglobna veza

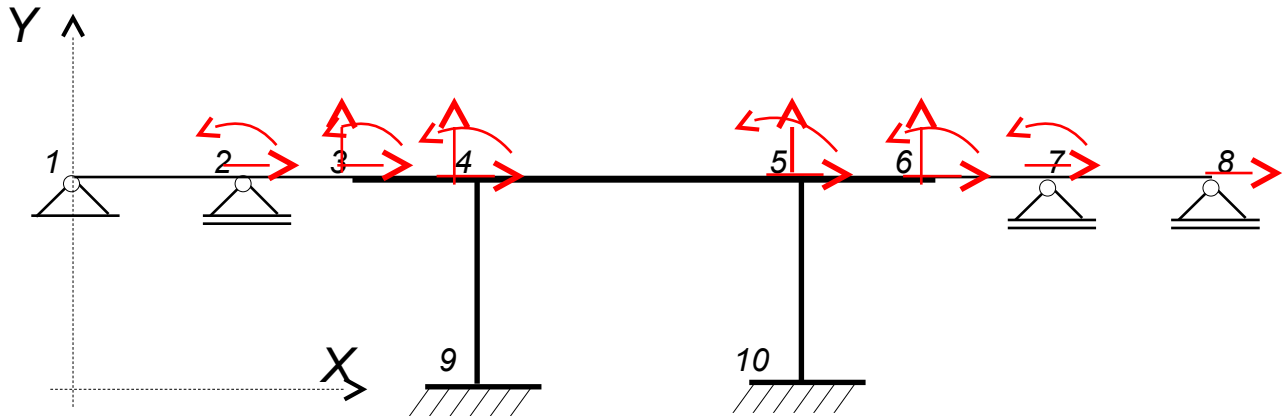
Broj mogućih pomeranja:

u,v 2K

φ.....$m+z_u$

$K=10, \quad m=6, \quad z_u=2, \quad z_o=9$

$N = 2x10+6+2=28$



Nepoznata pomeranja čvorova nosača

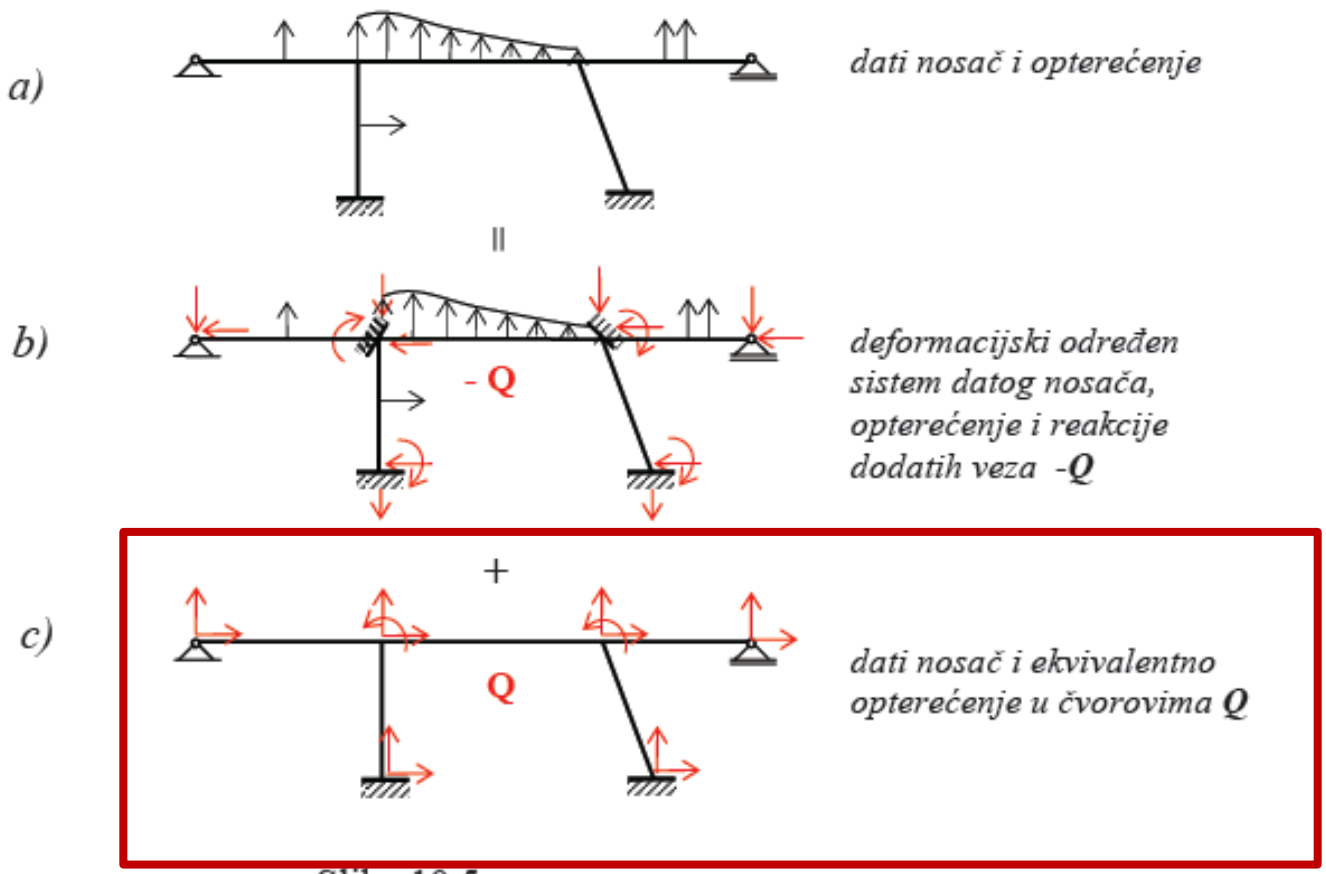
Broj nepoznatih pomeranja:

u,v .....$2K-z_o$

φ.....*m*

n=2x10-9+6=17

Uslovne jednačine



Slika 10.5

Uslovne jednačine

U analizi nosača nepoznata pomeranja određujemo iz uslova ravnoteže čvorova nosača opterećenog ekvivalentnim opterećenjem, slika 10.5c, u kojima su sile na krajevima štapova iskazane u funkciji nepoznatih pomeranja čvorova.

Uslovi ravnoteže svih čvorova nosača u globalnom koordinatnom sistemu predstavljaju uslovne jednačine sistema koje se mogu prikazati u obliku:

$$\left(\sum_{j} \mathbf{K}^{*j} \right) \mathbf{q}^{*} = \mathbf{S}^{*}$$

Vektor sila u čvorovima nosača u globalnom koordinatnom sistemu

Vektor pomeranja čvorova nosača u globalnom koordinatnom sistemu

Matrica krutosti sistema štapova u globalnom koordinatnom sistemu

USLOVNE JEDNAČINE
SISTEMA ŠTAPOVA

$$\mathbf{K}^{*}\mathbf{q}^{*} = \mathbf{S}^{*}$$

REŠAVANJE

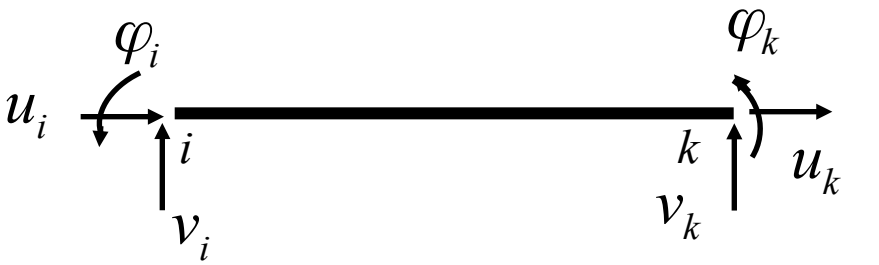
$$\mathbf{q}^{*}, \mathbf{R}^{j}$$

VEKTOR POMERANJA

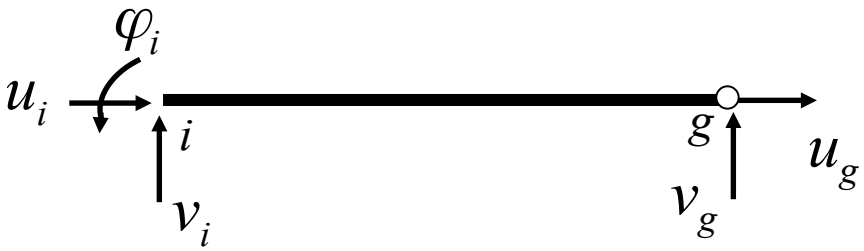
VEKTOR SILA NA
KRAJEVIMA ŠTAPOVA

10.2 Analiza štapa

Tipovi štapova kod ravnih linijskih nosača i komponente pomeranja krajeva štapa u ***lokalnom koordinatnom*** *sistemu:*



Štap tipa k
(6 pomeranja)



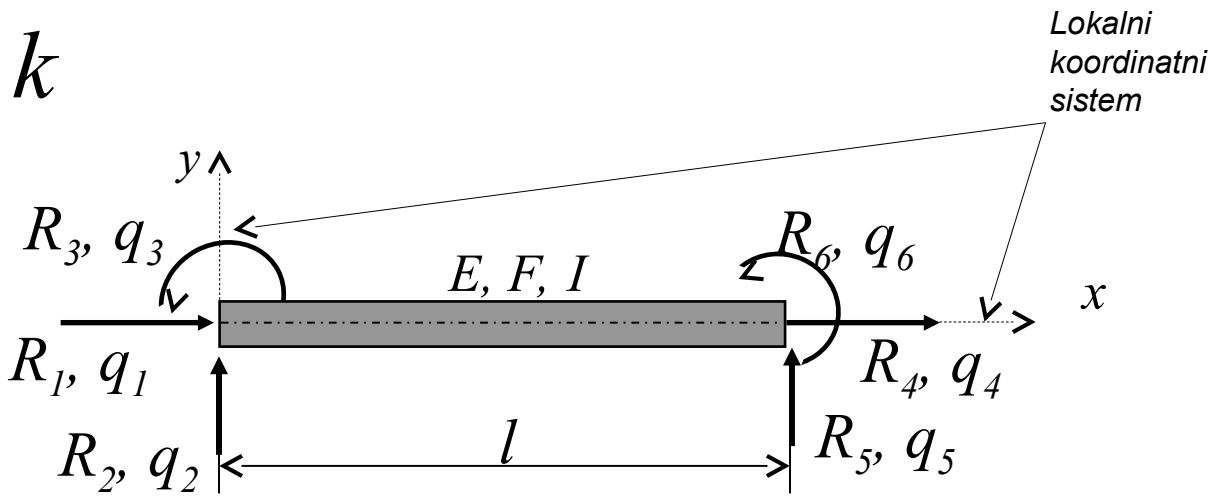
Štap tipa g
(5 pomeranja)

Prost štap
(2 pomeranja)

Štap tipa *k*

q_i - pomeranja

R_i - sile na krajevima štapa

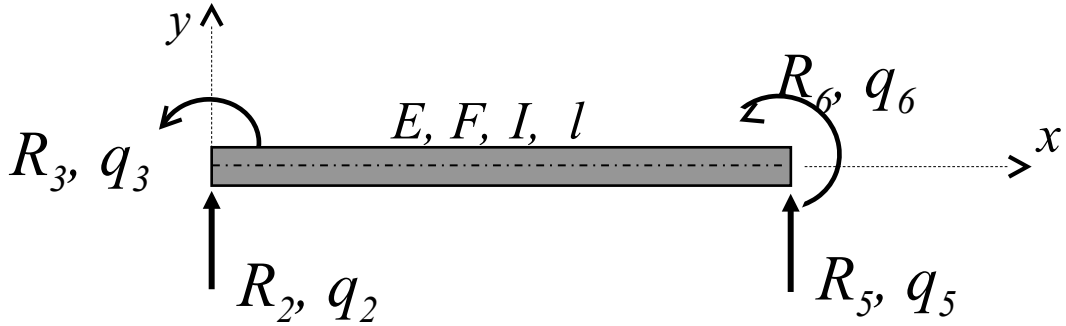


=

- *Aksijalno naprezanje*

+

- *Savijanje*



Aksijalno naprezanje i savijanje su dva nezavisna naponska stanja, i mogu se analizirati nezavisno.

Vektor pomeranja

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_k \\ v_k \\ \varphi_k \end{Bmatrix}$$

Vektor sila

$$R = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{Bmatrix}$$

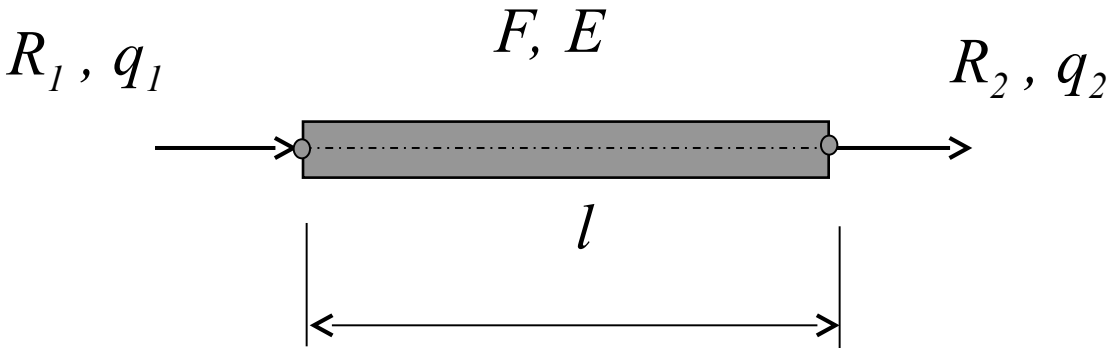
aksijalno naprezanje

savijanje

10.2.1 Matrice krutosti štapova u ravni

a) Matrica krutosti aksijalno napregnutog štapa

- *Sile i pomeranja krajeva štapa:*



- *Vektor sila i pomeranja krajeva štapa:*

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

Veza između vektora sila i pomeranja štapa se može lako izvesti polazeći od osnovnih jednačina teorije štapa. Promena dužine tetive štapa Δl je jednaka razlici komponenata pomeranja krajeva štapa u pravcu ose štapa:

$$\Delta l = q_2 - q_1 \qquad (2)$$

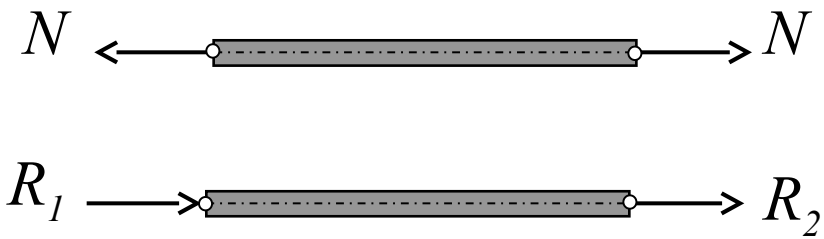
Dilatacija ose štapa je jednaka promeni dužine po jedinici dužine, tj.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{q_2 - q_1}{l} \qquad (3)$$

Napon, tj. normalna sila se određuje direktno iz dilatacije:

$$N = F\sigma = FE\varepsilon = \frac{EF}{l}(q_2 - q_1) \qquad (4)$$

Sile na krajevima štapa



$$R_1 = -N = \frac{EF}{l}(q_1 - q_2) \qquad R_2 = N = \frac{EF}{l}(-q_1 + q_2) \qquad (5)$$

<u>*Osnovna jednačina neopterećenog štapa*</u>:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{R}} = \underbrace{\frac{EF}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{q}} \Rightarrow \quad \mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{q} \qquad (6)$$

matrica

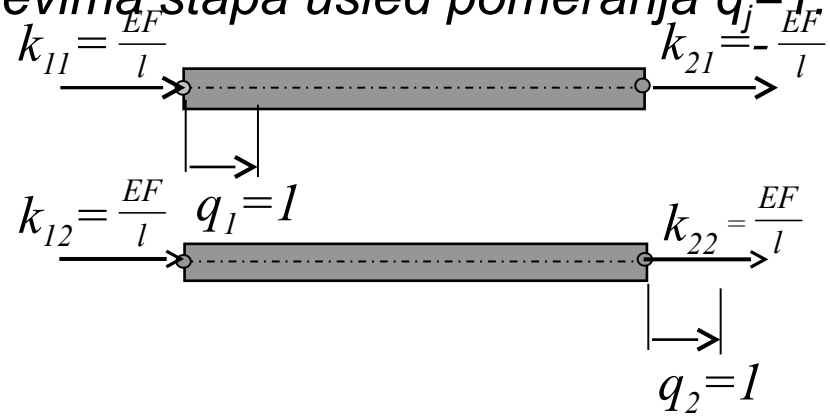
krutosti

Fizičko značenje elemenata matrice krutosti aksijalno napregnutog štapa

Elementi matrice krutosti k_{ij} imaju jasno fizičko značenje koje direktno sledi iz matrične jednačine (6).

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{k_{11}}_{q_1=1} & \underbrace{k_{12}}_{q_2=1} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

Element k_{ij} predstavlja silu R_i usled pomeranja q_j=1, kada su sva druga pomeranja q_k=0. Iz toga sledi da svaka j-ta vrsta matrice krutosti predstavlja sile na krajevima štapa usled pomeranja q_j=1.



