ТЕОРИЈА КОНСТРУКЦИЈА – Б2Х2ТК

ПРЕДАВАЊЕ 5 (07.03.2022.)

www.grf.bg.ac.rs

Студијски програм: ГРАЂЕВИНАРСТВО
Модул: ХИДРОТЕХНИКА И ВОДНО-ЕКОЛОШКО ИНЖЕЊЕРСТВО
Година / семестар: 2. година / 4. семестар
Школска година: 2021/22.

Наставници: в. проф. Витомир Рацић, доц. др Марко Радишић, доц. др Невенка Коларевић

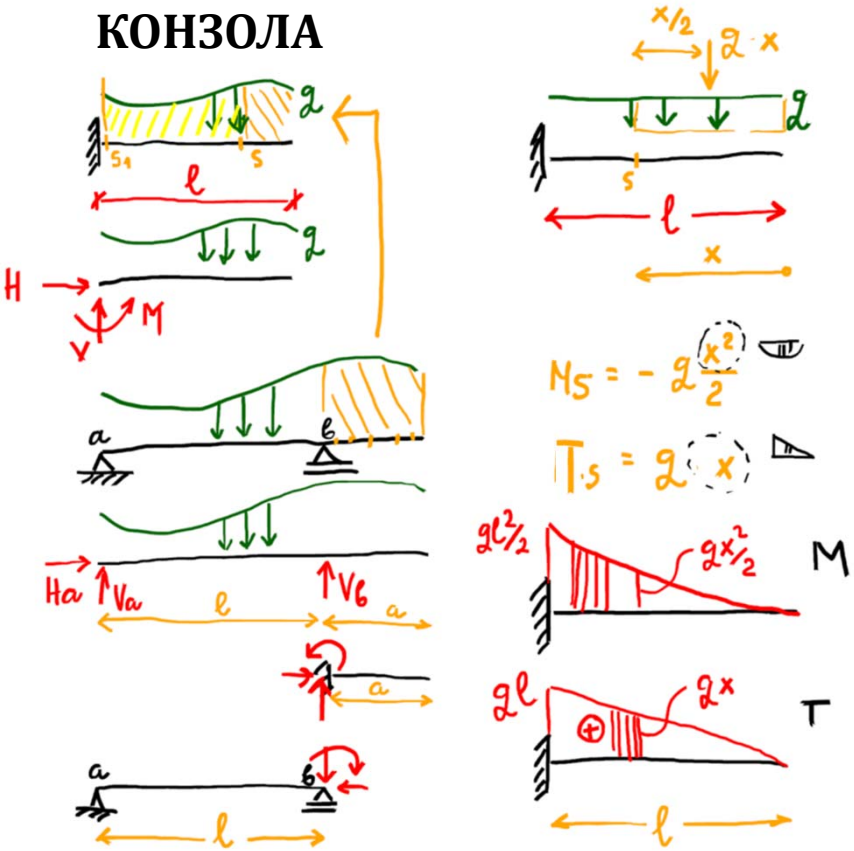
Грађевински факултет Универзитета у Београду - Катедра за техничку механику и теорију конструкција

Сва ауторска права аутора презентације и/или видео снимака су заштићена. Снимак или презентација се могу користити само за наставу на даљину студента Грађевинског факултета Универзитета у Београду у школској 2021/2022 и не могу се користити за друге сврхе без писмене сагласности аутора материјала.

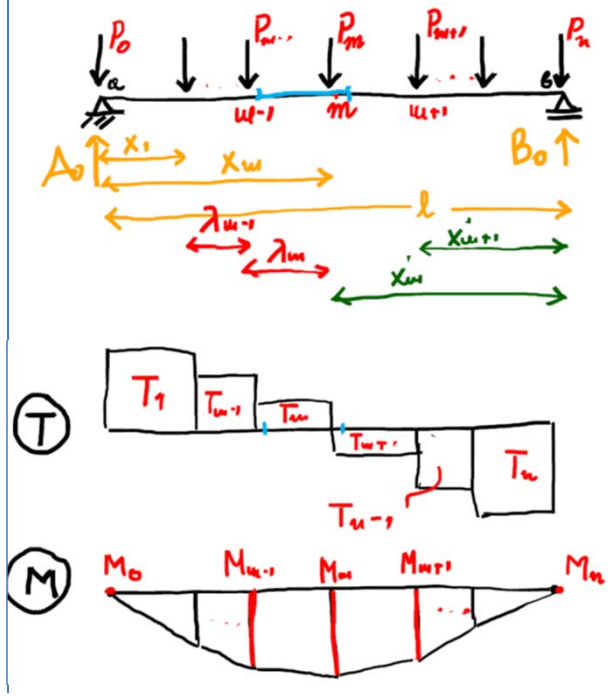
3. ПУНИ НОСАЧИ: Са претходног предавања

- **3.1. Носачи који се састоје из 1 кинематички круте плоче**

КОНЗОЛА



- 3.1.1. Нумерички поступак одређивања сила у пресецима просте греде оптерећене концентрисаним силама

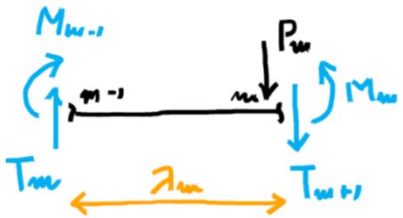


$$\sum M_a = 0: \quad \sum_{m=0}^{n} P_m x_m - B_0 \cdot l = 0$$

$$\boxed{B_0 = \frac{1}{l}\sum_{m=0}^{n} P_m x_m}$$

$$\sum M_b = 0: \quad \sum_{m=0}^{n} P_m x_m' - A_0 \cdot l = 0$$

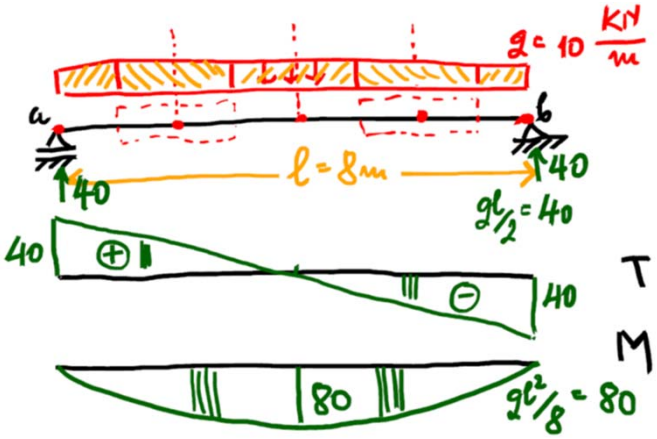
$$\boxed{A_0 = \frac{1}{l}\sum_{m=0}^{n} P_m x_m'}$$

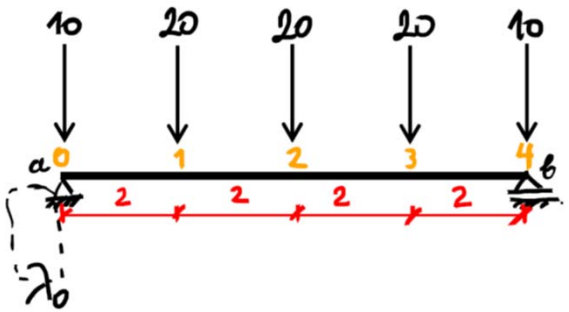


$$\boxed{\begin{aligned} T_{m+1} &= T_m - P_m \\ M_m &= M_{m-1} + T_m \lambda_m \end{aligned}}$$

3. ПУНИ НОСАЧИ: Са претходног предавања

- **3.1. Носачи који се састоје из 1 кинематички круте плоче**
  - 3.1.1. Нумерички поступак одређивања сила у пресецима просте греде оптерећене концентрисаним силама





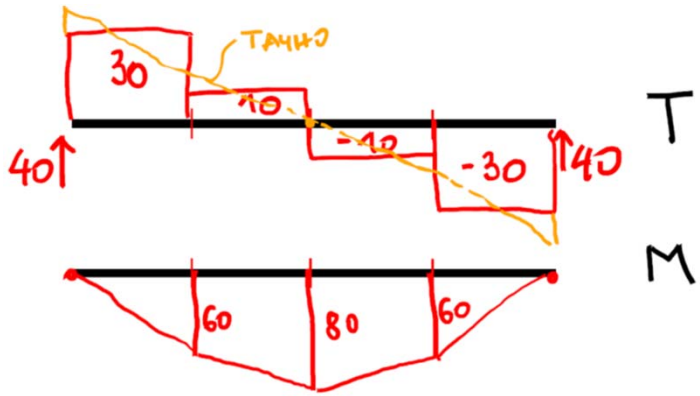
m	λ_m	x'_m	P_m	$P_m x'_m$	T_m	$T_m \lambda_m$	M_m
0	—	8	10	80	40	—	0
1	2	6	20	120	30	60	60
2	2	4	20	80	10	20	80
3	2	2	20	40	-10	-20	60
4	2	0	10	0	-30	-60	0
		Σ		320	-40		