Jednačina (7) je izvedena za neopterećen štap. Ako je štap izložen uticaju temperaturne promene u osi t^o on trpi dodatnu dilataciju $\varepsilon_t = \alpha_t t^o$, gde je α_t koeficijent termičke dilatacije materijala. Ukupna normalna sila će biti:

$$N = EF(\varepsilon + \varepsilon_t) = \frac{EF}{l}(q_2 - q_1) + EF\alpha_t t^o \qquad (7)$$

Uvodeći matričnu notaciju, dobija se vektor sila u obliku:

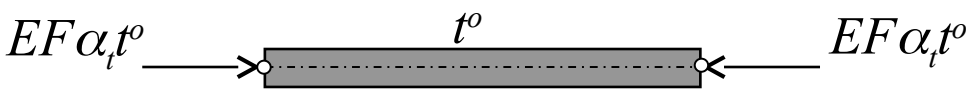
$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} - EF\alpha_t t^o \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (8)$$

Drugi član desne strane jednačine predstavlja vektor ekvivalentnog opterećenja

$$\mathbf{Q}_t = EF\alpha_t t^o \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (9)$$

Vektor ekvivalentnog opterećenja $\boldsymbol{Q}$ *jednak je vektoru reakcija obostrano oslonjenog prostog štapa usled zadatog uticaja, sa suprotnim znakom. To su zapravo sile koje se sa štapa prenose u čvorove nosača.*

Vektor ekvivalentnog opterećenja usled t^o - $\boldsymbol{Q}_t$



$\boldsymbol{Q}_t$

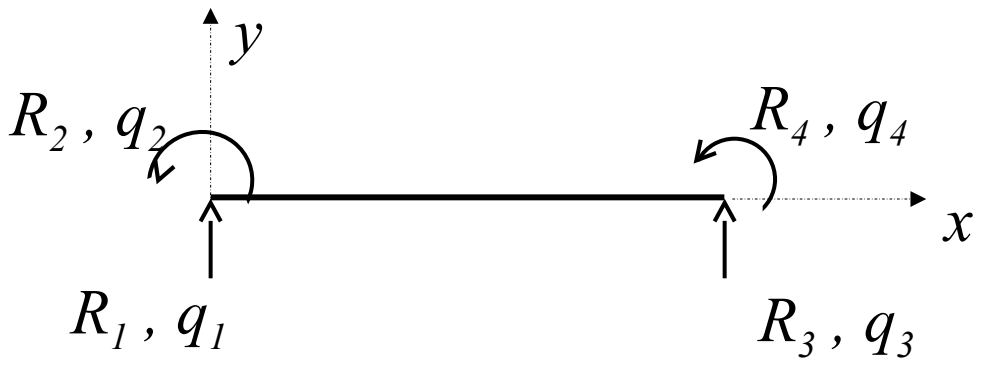
$$\mathbf{Q}_t = EF\alpha_t t^o \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Sa uvedenim obeležavanjem, iz jednačina (8) i (9) dobija se <u>*osnovna jednačina opterećenog štapa*</u> *u matričnom obliku:*

$$\mathbf{R} = \mathbf{Kq} - \mathbf{Q_t} \qquad (10)$$

a) Matrica krutosti štapa tipa k izloženog savijanju

Štap tipa k u lokalnom koordinatnom sistemu ima 4 stepeni slobode pomeranja, po tri u svakom čvoru: dva pomeranja u pravcu x i y ose i rotaciju oko z ose.



Vektori sila i pomeranja imaju 4 komponente, pozitivne u smeru pozitivnih osa:

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}$$

Veza između vektora sila i pomeranja

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}$$

$q_1=1$ $\qquad$ $q_3=1$

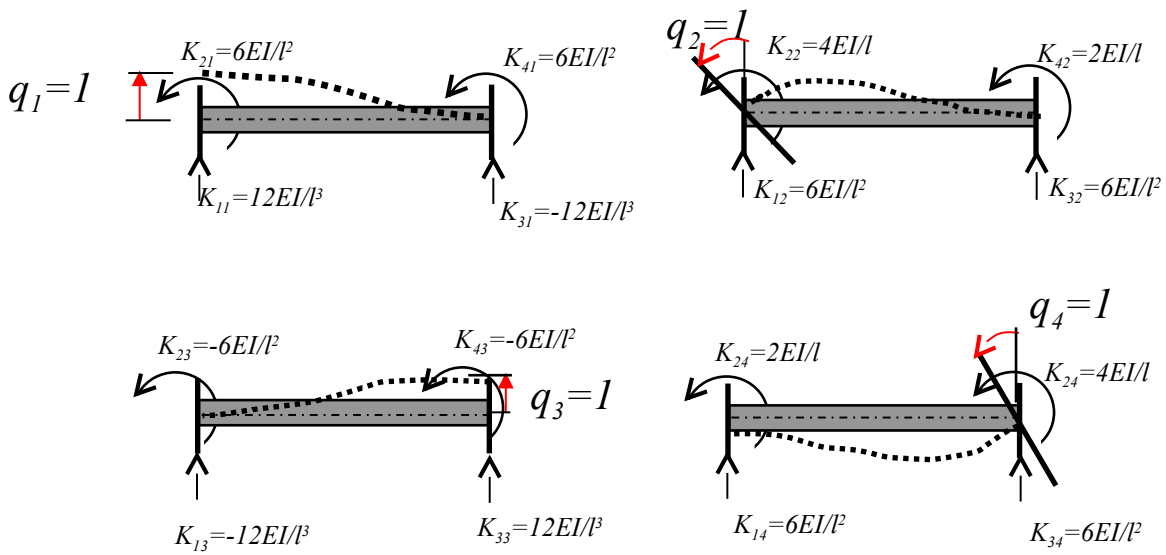
$$R_1 = k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + k_{13}q_3 + k_{14}q_4$$

Ako je: $q_1 = 1,\ q_i = 0$ gde je $i = 2,3,4$

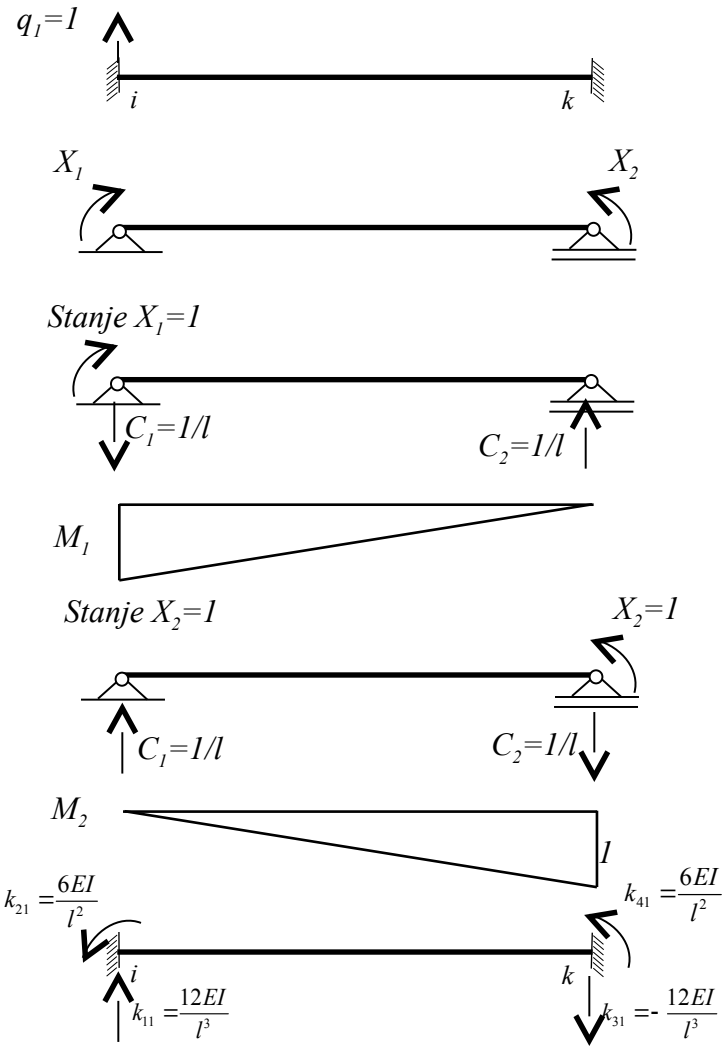
$$R_1 = k_{11} \cdot 1 + k_{12} \cdot 0 + k_{13} \cdot 0 + k_{14} \cdot 0 = k_{11}$$

R_1 $\qquad$ $q_1=1$

- *Matrica krutosti za slučaj savijanja* $\boldsymbol{K}$ *se može izvesti polazeći od značenja elemenata matrice krutosti. Naime, element* k_{ij} *predstavlja silu na mestu* i *usled jediničnog pomeranja na mestu* j*. To znači da elementi matrice krutosti* k_{ij}, $i=1\text{-}4$, *prizmatičnog štapa predstavljaju reakcije obostrano uklještenog štapa usled zadatog pomeranja oslonca* $q_j=1$, $j=1,2,3,4$.



U statičkom smislu, štap tipa k izložen savijanju je dva puta statički neodređen. Elementi matrice krutosti K_{ij} predstavljaju reakcije oslonaca i usled jediničnog pomeranja oslonca q_j i određuju se primenom metode sila. Ovde će biti ilustrovano određivanje elemenata K_{i1}, usled pomeranja oslonca $q_1=1$.



Uslovne jednačine:

$\delta_{11} X_1+\delta_{12} X_2+\delta_{10}=0$

$\delta_{21} X_1+\delta_{22} X_2+\delta_{20}=0$

Koeficijenti i slobodni članovi:

$$\delta_{11}=\int^{k}\frac{M_1^2}{EI}ds=\frac{l}{3EI} \qquad \delta_{22}=\int^{k}\frac{M_2^2}{EI}ds=\frac{l}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\int^{k}\frac{M_1 M_2}{EI}ds=\frac{l}{6EI}$$

$$\delta_{1c}=-\sum C_1 c=\frac{1}{l} \qquad \delta_{2c}=-\sum C_2 c=-\frac{1}{l}$$

Uslovne jednačine :

$$\begin{bmatrix}\frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI}\\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\frac{1}{l}\\ -\frac{1}{l}\end{Bmatrix}=0$$

Rešenje: $-X_1=X_2=\frac{6EI}{l^2}$

Reakcije oslonaca: $T_1=-T_2=\frac{12EI}{l^3}$

Matrica krutosti štapa tipa k izloženog savijanju

Usled pomeranja $q_1=1$ dobijaju se reakcije na krajevima štapa koje predstavljaju redom elemente prve kolone matrice krutosti. Na sličan način određuju se elementi kolona $j=2,3$ i 4 . Tako se dobija matrica krutosti oblika:

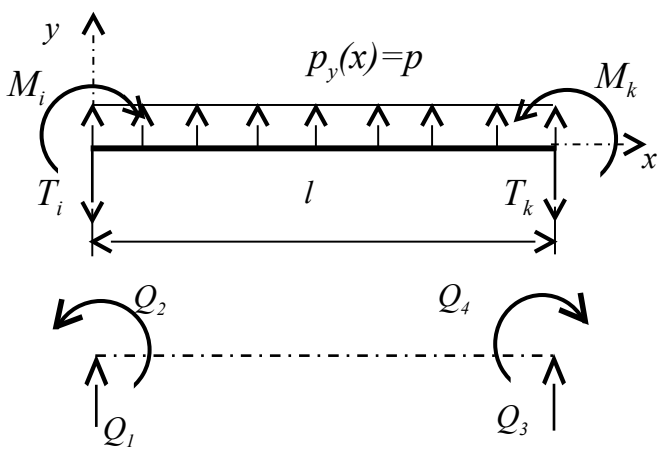
$$\mathbf{K}_k^s = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 12 \\ 6l \\ -12 \\ 6l \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 6l \\ 4l^2 \\ -6l \\ 2l^2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -12 \\ -6l \\ 12 \\ -6l \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 6l \\ 2l^2 \\ -6l \\ 4l^2 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{q_1=1} \quad \underbrace{\qquad}_{q_2=1} \quad \underbrace{\qquad}_{q_3=1} \quad \underbrace{\qquad}_{q_4=1}$$

Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja

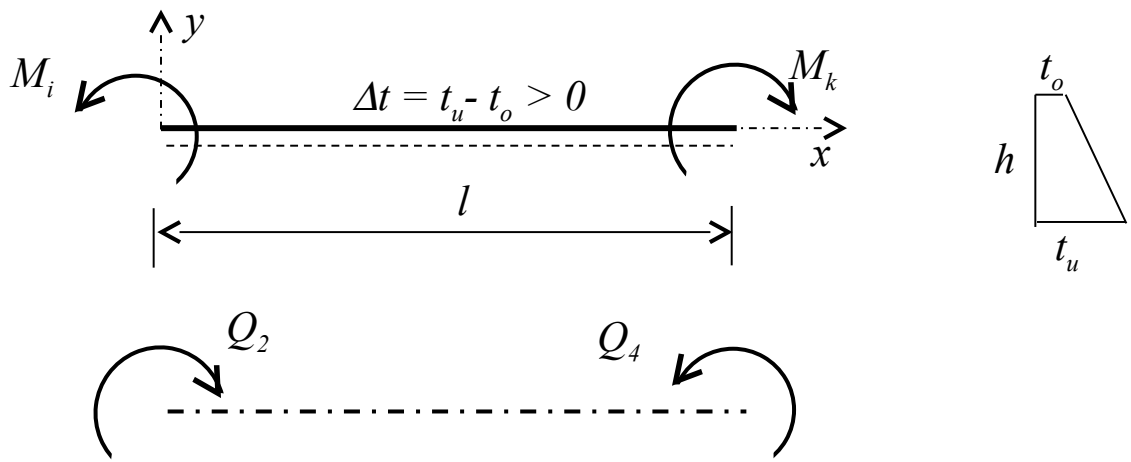
Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja ***Q*** *u lokalnom koordinatnom sistemu ima 4 komponente, koje su jednake negativnim vrednostima reakcija oslonaca obostrano uklještene grede usled zadatog opterećenja.*

a) jednakopodeljeno opterećenje:



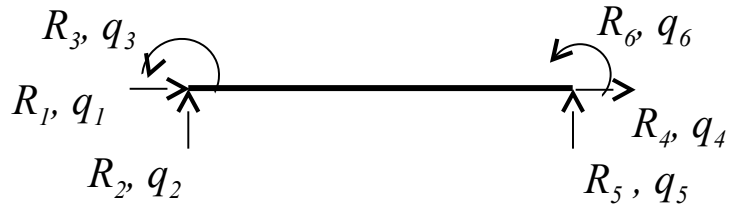
$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_k \\ M_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{pl}{2} \\ \dfrac{pl^2}{12} \\ \dfrac{pl}{2} \\ -\dfrac{pl^2}{12} \end{Bmatrix}$$

b) temperaturna razlika $\Delta t = t_u - t_o$



$$\mathbf{Q}^t = EI\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Matrica krutosti štapa tipa k



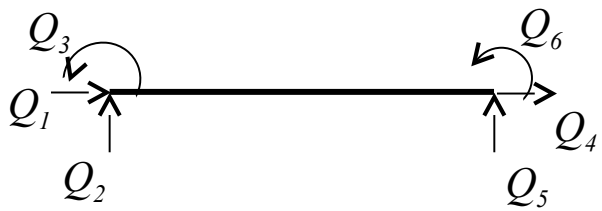
*Matrica krutosti štapa tipa k se dobija iz matrice krutosti prostog štapa i štapa opterećeno na savijanje stavljanjem odgovarajućih članova matrica krutosti na mesta u matrici krutosti **K** štapa izloženog složenom naprezanju*

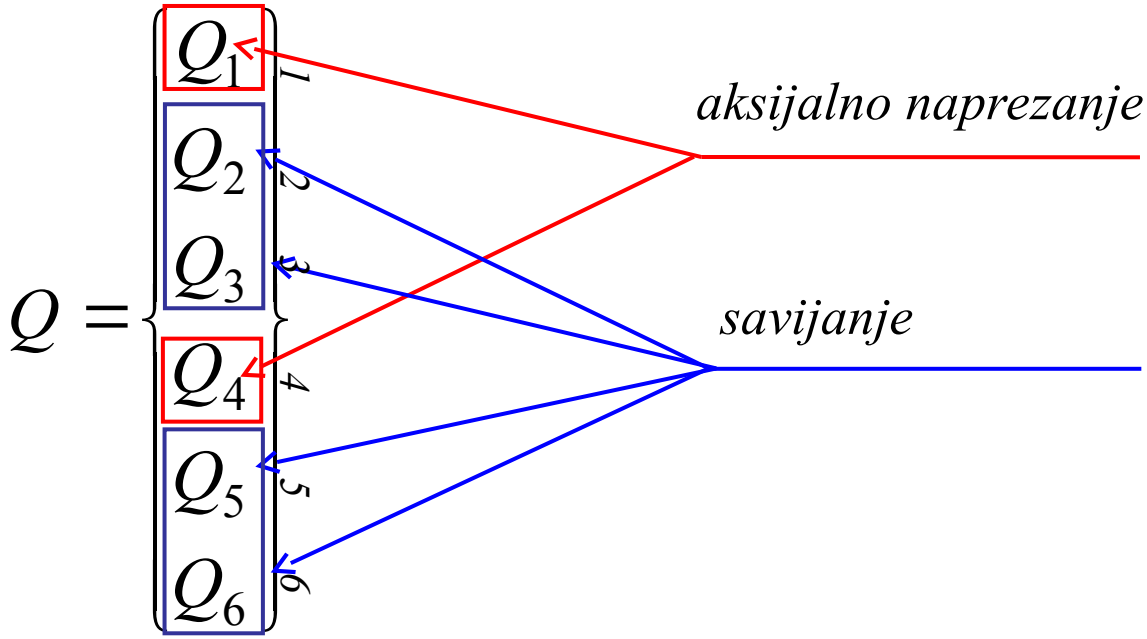
aksijalno naprezanje

$$
\mathbf{K}_k = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\
-\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
$$

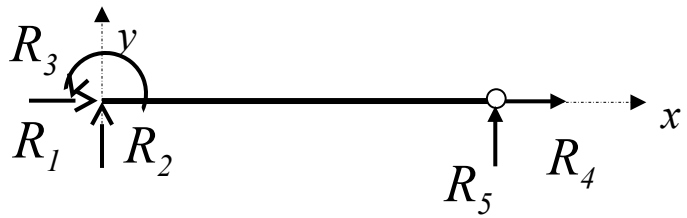
savijanje

Vektor ekvivalentnog opterećenja se takođe dobija postavljanjem na odgovarajuća mesta ekvivalentnog opterećenja aksijalno napregnutog štapa i štapa izloženog savijanju



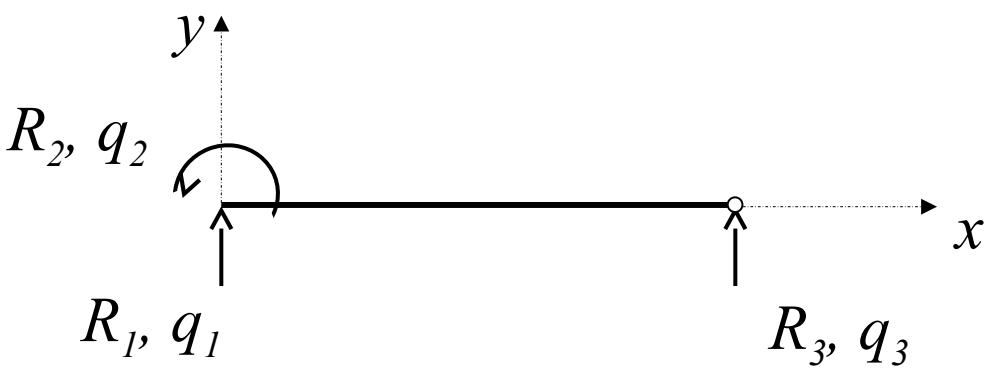


c) Matrica krutosti štapa tipa g



Matrica krutosti štapa tipa g se dobija iz matrice krutosti aksijalno napregnutog štapa i matrice krutosti štapa tipa g izloženog savijanju.

Matrica krutosti štapa tipa g izloženog savijanju



vektor sila — *vektor pomeranja*

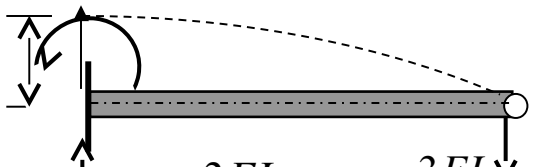
$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

Štap tipa g izložen savijanju ima 3 stepena slobode pomeranja. Vektori sila i pomeranja krajeva štapa imaju po 3 komponente, a matrica krutosti štapa je trećeg reda.

Element matrice krutosti k_{ij} predstavlja silu na mestu i , jednostrano uklještene grede usled pomeranja $q_j=1$.

$$k_{21}=\frac{3EI}{l^2}$$

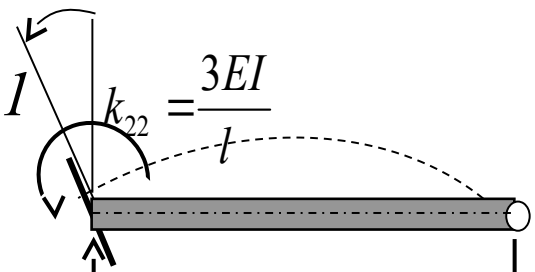
$q_1=1$



$$k_{11}=\frac{3EI}{l^3} \qquad k_{31}=\frac{3EI}{l^3}$$

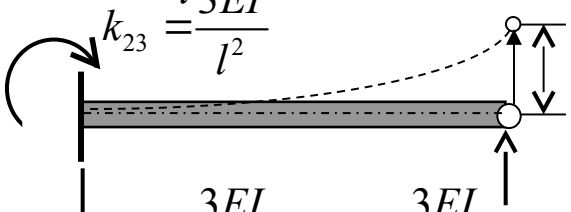
$q_2=1$

$$k_{22}=\frac{3EI}{l}$$



$$k_{12}=\frac{3EI}{l^2} \qquad k_{32}=\frac{3EI}{l^2}$$

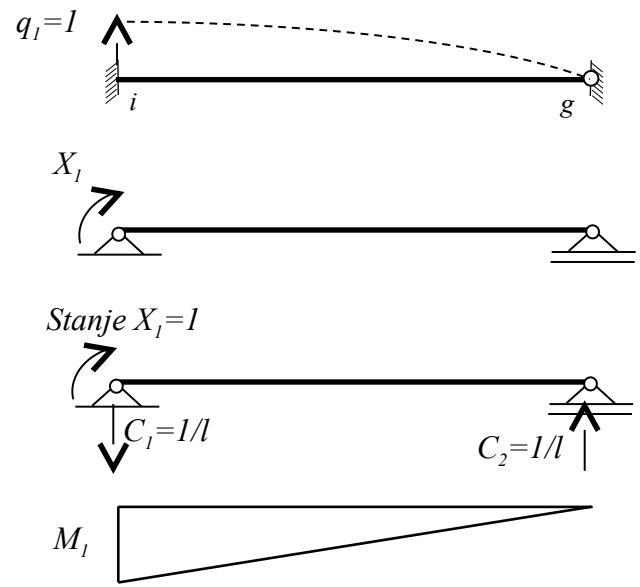
$$k_{23}=\frac{3EI}{l^2}$$



$q_3=1$

$$k_{13}=\frac{3EI}{l^3} \qquad k_{33}=\frac{3EI}{l^3}$$

Sračunavanje elemenata k_{i1}

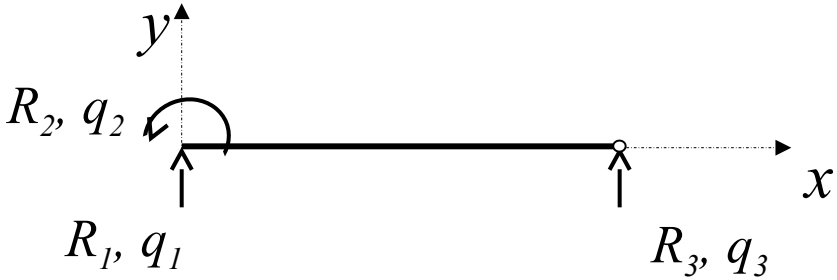


Uslovna jednačina: $\delta_{11}X_1+\delta_{1c}=0$

$$\delta_{11}=\int_i^g \frac{M_1^2}{EI}dx=\frac{l}{3EI}, \qquad \delta_{1c}=-\sum_j C_{j1}c_j=\frac{1}{l}$$

$$X_1=-R_2=-\frac{\delta_{1c}}{\delta_{11}}=-\frac{3EI}{l^2} \qquad R_1=-R_3=\frac{3EI}{l^3}$$

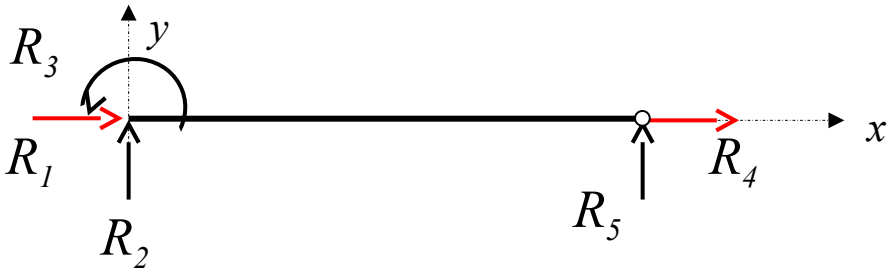
Matrica krutosti štapa tipa g izloženog savijanju:



$$\mathbf{K}_g^s = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{3EI}{l^3} \\ \frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{3EI}{l^3} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l} \\ -\frac{3EI}{l^2} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\frac{3EI}{l^3} \\ -\frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^3} \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

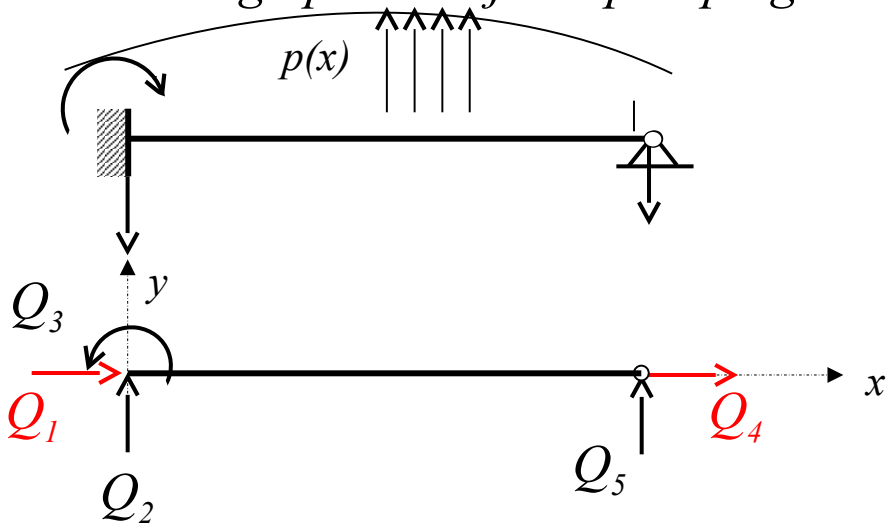
$$\underbrace{\phantom{\frac{3EI}{l^3}}}_{q_1=1} \quad \underbrace{\phantom{\frac{3EI}{l^2}}}_{q_2=1} \quad \underbrace{\phantom{\frac{3EI}{l^3}}}_{q_3=1}$$

Matrica krutosti štapa tipa g dobija se kombinacijom matrica krutosti aksijalno napregnutog štapa i štapa izloženog savijanju:



$$\mathbf{K}_g = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{\frac{EF}{l}} & 0 & 0 & \boxed{-\frac{EF}{l}} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \\ \boxed{-\frac{EF}{l}} & 0 & 0 & \boxed{\frac{EF}{l}} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

Vektor ekvivalentnog opterećenja štapa tipa g



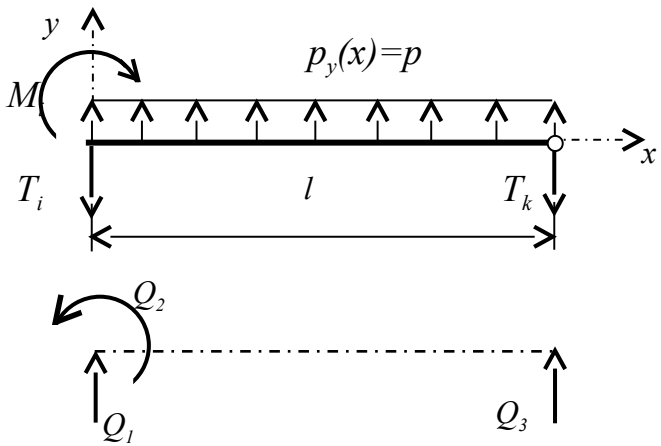
Q_1, Q_4- aksijalno naprezanje

Q_2, Q_3, Q_5 - savijanje

Vektor ekvivalentnog opterećenja od savijanja jednak je vektoru reakcija sa negativnim znakom.

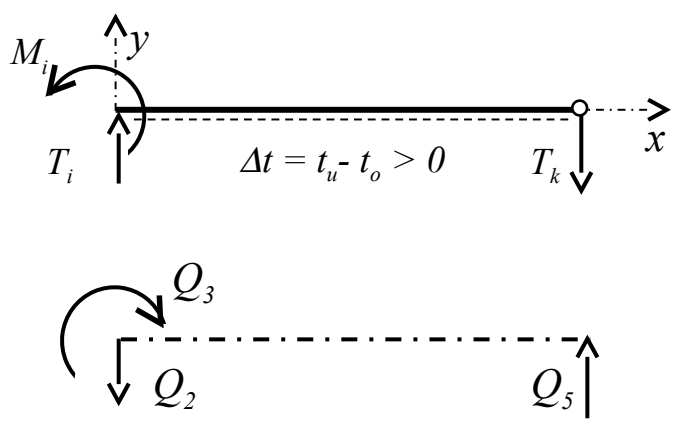
$$\mathbf{Q}_g^s = \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_g \end{Bmatrix}$$

a) jednakopodeljeno opterećenje:



$$\mathbf{Q}_g^s = \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = \frac{pl}{8} \begin{Bmatrix} 5 \\ l \\ 3 \end{Bmatrix}$$

b) temperaturna razlika $\Delta t = t_u - t_o$

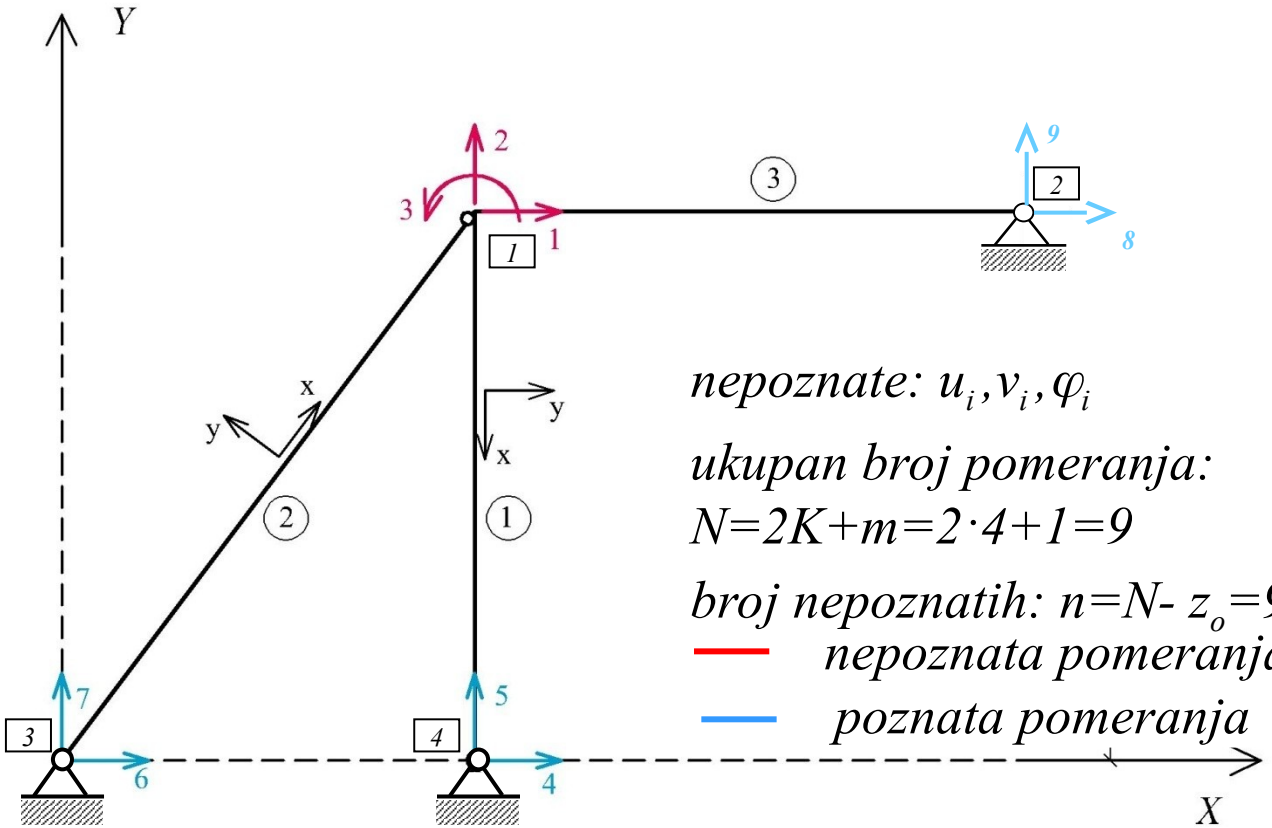


$$\mathbf{Q}_g^{\Delta T} = \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = 1.5 EI \alpha_T \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} \\ -1 \\ \frac{1}{l} \end{Bmatrix}$$

Osobine matrice krutosti

- *kvadratna*
- *simetrična* $k_{ij} = k_{ji}$
- *singularna* $\det K = 0$

10.3 Analiza nosača u ravni



nepoznate: u_i, v_i, φ_i

ukupan broj pomeranja:
$N=2K+m=2\cdot 4+1=9$

broj nepoznatih: $n=N-z_o=9-6=3$

nepoznata pomeranja

poznata pomeranja

XOY – globalni koordinatni sistem, xy – lokalni koordinatni sistem

10.3.1 Matrice transformacije

Sile i pomeranja krajeva štapova u matričnoj anlizi se definišu u smeru osa globalnog koordinatnog sistema, koji je jedinstven za ceo nosač. To je Dekartov koordinatni sistem desne orijentacije - XOY.

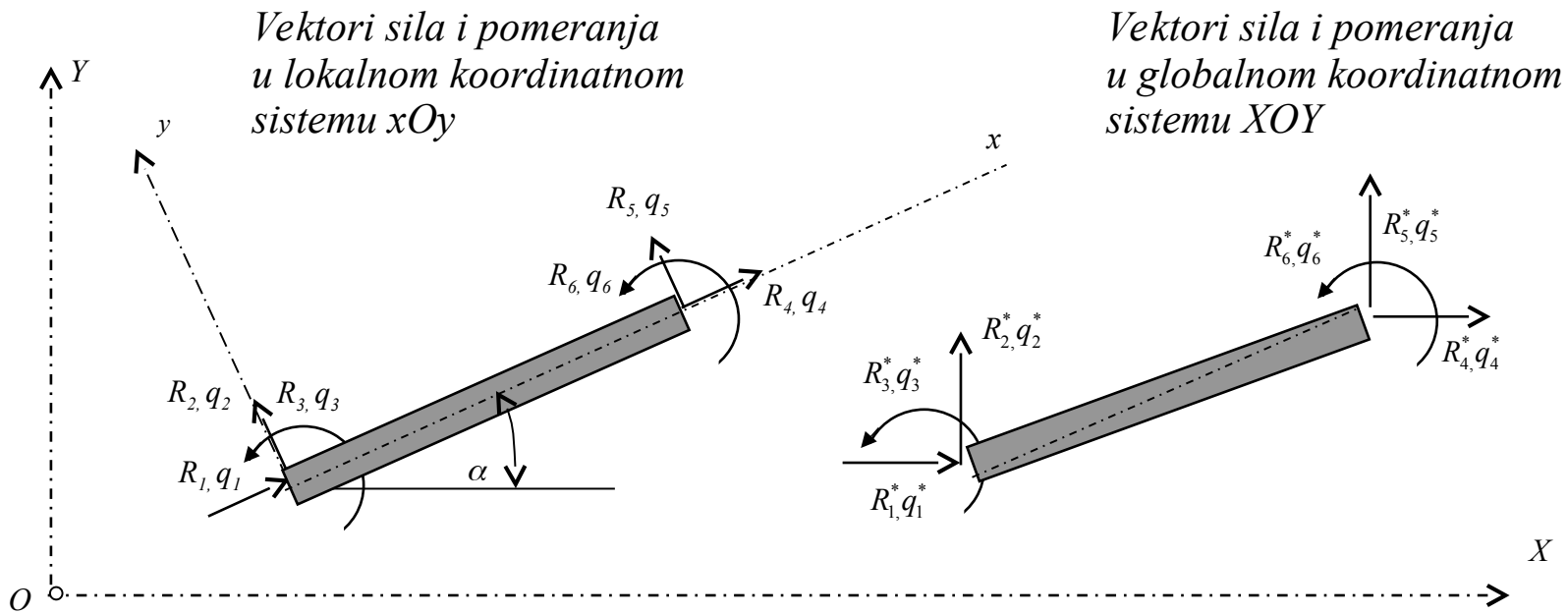
Pošto su na nivou štapa sile i pomeranja krajeva štapa dati u lokalnom koordinatnom sitemu štapa, u kome su izvedene i osnovne jednačine štapa, potrebno je izvršiti transformaciju sila i pomeranja iz jednog koordinatnog sistema u drugi.

Ta transformacija je definisana uglom α koji osa štapa x zaklapa sa globalnom X-osom.

Vektor sila i pomeranja krajeva štapa se transformišu iz globalnog koordinatnog sistema u lokalni koordinatni sistem pomoću matrice transformacije T.

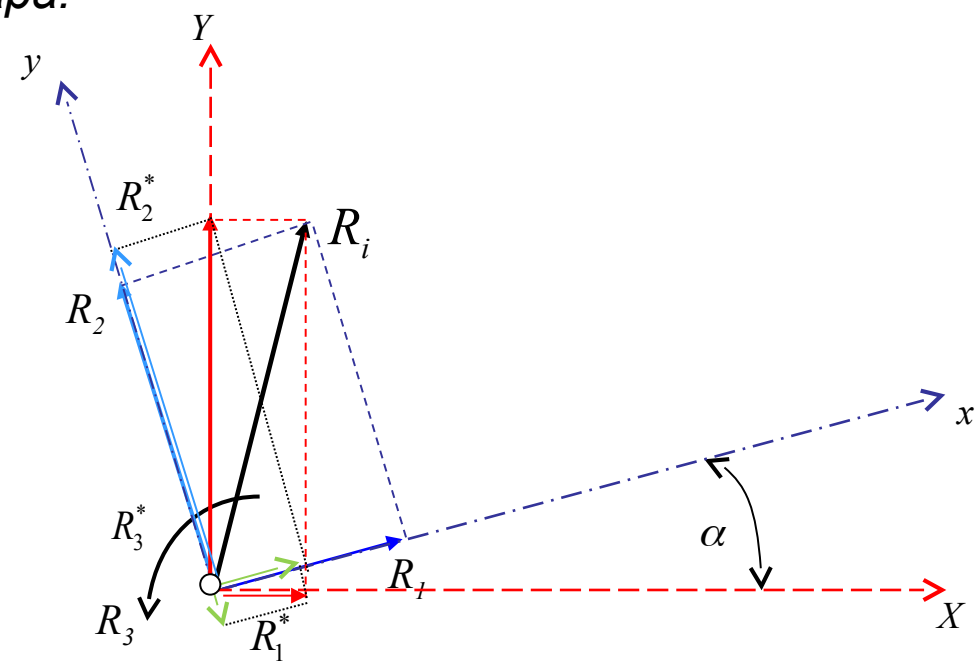
Pokazaćemo matrice transformacije za štapove tipa k, g i prost štap.

a) Matrica transformacije za štap tipa k



$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{q}^* = \begin{Bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \\ q_5^* \\ q_6^* \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{R}^* = \begin{Bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \\ R_4^* \\ R_5^* \\ R_6^* \end{Bmatrix}$$

Projektovanjem komponenata čvornog vektora pomeranja/sila globalnog koordinatnog sistema na pravce komponenata lokanog koordinatnog sistema dobija se matrica transformacije *čvora, a na osnovu nje i matrica transformacije štapa.*



Vektor sila u čvoru i

lokalni k.s *globalni k.s.*

$$\mathbf{R}_i = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{R}_i^* = \begin{Bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \end{Bmatrix}$$

Veza između sila u čvoru i:

$$R_1 = R_1^* cos\alpha + R_2^* sin\alpha$$
$$R_2 = - R_1^* \sin\alpha + R_2^* \cos\alpha$$
$$R_3 = R_3^*$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \end{Bmatrix}$$

Matrica transformacije sila u čvoru i

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_i = \mathbf{t}\mathbf{R}_i^*$$

Za čvor k važi ista relacija: $\mathbf{R}_k = \mathbf{t}\mathbf{R}_k^*$

Na osnovu toga se može napisati veza između sila na krajevima štapa u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu:

$$\begin{Bmatrix} R_i \\ R_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i^* \\ R_k^* \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{R}^*$$

gde je $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \\ & \mathbf{t} \end{bmatrix}$ *matrica transformacije štapa.*

Matrica transformacije za štap tipa k jednaka je:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & & & \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ & 0 & & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

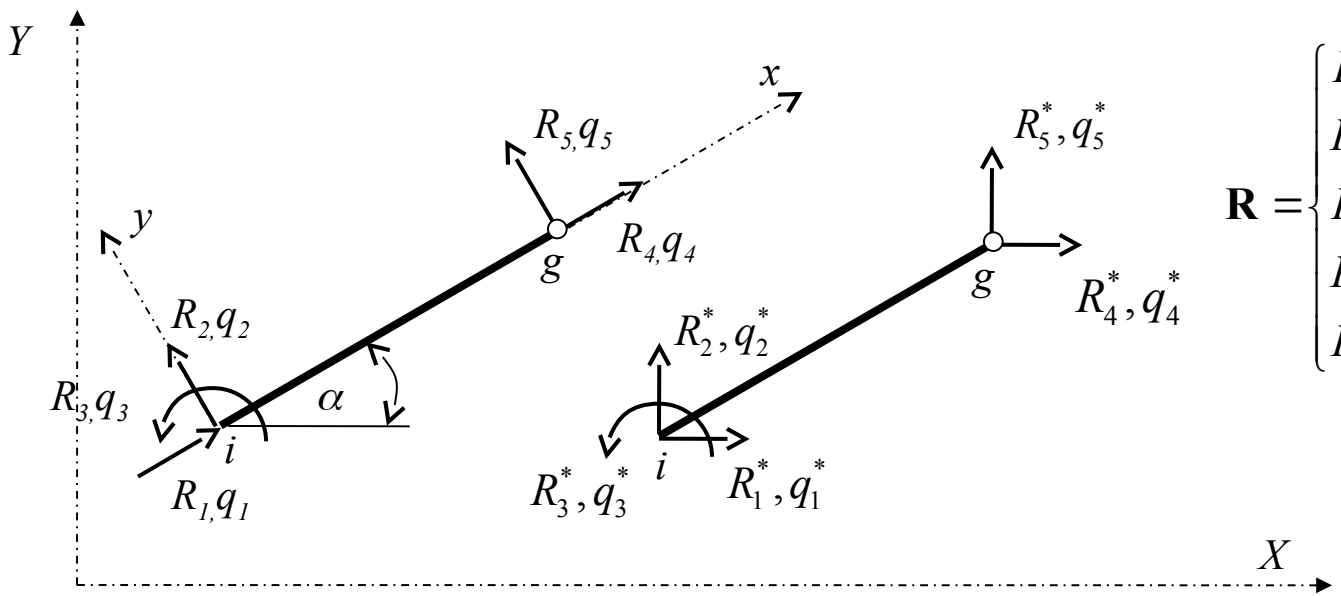
Relacija važi ne samo za sile već i za vektor pomeranja krajeva štapa:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{R}^* \quad \wedge \quad \mathbf{q} = \mathbf{T}\mathbf{q}^* \quad \wedge \quad \mathbf{Q} = \mathbf{T}\mathbf{Q}^*$$

Matrica transformacije je ortogonalna $\boldsymbol{T}^t = \boldsymbol{T}^{-1}$, odakle sledi da je:

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{T}^t\mathbf{R} \quad \wedge \quad \mathbf{q}^* = \mathbf{T}^t\mathbf{q} \quad \wedge \quad \mathbf{Q}^* = \mathbf{T}^t\mathbf{Q}$$

b) Matrica transformacije za štap tipa g



Vektor sila

lokalni k.s *globalni k.s.*

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{R}^* = \begin{Bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \\ R_4^* \\ R_5^* \end{Bmatrix}$$

Matrica transformacije

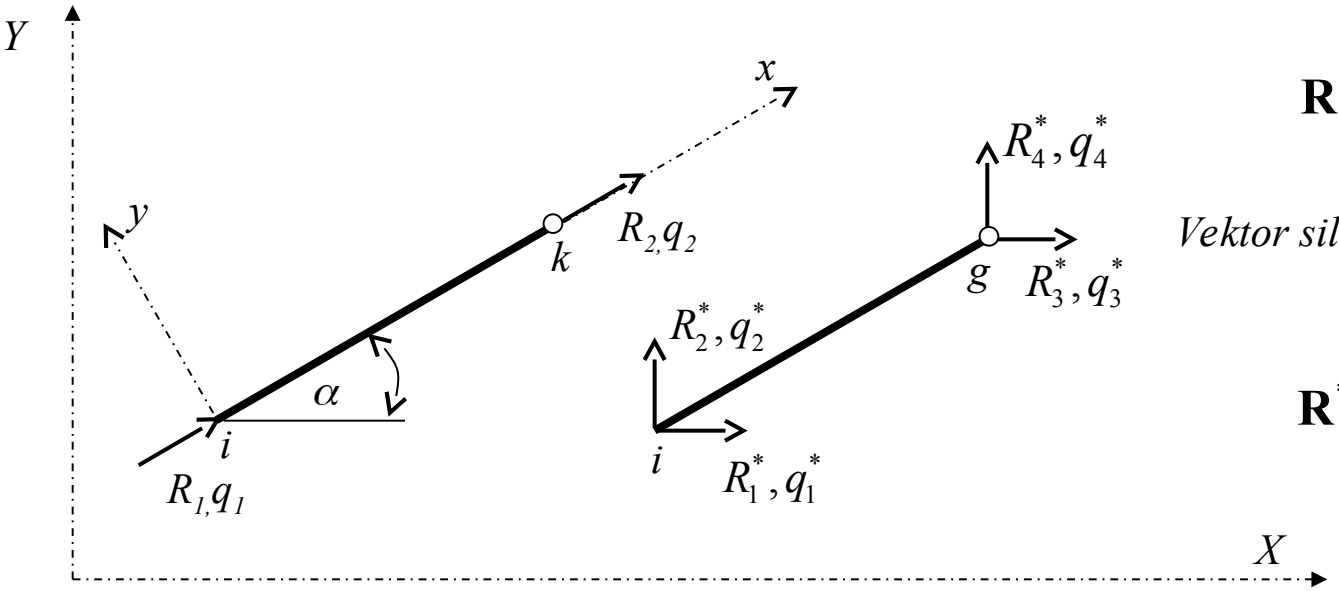
$$\mathbf{T}_g = \left[\begin{array}{ccc|cc} \cos\alpha & \sin\alpha & & & \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & & & \\ & & 1 & & \\ \hline & & & \cos\alpha & \sin\alpha \\ & & & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right]$$

Veze između vektora sila/pomeranja u lokalnom i globalnom koordinatnom sitemu:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{R}^* \quad \wedge \quad \mathbf{q} = \mathbf{T}\mathbf{q}^* \quad \wedge \quad \mathbf{Q} = \mathbf{T}\mathbf{q}^*$$

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{T}^t\mathbf{R} \quad \wedge \quad \mathbf{q}^* = \mathbf{T}^t\mathbf{q} \quad \wedge \quad \mathbf{Q}^* = \mathbf{T}^t\mathbf{Q}$$

c) Matrica transformacije za prost štap



Vektor sila u lokalnom sistemu

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$

Vektor sila u globalnom sistemu

$$\mathbf{R}^* = \begin{Bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \\ R_4^* \end{Bmatrix}$$

Matrica transformacije

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & & \\ & & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

Veze između vektora sila/pomeranja u lokalnom i globalnom koordinatnom sitemu:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{R}^* \quad \wedge \quad \mathbf{q} = \mathbf{T}\mathbf{q}^* \quad \wedge \quad \mathbf{Q} = \mathbf{T}\mathbf{q}^*$$

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{T}^t\mathbf{R} \quad \wedge \quad \mathbf{q}^* = \mathbf{T}^t\mathbf{q} \quad \wedge \quad \mathbf{Q}^* = \mathbf{T}^t\mathbf{Q}$$

10.3.2 Transformacija matrice krutosti

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{Q} / \mathbf{T}^t$$

$$\underbrace{\mathbf{T}^t\mathbf{R}} = \mathbf{T}^t\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{T}^t\mathbf{Q}$$

$$\mathbf{R}^* = \underbrace{\mathbf{T}^t\mathbf{K}\mathbf{T}} \cdot \mathbf{q}^* - \mathbf{Q}^*$$

$$\boxed{\mathbf{R}^* = \mathbf{K}^*\mathbf{q}^* - \mathbf{Q}^*}$$

osnovna jednačina štapa u globalnom koordinatnom sistemu

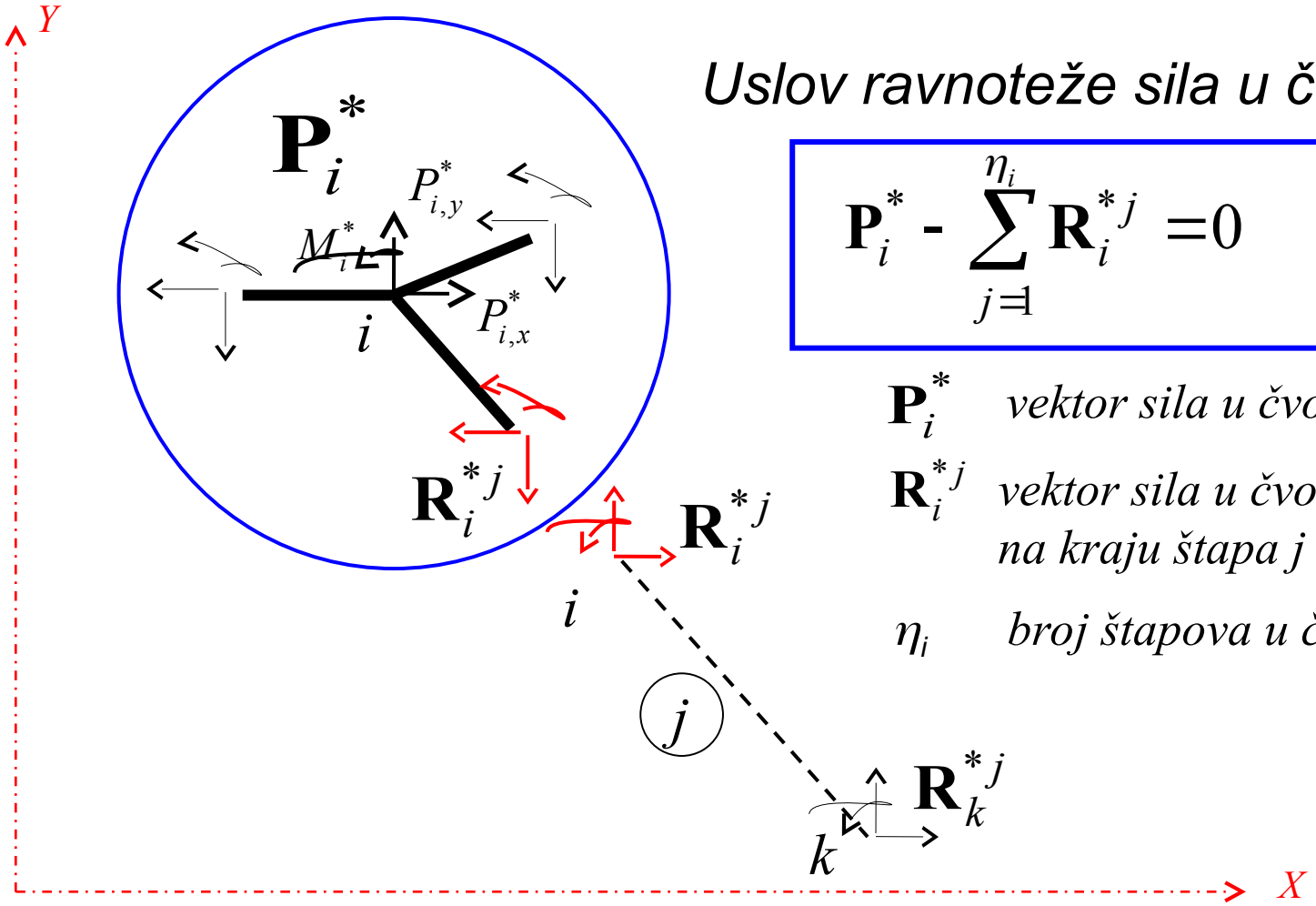
$\mathbf{K}^*$ - matrica krutosti stapa u globalnom koordinatnom sistemu

$$\boxed{\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^t\mathbf{K}\mathbf{T}}$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^t\hat{\mathbf{K}}$$

10.4 Formiranje uslovnih jednačina iz uslova ravnoteže čvorova nosača



Uslov ravnoteže sila u čvoru i:

$$\mathbf{P}_i^* - \sum_{j=1}^{\eta_i} \mathbf{R}_i^{*j} = 0 \qquad (1)$$

$\mathbf{P}_i^*$ *vektor sila u čvoru i,*

$\mathbf{R}_i^{*j}$ *vektor sila u čvoru i na kraju štapa j*

η_i *broj štapova u čvoru i*

Vektor sila u čvoru i
na kraju štapa j

$$\mathbf{R}_i^{*j} = \begin{Bmatrix} R_1^{*j} \\ R_2^{*j} \\ R_3^{*j} \end{Bmatrix}$$

Vektor sila u čvoru i

$$\mathbf{P}_i^{*} = \begin{Bmatrix} P_{i,x}^{*} \\ P_{i,y}^{*} \\ M_i^{*} \end{Bmatrix}$$

Vektor sila na krajevima štapa j

čvorne matrice krutosti štapa

subvektor sila u čvoru i

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_i^* \\ \mathbf{R}_k^* \end{Bmatrix}^j = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{k}_{ii}^* & \mathbf{k}_{ik}^* \\ \hline \mathbf{k}_{ki}^* & \mathbf{k}_{kk}^* \end{array}\right]^j \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i^* \\ \mathbf{q}_k^* \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_i^* \\ \mathbf{Q}_k^* \end{Bmatrix}^j \qquad (2)$$

subvektor pomeranja u čvoru i

subvektor ekviv. opt.

Subvektor sila u čvoru i štapa j

$$\mathbf{R}_i^{*j} = \mathbf{k}_{ii}^{*j}\mathbf{q}_i^* + \mathbf{k}_{ik}^{*j}\mathbf{q}_k^* - \mathbf{Q}_i^{*j} \qquad (3)$$

Ako j-nu (3) uvrstimo u j-nu (1) dobija se

$$\mathbf{P}_i^* - \sum_{j=1}^{\eta_i}\left(\mathbf{k}_{ii}^{*j}\mathbf{q}_i^* + \mathbf{k}_{ik}^{*j}\mathbf{q}_k^* - \mathbf{Q}_i^{*j}\right) = 0 \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{\eta_i} \mathbf{k}_{ii}^{*j} \mathbf{q}_i^* + \sum_{j=1}^{\eta_i} \mathbf{k}_{ik}^{*j} \mathbf{q}_k^* = \mathbf{P}_i^* + \sum_{j=1}^{\eta_i} \mathbf{Q}_i^{*j} \qquad (5)$$

Ako uvedemo obeležavanje:

$$\mathbf{K}_{ii}^* = \sum_{j=1}^{\eta_i} \mathbf{k}_{ii}^{*j} \qquad \mathbf{K}_{ik}^* = \mathbf{k}_{ik}^{*j} \qquad \mathbf{Q}_i^* = \sum_{j=1}^{\eta_i} \mathbf{Q}_i^{*j}$$

dobija se jednačina

$$\mathbf{K}_{ii}^* \mathbf{q}_i^* + \sum_{j=1}^{\eta_i} \mathbf{K}_{ik}^* \mathbf{q}_k^* = \mathbf{P}_i^* + \mathbf{Q}_i^* \qquad i=1,2,..K \qquad (6)$$

Ako se ispišu uslovi ravnoteže za svih K čvorova, dobija se sistem od $N=2K+m+z_u$ jednačina:

$$\boxed{\mathbf{K}^*\mathbf{q}^* = \mathbf{S}^*} \qquad (7)$$

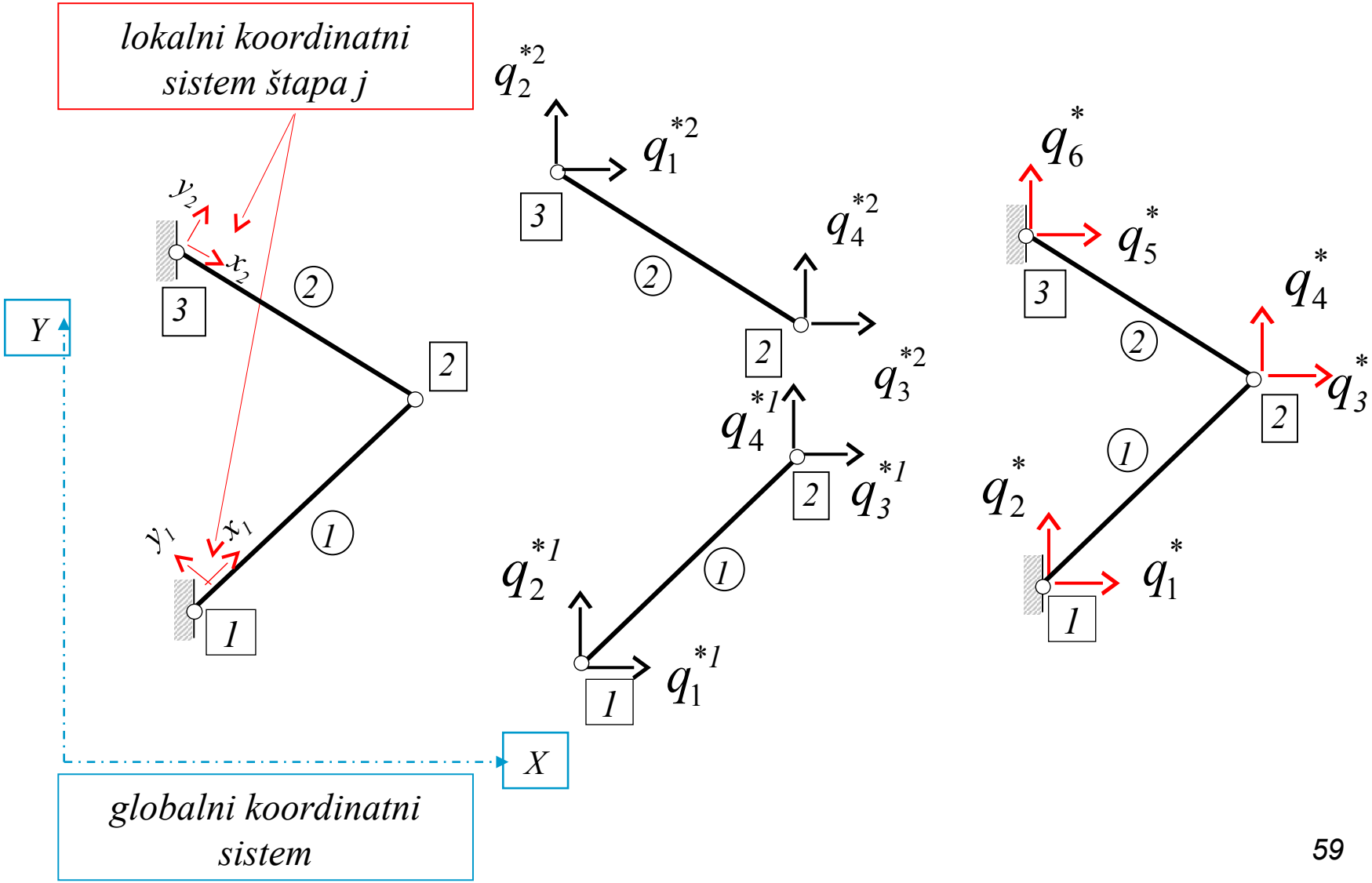
gde je:

$\mathbf{K}^*$ *- matrica krutosti sistema štapova*

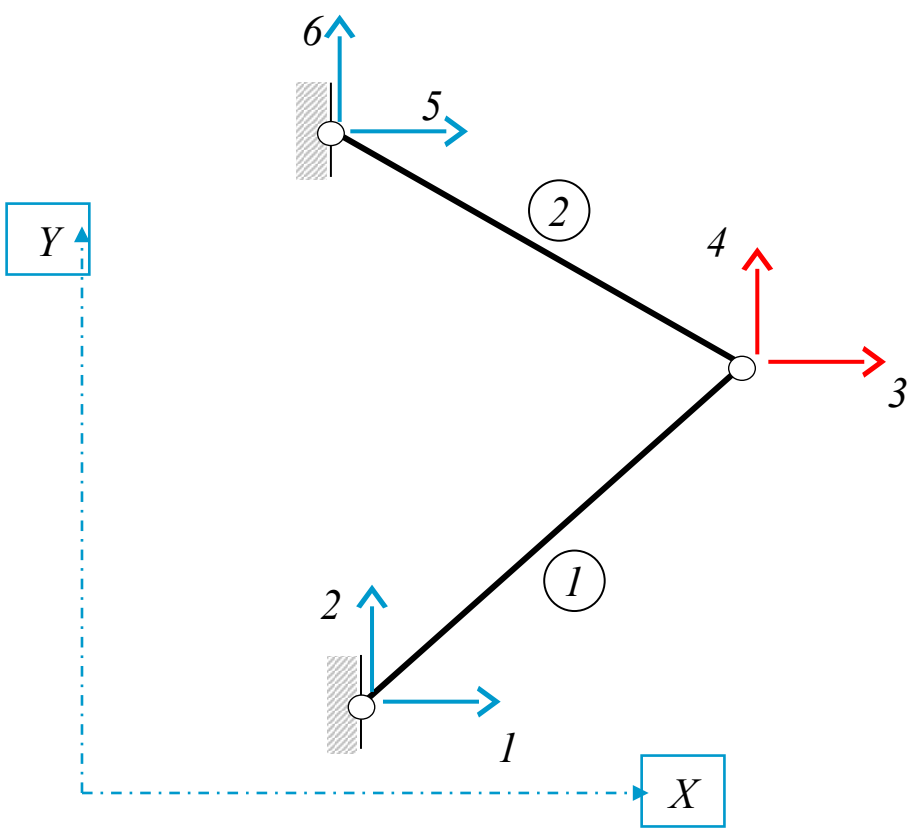
$\mathbf{q}^*$ *- vektor pomeranja čvorova nosača*

$\mathbf{S}^* = \mathbf{P}^* + \mathbf{Q}^*$ *- vektor slobodnih članova*

Formiranje $\boldsymbol{K}^*$ i $\boldsymbol{S}^*$ postupkom kodnih brojeva



Kodiranje – obeležavanje komponenata pomeranja čvorova u globalnom koordinatnom sistemu, brojevima od 1,2,...N



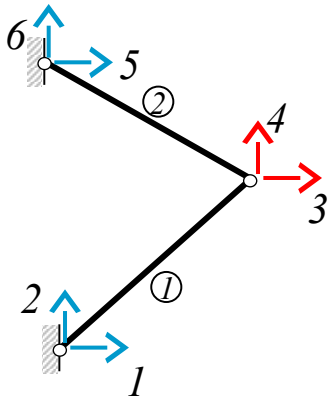
nepoznata pomeranja

poznata pomeranja

PRAVILO

Obeležavaju se prvo sva nepoznata pomeranja pa poznata pomeranja.

Kodiranje vrsata i kolona globalne matrice krutosti elementa $\boldsymbol{K}^{*j}$



$$\mathbf{K}^{*1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{11}^{*1} & k_{12}^{*1} & k_{13}^{*1} & k_{14}^{*1} \\ k_{21}^{*1} & k_{22}^{*1} & k_{23}^{*1} & k_{24}^{*1} \\ k_{31}^{*1} & k_{32}^{*1} & k_{33}^{*1} & k_{34}^{*1} \\ k_{41}^{*1} & k_{42}^{*1} & k_{43}^{*1} & k_{44}^{*1} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

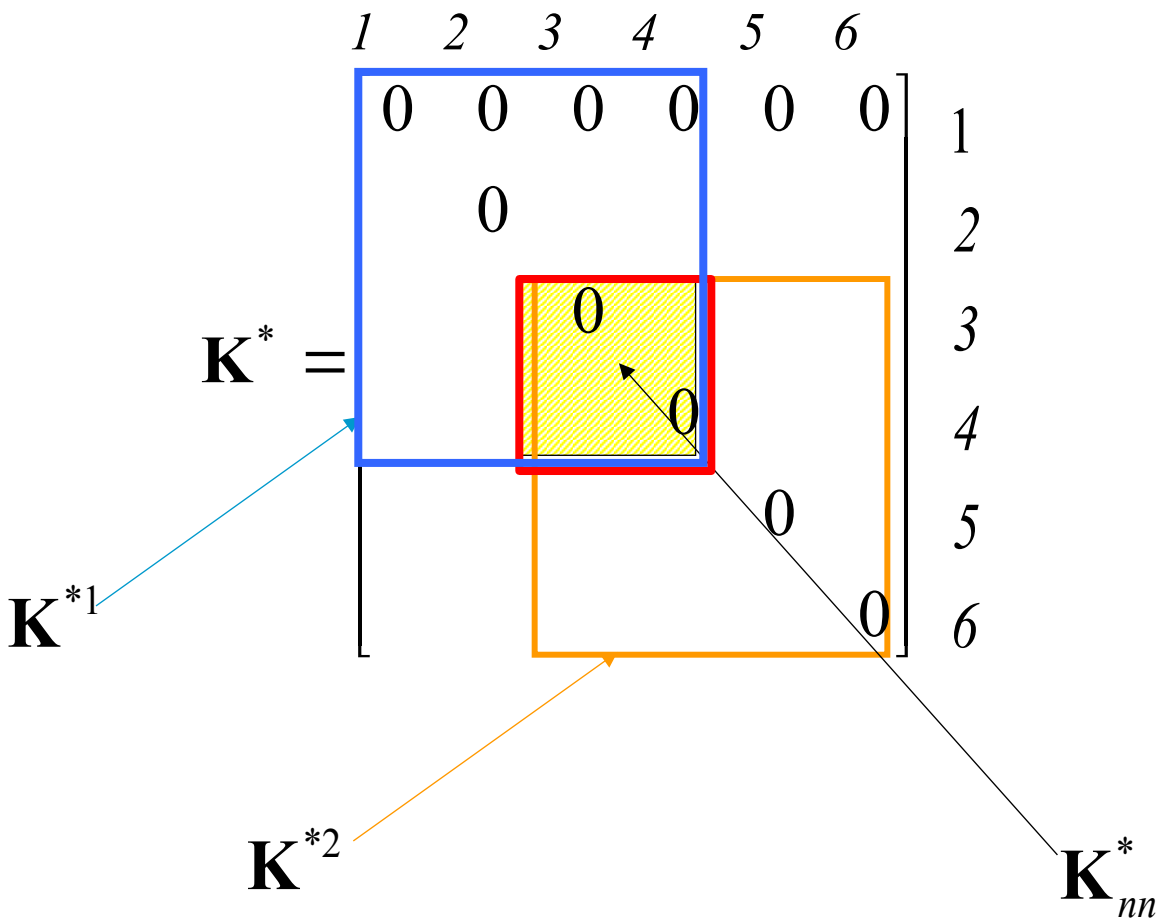
kodni brojevi

$$\mathbf{K}^{*2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{11}^{*2} & k_{12}^{*2} & k_{13}^{*2} & k_{14}^{*2} \\ k_{21}^{*2} & k_{22}^{*2} & k_{23}^{*2} & k_{24}^{*2} \\ k_{31}^{*2} & k_{32}^{*2} & k_{33}^{*2} & k_{34}^{*2} \\ k_{41}^{*2} & k_{42}^{*2} & k_{43}^{*2} & k_{44}^{*2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

kodni brojevi

Kolone i vrste matrice krutosti u globalnom koordinatnom sistemu se obeležavaju brojevima kojima su kodirana pomeranja i sile na krajevima štapa u globalnom koordinatnom sistemu.

Formiranje matrice krutosti sistema ***K****



Matrica krutosti sistema ***K**** *dobija se postavljanjem elemenata matrica krutosti pojedinih štapova na odgovarajuće mesto shodno kodnim brojevima. Pri tome se elementi sa istim kodinim brojevima sabiraju.*

Formiranje matrice krutosti sistema ***K****

$$
\mathbf{K}^{*} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
k_{11}^{1} & k_{12}^{1} & k_{13}^{1} & k_{14}^{1} & & \\
k_{12}^{1} & k_{22}^{1} & k_{23}^{1} & k_{24}^{1} & & \\
k_{31}^{1} & k_{32}^{1} & k_{33}^{1}+k_{33}^{2} & k_{34}^{1}+k_{34}^{2} & k_{31}^{2} & k_{32}^{2} \\
k_{41}^{1} & k_{42}^{1} & k_{43}^{1}+k_{43}^{2} & k_{44}^{1}+k_{44}^{2} & k_{41}^{2} & k_{42}^{2} \\
 & & k_{11}^{2} & k_{12}^{2} & k_{13}^{2} & k_{14}^{2} \\
 & & k_{21}^{2} & k_{22}^{2} & k_{23}^{2} & k_{24}^{2}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
$$

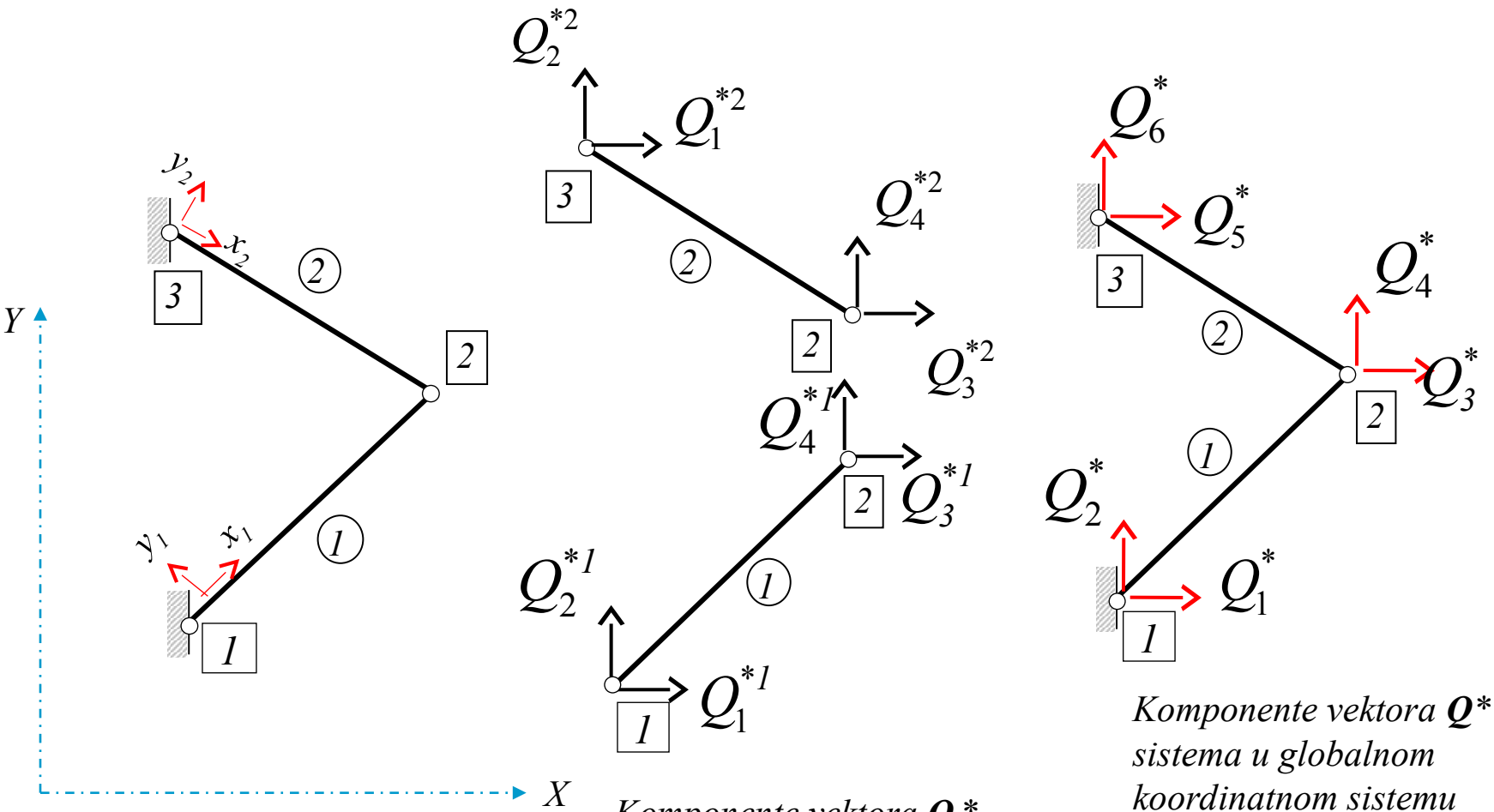
$\mathbf{K}^{*1}$

$\mathbf{K}^{*2}$

$\mathbf{K}^{*}_{nn}$

Matrica krutosti sistema ***K**** *dobija se postavljanjem elemenata matrica krutosti pojedinih štapova na odgovarajuće mesto shodno kodnim brojevima. Pri tome se elementi sa istim kodinim brojevima sabiraju.*

Formiranje vektora ekvivalentnog opterećenja $\boldsymbol{Q}^*$

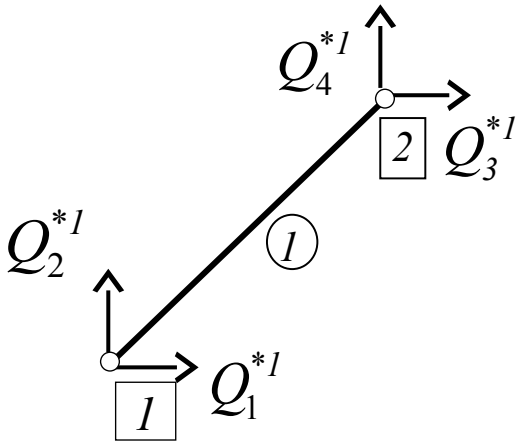


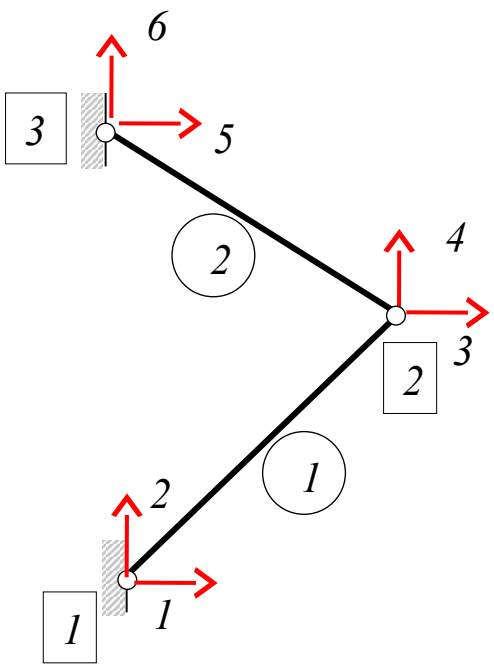
Komponente vektora $\boldsymbol{Q}_j^*$ pojedininih štapova u globalnom koordinatnom sistemu

Komponente vektora $\boldsymbol{Q}^*$ sistema u globalnom koordinatnom sistemu

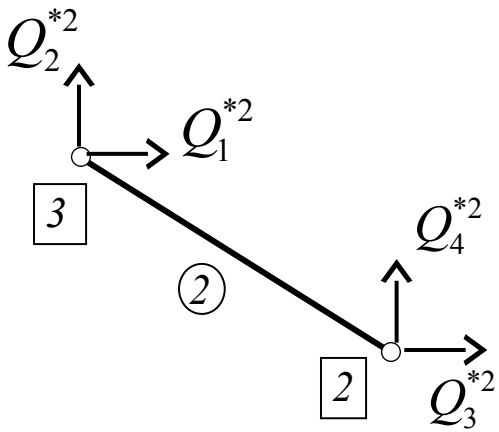
Kodiranje vektora ekvivalentnog opterećenja elemenata

$$\mathbf{Q}_1^* = \begin{Bmatrix} Q_{1,t}^{*1} \\ Q_{2,t}^{*1} \\ Q_{3,t}^{*1} \\ Q_{4,t}^{*1} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$





$$\mathbf{Q}_2^* = \begin{Bmatrix} Q_{1,t}^{*2} \\ Q_{2,t}^{*2} \\ Q_{3,t}^{*2} \\ Q_{4,t}^{*2} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$



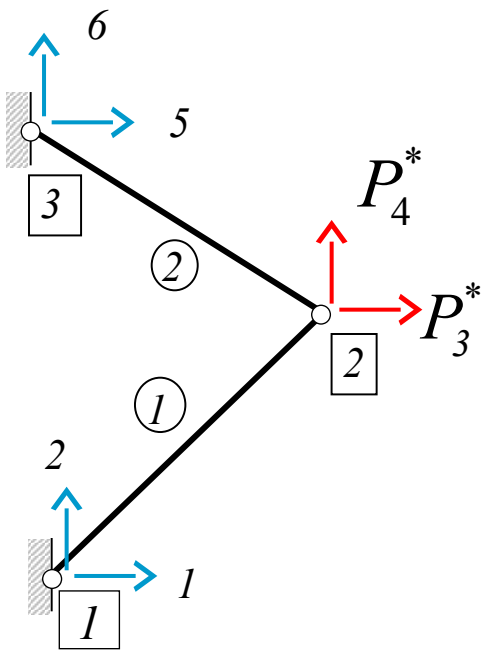
Vektor ekvivalentnog opterećenja sistema

$$\mathbf{Q}^* = \begin{Bmatrix} Q^*_{1,t} \\ Q^*_{2,t} \\ Q^*_{3,t} \\ Q^*_{4,t} \\ Q^*_{5,t} \\ Q^*_{6,t} \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{Bmatrix} Q^{*1}_{1,t} \\ Q^{*1}_{2,t} \\ Q^{*1}_{3,t} + Q^{*2}_{3,t} \\ Q^{*1}_{4,t} + Q^{*2}_{4,t} \\ Q^{*2}_{1,t} \\ Q^{*2}_{2,t} \end{Bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$\mathbf{Q}^*_n$

*Vektor ekvivalentnog opterećenja sistema **Q*** dobija se postavljanjem elemenata vektora ekvivalentnog opterećenja pojedinih štapova na odgovarajuće mesto u vektoru sistema, shodno kodnom broju. Vektori sa istim kodinim brojevima se sabiraju.*

Vektor koncentrisanih sila u čvorovima



$$\mathbf{P}^* = \begin{Bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ P_3^* \\ P_4^* \\ P_5^* \\ P_6^* \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \qquad \mathbf{P}_n^*$$

Sile u slobodnim čvorovima - poznate sile

Sile u oslonačkim čvorovima - nepoznate sile

*Vektor sila u čvorovima sistema **P*** dobija se postavljanjem elemenata vektora sila na odgovarajuće mesto u vektoru sistema prema kodnom broju.*

Vektor slobodnih članova

$$\begin{Bmatrix} S_1^* \\ S_2^* \\ S_3^* \\ S_4^* \\ S_5^* \\ S_6^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^* + P_1^* \\ Q_2^* + P_2^* \\ Q_3^* + P_3^* \\ Q_4^* + P_4^* \\ Q_5^* + P_5^* \\ Q_6^* + P_6^* \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$\mathbf{s}_n^*$

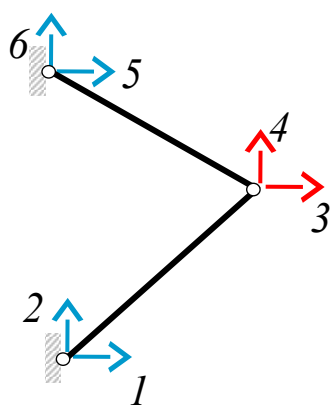
Vektor slobodnih članova se dobija sabiranjem vektora $\boldsymbol{Q}^*$ *i* $\boldsymbol{P}^*$.

10.5 Rešavanje sistema jednačina

$$\mathbf{K}^*\mathbf{q}^* = \mathbf{S}^*$$

Matrica krutosti sistema je singularna, det ***K*=0****.*

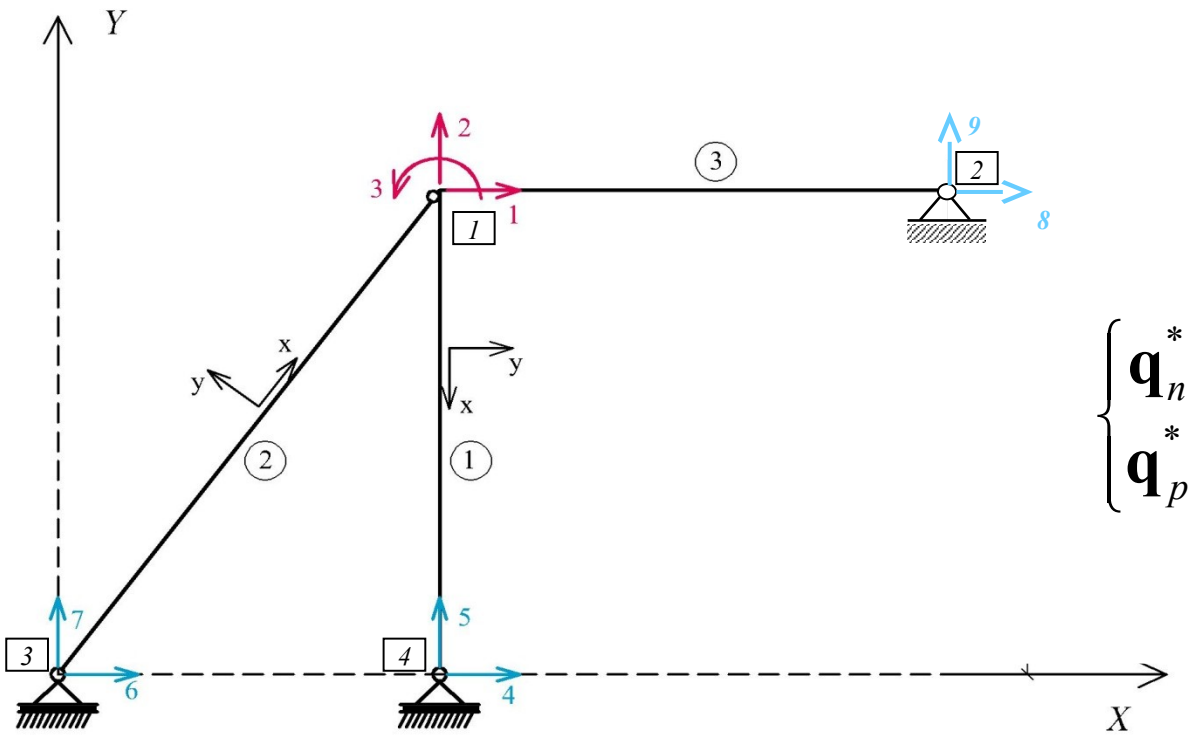
Matrica ***K*** *i vektori* ***S*** *i* ***q*** *se parcionšu po nepoznatim* ($\mathbf{q}^*_n$) *i poznatim pomeranjima* ($\mathbf{q}^*_p$)*:*



$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}^*_n \\ \mathbf{q}^*_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q^*_1 \\ q^*_2 \\ \boxed{q^*_3} \\ \boxed{q^*_4} \\ q^*_5 \\ q^*_6 \end{Bmatrix}$$

nepoznata pomeranja

Ako prvo numerišemo nepoznata pa poznata pomeranja, dobijaju se parcionisane matrica krutosti i vektori sila, tj. pomeranja.



$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_n^* \\ \mathbf{q}_p^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boxed{\begin{matrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \end{matrix}} \\ q_p^* \end{Bmatrix}$$

nepoznata pomeranja

Uslovne jednačine se parcionišu po nepoznatim (n) i poznatim pomeranjima (p).

Parcionisane uslovne jednačine:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^*_{nn} & \mathbf{K}^*_{np} \\ \mathbf{K}^*_{pn} & \mathbf{K}^*_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^*_n \\ \mathbf{q}^*_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}^*_n \\ \mathbf{S}^*_p \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (I) \\ (II) \end{matrix}$$

Nepoznata pomeranja $\mathbf{q}^*_n$ *se dobijaju iz jednačine I:*

$$\boxed{\mathbf{K}^*_{nn}\mathbf{q}^*_n + \mathbf{K}^*_{np}\mathbf{q}^*_p = \mathbf{S}^*_n} \Rightarrow \mathbf{K}^*_{nn}\mathbf{q}^*_n = \left[\mathbf{S}^*_n - \mathbf{K}^*_{np}\mathbf{q}^*_p\right]$$

$\mathbf{q}^*_n$ - *vektor nepoznatih pomeranja*

$\mathbf{q}^*_p$ - *vektor poznatih (zadatih) pomeranja*

Mogu nastupiti 2 slučaja:

I) $\mathbf{q}_p^* = 0$ - *homogeni granični uslovi (nepomerljivi oslonci)*

$$\boxed{\mathbf{K}_{nn}^* \mathbf{q}_n^* = \mathbf{S}_n^*} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_n^*$$

II) $\mathbf{q}_p^* \neq 0$ - *nehomogeni granični uslovi (pomerljivi oslonci)*

$$\boxed{\mathbf{K}_{nn}^* \mathbf{q}_n^* = \mathbf{S}_n^* - \mathbf{K}_{np}^* \mathbf{q}_p^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_n^*}$$

Ako je $\mathbf{S}_n^* = 0$ *(neopterećen nosač, zadato pomeranje oslonaca)*

$$\boxed{\mathbf{K}_{nn}^* \mathbf{q}_n^* = - \mathbf{K}_{np}^* \mathbf{q}_p^*} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_n^*$$

10.6 Određivanje reakcija oslonaca

Reakcije oslonaca su jednake silama u čvorovima u kojima su poznata pomeranja. Njih određujemo iz jednačine II:

$$\mathbf{S}_p^* = \mathbf{K}_{pn}^* q_n^* + \mathbf{K}_{pp}^* q_p^*$$

$$\mathbf{S}_p^* = \mathbf{P}_p^* + \mathbf{Q}_p^* \Rightarrow \mathbf{P}_p^* = \mathbf{S}_p^* - \mathbf{Q}_p^*$$

Vektor sila u osloncima

Vektor reakcija oslonaca

Vektor ekvivalentnog opterećenja

10.7 Određivanje sila na krajevima štapova

Vektori sila na krajevima elementa štapa j se dobija iz osnovne jednačine štapa:

$$\mathbf{R}^j = \mathbf{K}^j \mathbf{q}^j - \mathbf{Q}^j$$ *- vektor sila u lokalnom sistemu*

$$\mathbf{q}^j = \mathbf{T}^j \mathbf{q}^{*j}$$ *- veza između v. pomeranja u lokalnom i globalnom k.s.*

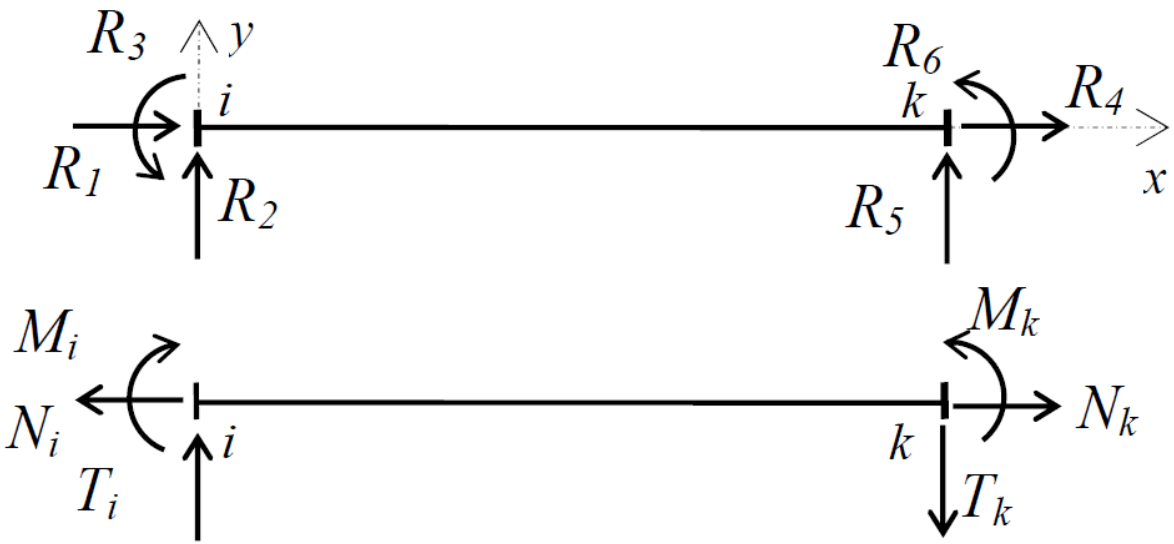
$$\mathbf{R}^j = \mathbf{K}^j \mathbf{T}^j \mathbf{q}^{*j} - \mathbf{Q}^j$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}^j \mathbf{T}^j}$$ *- matrica krutosti koja daje vezu između sila u lokalnom k.s. i pomeranja u globalnom k.s.*

$$\boxed{\mathbf{R}^j = \hat{\mathbf{K}}^j \mathbf{q}^{*j} - \mathbf{Q}^j}$$ *-veza između v. sila u lokalnom k.s. i pomeranja u globalnom k.s. za element j*

Vektor sila u l.s. *Vektor pomeranja u g.s.*

Konvencija znaka presečnih sila



$$N_i = -R_1,\ \ T_i = R_2,\ M_i = -R_3$$

$$N_k = R_4,\ \ T_k = -R_5,\ M_k = R_6$$

10.8 Algoritam poračuna

- *Numerišu se čvorovi i elementi nosača, kodiraju se pomeranja čvorova i određuje broj nepoznatih pomeranja;*
- *Sračuna se geometrija svih elemenata (dužina, površina i moment inercije poprečnih preseka, uglovi nagiba štapova α_j prema X-osi i cosα_j i sinα_j);*
- *Sračunavaju se matrice krutosti $\boldsymbol{K}^j$ i vektori ekvuivalentnog opterećenja $\boldsymbol{Q}^j$ elemenata u lokalnom sistemu;*
- *Sračunavaju se matrice transformacije $\boldsymbol{T}^j$, matrice krutosti $\boldsymbol{K}^{*j}$ i vektori ekvuivalentnog opterećenja $\boldsymbol{Q}^{*j}$ elemenata u globalnom koordinatnom sistemu;*
- *Sračunavaju se matrice krutosti $\boldsymbol{K}^*$ i vektor ekvuivalentnog opterećenja $\boldsymbol{Q}^*$ sistema;*
- *Formira se vektor koncentrisanih sila u čvorovima $\boldsymbol{P}^*$ u globalnom koordinatnom sistemu;*
- *Sračuna se vektor slobodnih članova $\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{P}^* + \boldsymbol{Q}^*$;*
- *Rešava se jednačina sistema i određuje vektor nepoznatih pomeranja čvorova $\boldsymbol{q}^*_n$;*
- *Sračunavaju se reakcije i vektori sila na krajevima štapova.*

10.9 Rešetkasti nosači

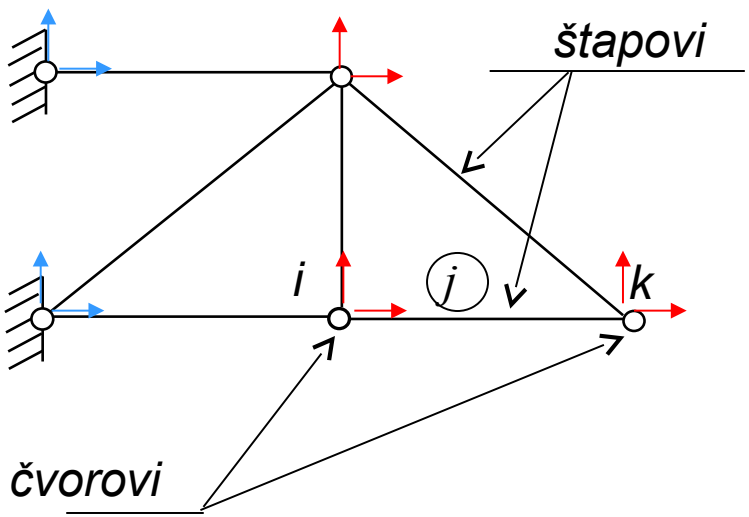
Rešetka u ravni

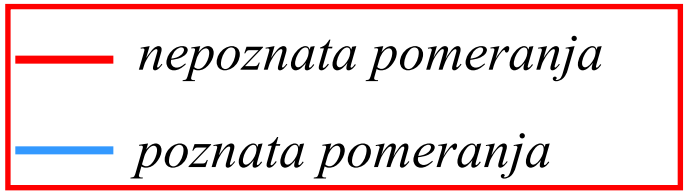
Osnovni element rešetkastog nosača je prost štap m, koji je u čvorovima i i k zglavkasto vezan sa ostalim delovima nosača (sl.1). Štap je izložen aksijalnom naprezanju. Pretpostavlja se da je štap konstantnog poprečnog preseka.

U svakom čvoru postoji 2 stepena slobode pomeranja u globalnom koordinatnom sistemu.

Ukupan broj pomeranja N=2K, gde je K br. čvorova nosača.

Broj nepoznatih pomeranja $n=2K-z_o$

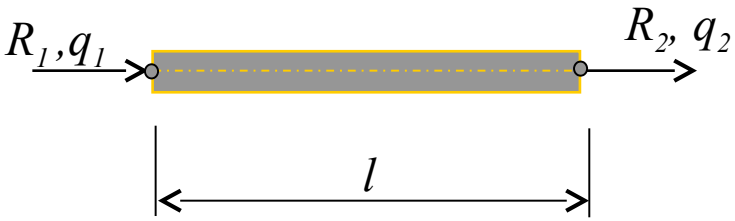




Slika 1

Element rešetke je prost štap.

Vektori sila $\boldsymbol{R}$ *i pomeranja* $\boldsymbol{q}$ *u lokalnom koordinatnom sistemu su:*

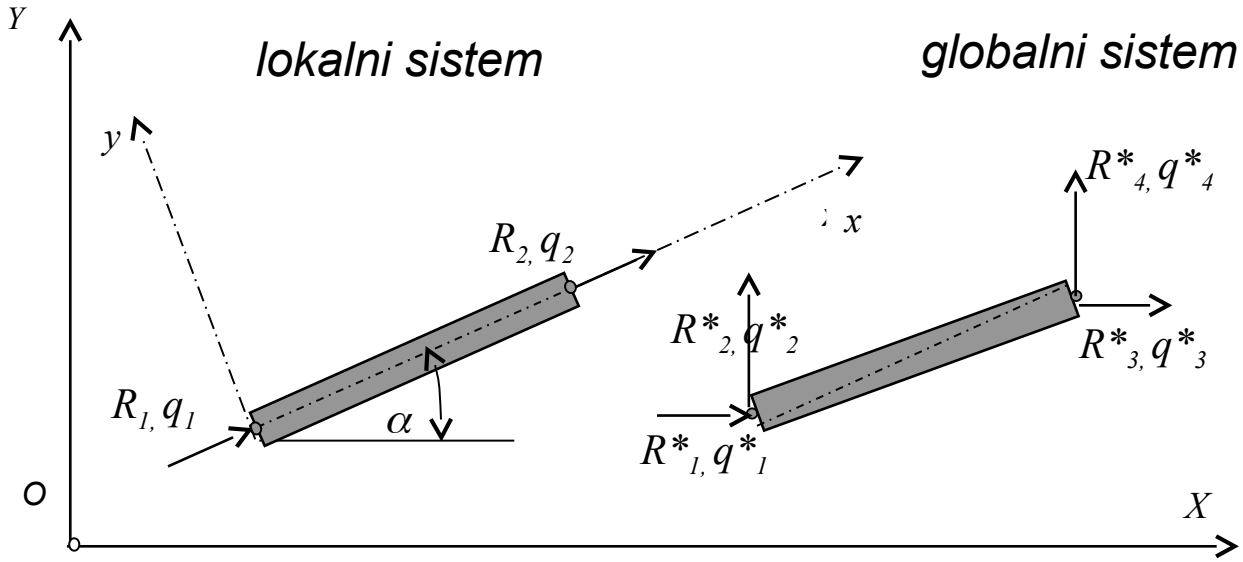


$$R = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

Matrica krutosti prostog štapa je jednaka matrici krutosti za aksijalno naprezanje.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformacija koordinatnog sistema



Vektor sila i pomeranja u globalnom koordinatnom sistemu: $\mathbf{q}^* = \begin{Bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \end{Bmatrix}$ $\mathbf{R}^* = \begin{Bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \\ R_4^* \end{Bmatrix}$

Matrica transformacije

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^* \qquad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{Q}^*$$

Matrice krutosti

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\mathbf{T}$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{K}} = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^t\,\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^t\,\mathbf{K}\,\mathbf{T}$$

$$\boxed{\mathbf{K}^* = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} \mathrm{K}_e & -\mathrm{K}_e \\ -\mathrm{K}_e & \mathrm{K}_e \end{bmatrix}}$$

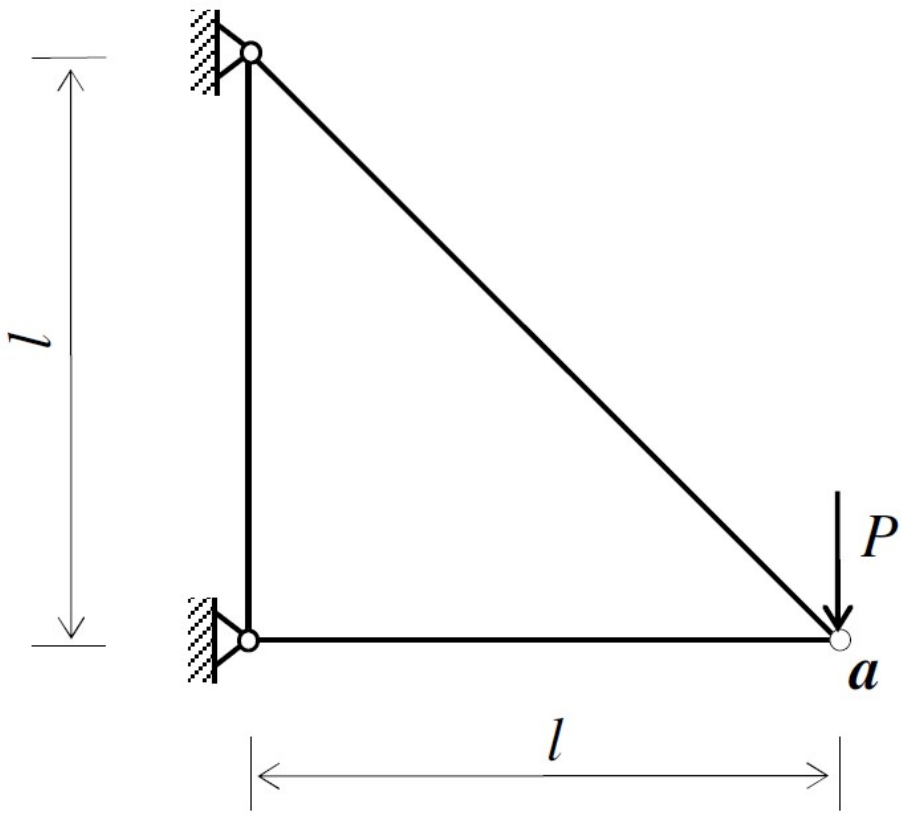
$$\mathrm{K}_e = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

10.9.1 Algoritam poračuna rešetke

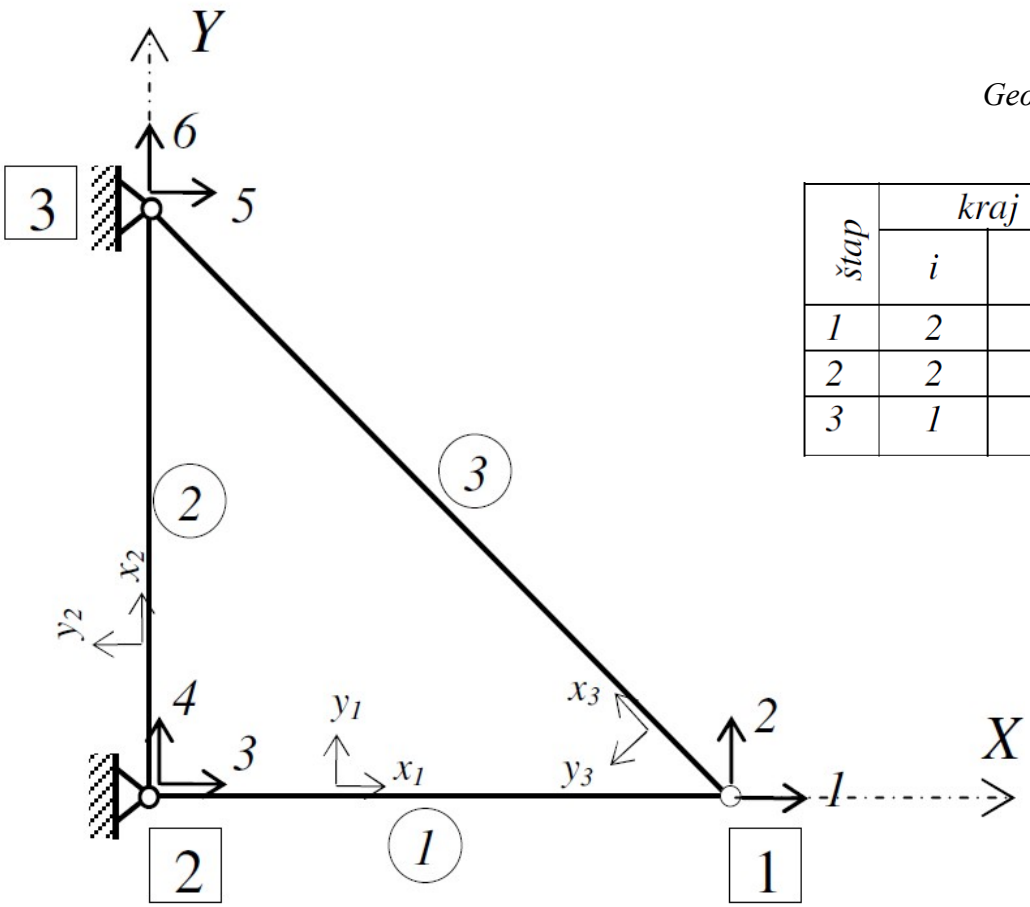
- *Numerišu se čvorovi i elementi nosača, kodiraju se pomeranja čvorova i određuje broj nepoznatih pomeranja;*
- *Sračunava se geometrija svih elemenata (dužina, površina poprečnih preseka, uglovi nagiba štapova α_j prema X-osi i $\cos\alpha_j$ i $\sin\alpha_j$);*
- *Sračunavaju se matrice krutosti $\boldsymbol{K}^{*j}$ i vektori ekvuivalentnog opterećenja $\boldsymbol{Q}^{*j}$ elemenata u globanom koordinatnom sistemu;*
- *Sračunavaju se matrice krutosti $\boldsymbol{K}^*$ i vektor ekvuivalentnog opterećenja $\boldsymbol{Q}^*$ sistema;*
- *Formira se vektor koncentrisanih sila u čvorovima $\boldsymbol{P}^*$ u globalnom koordinatnom sistemu;*
- *Sračunava se vektor slobodnih članova $\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{P}^* + \boldsymbol{Q}^*$;*
- *Reši se jednačina sistema i odrediti vektor nepoznatih pomeranja čvorova $\boldsymbol{q}^*_n$;*
- *Sračunavaju se reakcije i vektori sila na krajevima štapova.*

Primer 1

*Odrediti pomeranje čvora **a** i sile u štapovima rešetkastog nosača na slici usled zadatog opterećenja, primenom matričnog postupka.*



Nepoznata pomeranja: 1 i 2



Geometrija nosača:

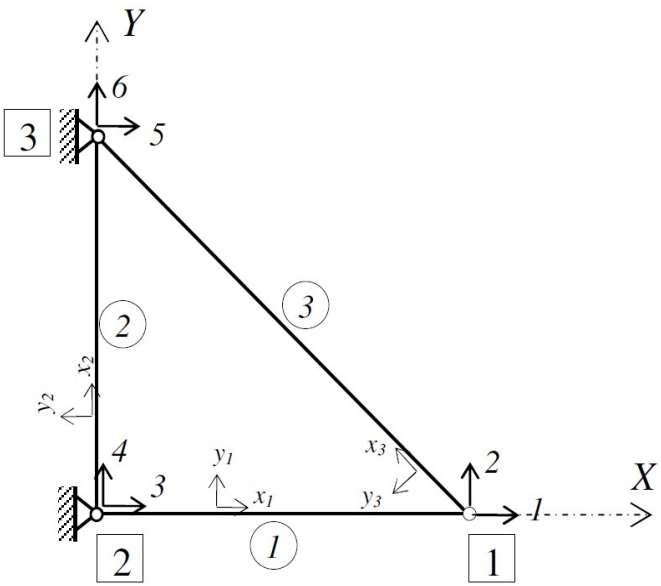
štap	kraj		l	α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
	i	k				
1	2	1	l	0	1	0
2	2	3	l	90	0	1
3	1	3	$l\sqrt{2}$	135	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

Matrice krutosti štapova u globalnom koordinatnom sistemu:

$$\mathbf{K}^* = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} \mathrm{K}_e & -\mathrm{K}_e \\ -\mathrm{K}_e & \mathrm{K}_e \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{K}_\mathrm{e} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

Matrice krutosti štapova u globalnom koordinatnom sistemu



$$\mathbf{K}_1^* = \frac{EF}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

$$\mathbf{K}_2^* = \frac{EF}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$$\mathbf{K}_3^* = \frac{EF\sqrt{2}}{4l}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & \boxed{-1} & -1 & 1 \\ -1 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Matrica krutosti sistema se formira postupkom kodnih brojeva:

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^*_{nn} & \mathbf{K}^*_{np} \\ \mathbf{K}^*_{pn} & \mathbf{K}^*_{pp} \end{bmatrix} = \frac{EF}{4l} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cccc} \boxed{4+\sqrt{2}} & \boxed{-\sqrt{2}} & -4 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \boxed{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \hline -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -4 & -\sqrt{2} & 4+\sqrt{2} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}.$$

Submatrica krutosti uz nepoznata pomeranja

$$\mathbf{K}_{nn}^{*} = \frac{EF}{4l}\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 4+\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Inverzna matrica :

$$\left(\mathbf{K}_{nn}^{*}\right)^{-1} = \frac{l}{EF}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2\sqrt{2}+1 \end{bmatrix}$$

Vektor slobodnih članova

$$\mathbf{S}_{n}^{*} = \mathbf{P}^{*} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}.$$

Uslovna jednačina:

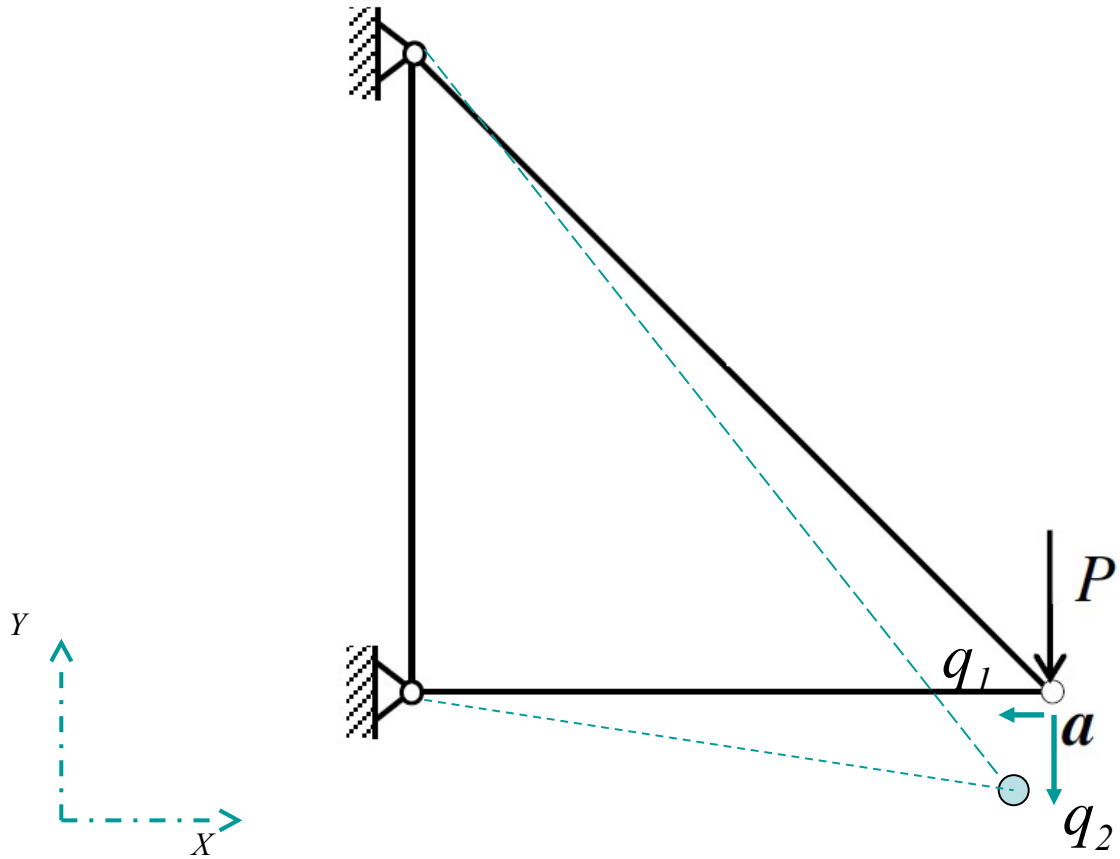
$$\mathbf{K}_{nn}^{*} \cdot \mathbf{q}_{n}^{*} = \mathbf{S}_{n}^{*}$$

$$\frac{EF}{4l}\begin{bmatrix} 4+\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1^{*} \\ q_2^{*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

Vektor nepoznatih pomeranja $\mathbf{q}_{n}^{*} = \left(\mathbf{K}_{nn}^{*}\right)^{-1}\mathbf{S}_{n}^{*}$

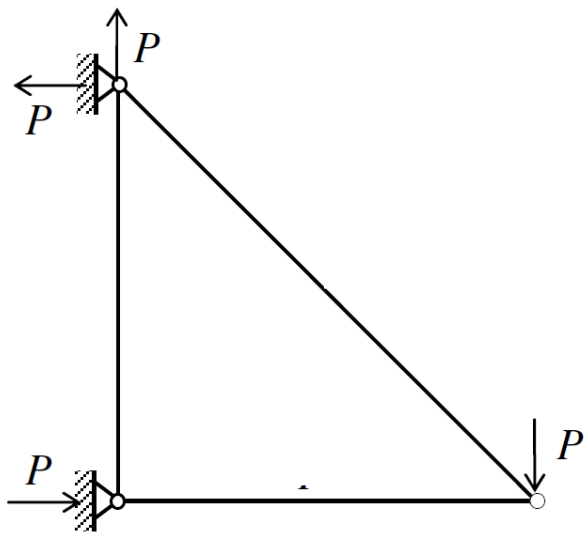
$$\begin{Bmatrix} q_1^{*} \\ q_2^{*} \end{Bmatrix} = \frac{-Pl}{EF}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1+2\sqrt{2} \end{Bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Pomeranja



Reakcije oslonaca

$$\mathbf{P}_p^* = \mathbf{S}_p^* = \mathbf{K}_{pn}^* q_n^* = -\frac{EF}{4l}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{Pl}{EF}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1+2\sqrt{2} \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$



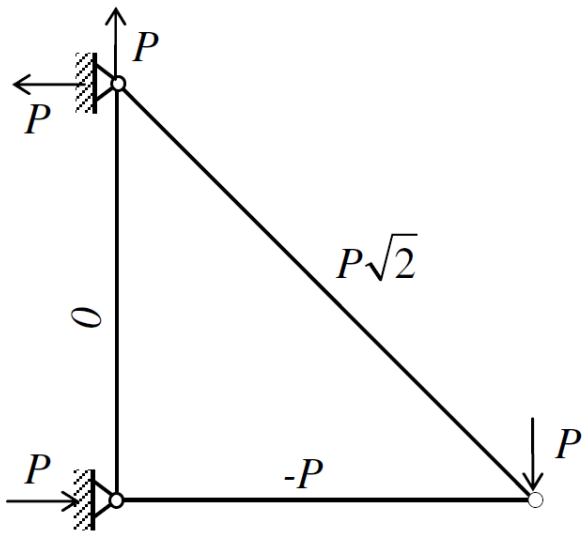
Sile u štapovima rešetke dobijaju se iz jednačine $\mathbf{R}^j = \hat{\mathbf{K}}^j \mathbf{q}^{*j}$ *:*

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{Pl}{EF}\right)\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1+2\sqrt{2} \end{Bmatrix}\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} = P\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

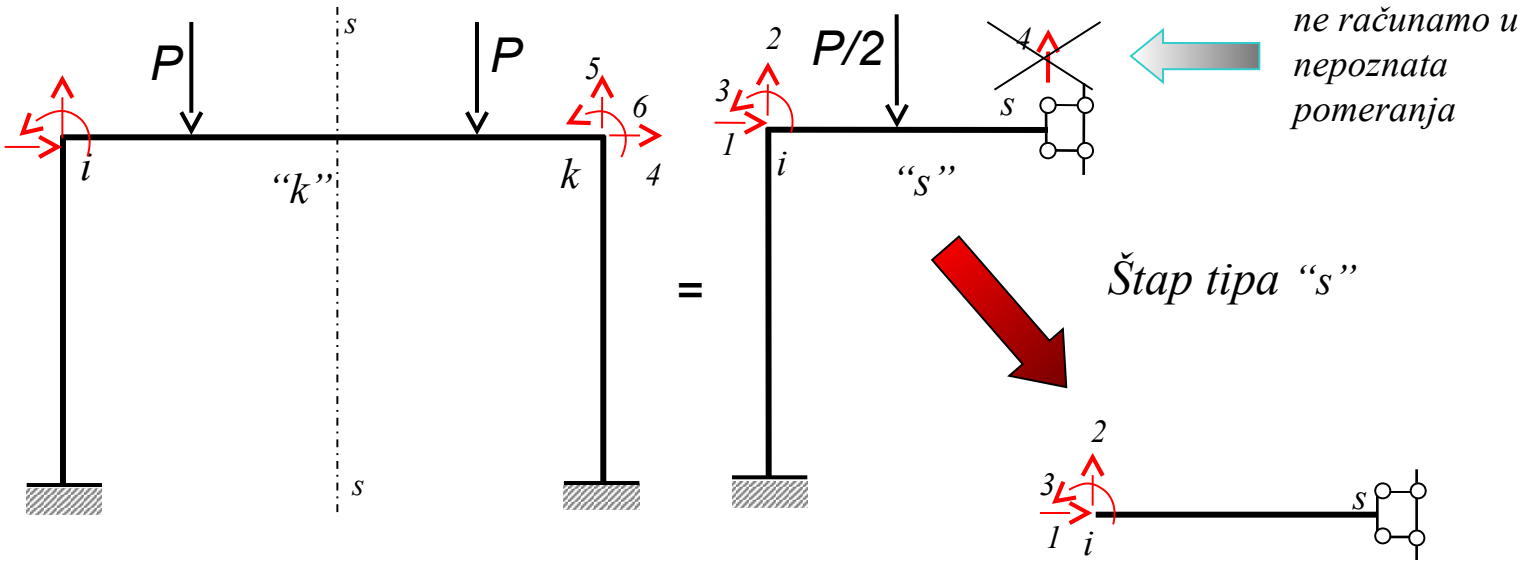
$$\mathbf{R}_3 = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{Pl}{EF}\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1+2\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} = P\begin{Bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}$$



Reakcije i sile u štapovima

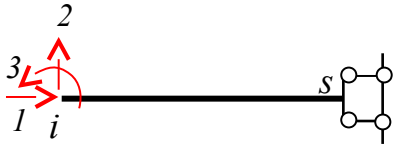
10.11 Simetrični nosači. Štap tipa *s*

- *Štap tipa "s" se javlja kod simetričnih nosača koji su opterećeni simetričnim opterećenjem.*
- *To je štap tipa "k" koga polovi osa simetrije, slika 1.*

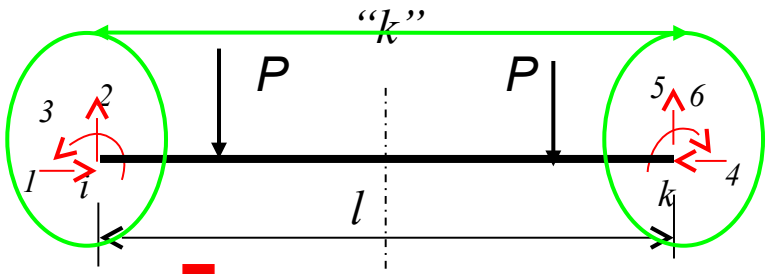


Slika 1

Matrica krutosti štapa tipa *s*



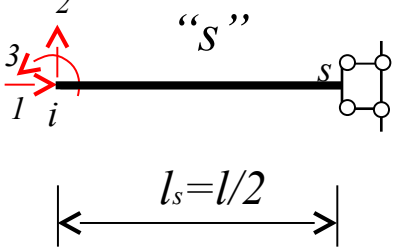
Štap tipa "k" pri simetričnom opterećenju



vektor pomeranja štapa

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ -q_1 \\ q_2 \\ -q_3 \end{Bmatrix}$$

Štap tipa "s"



vektor pomeranja

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

vektor sila

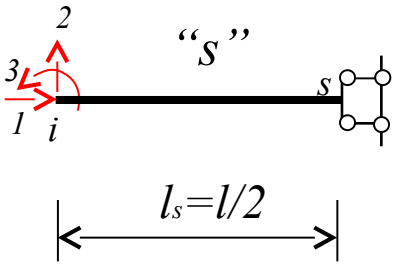
$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix}$$

Veza između vektora sila i vektora pomeranja na krajevima štapa tipa "k" pri simetričnom opterećenju data je matričnom jednačinom:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^3} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{v} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ -q_1 \\ q_2 \\ -q_3 \end{Bmatrix} \qquad (a)$$

*Veza između vektora sila i vektora pomeranja na kraju i štapa tipa "s" se dobija iz prve tri jednačine (a) jednostavnim množenjem elemenata matrice krutosti **K** vektorom pomeranja **q**.*

U matričnom obliku se dobija:



$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dfrac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\dfrac{EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

Veza između vektora sila i pomeranja štapa tipa s

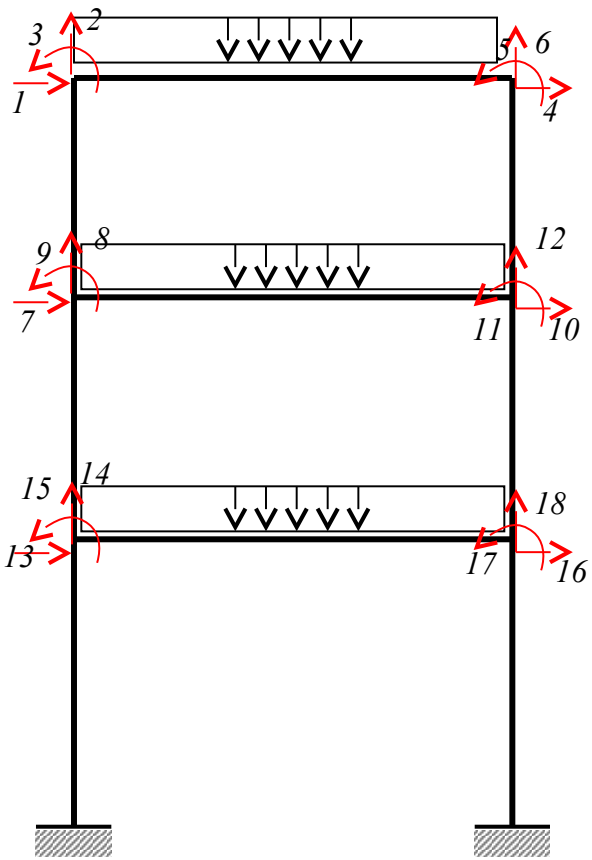
Matrica krutosti štapa tipa "s"

$$\mathrm{K}_s = \begin{bmatrix} 2\dfrac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\dfrac{EI}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{EF}{l_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{EI}{l_s} \end{bmatrix}$$

l – *dužina štapa tipa "k"*

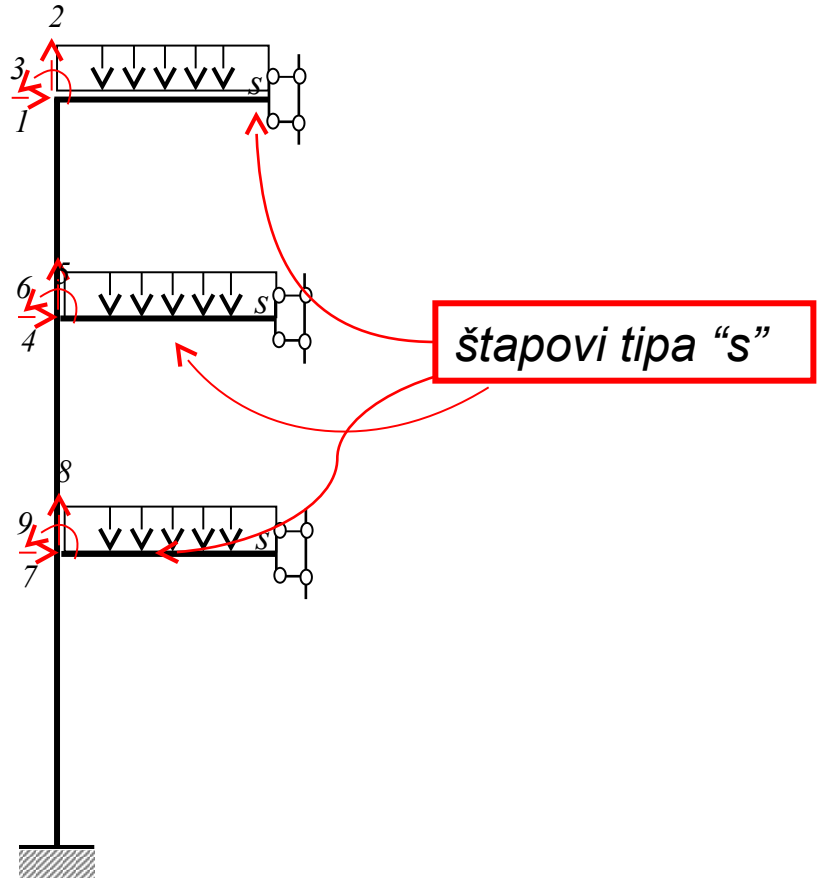
$l_s = l/2$ – *dužina štapa tipa "s"*

Primer



broj nepoznatih: n=18

=



broj nepoznatih: n=9