$A_0 = \Sigma P_m x'_m \cdot 1/l$

$B_0 = \Sigma P_m - A_0 = 80 - 40 = 40\ kN$

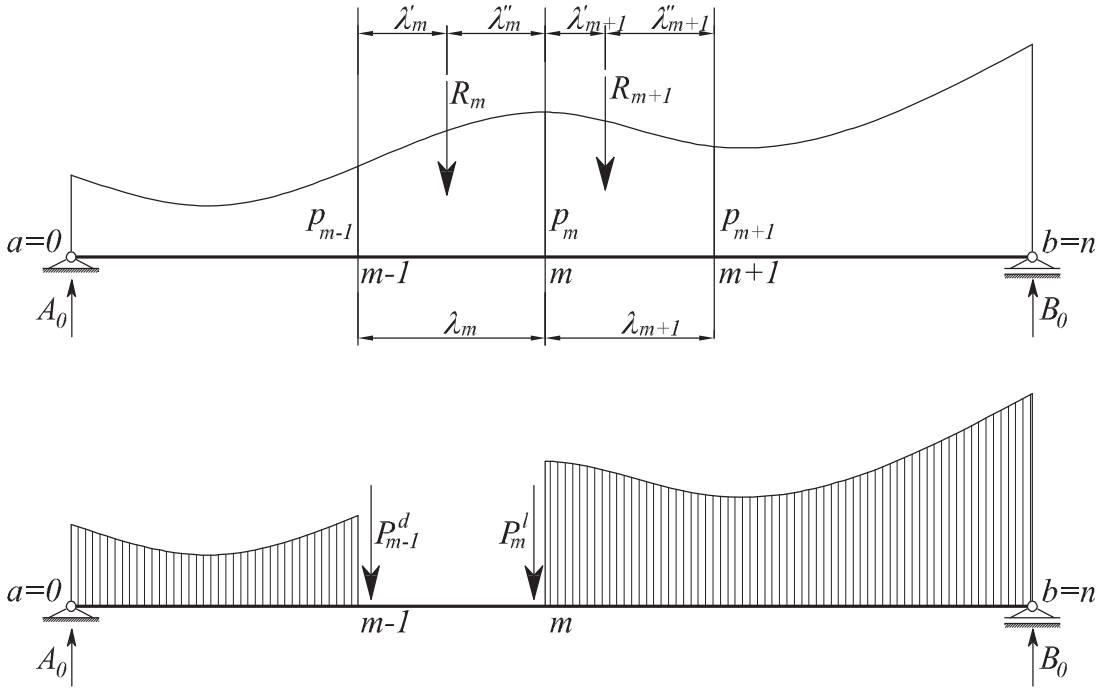
$T_1 = T_0 - P_0$

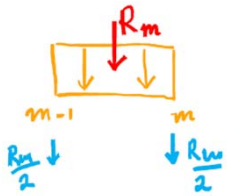
$M_1 = M_0 + T_1 \lambda_1$



3. ПУНИ НОСАЧИ

- **3.1. Носачи који се састоје из 1 кинематички круте плоче**
  - 3.1.2. Нумерички поступак одређивања сила у пресецима просте греде оптерећене расподељеним оптерећењем задатим у низу дискретних тачака.





$$\boxed{R_m = \int_i^k p(x)\,dx}$$

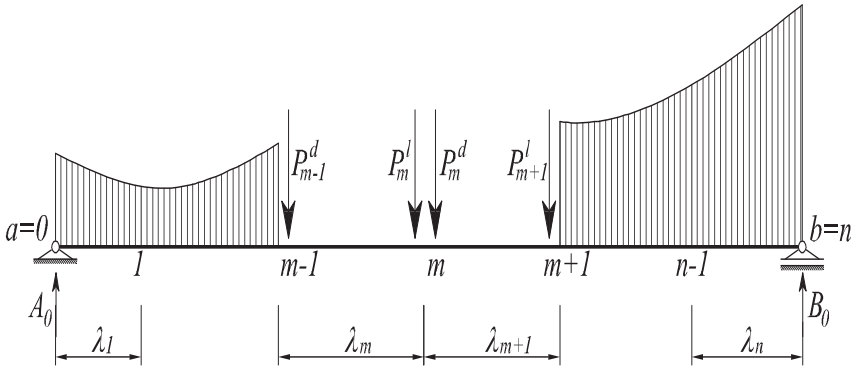
$$P^d_{m-1} = R_m \frac{\lambda''_m}{\lambda_m},$$

$$P^l_m = R_m \frac{\lambda'_m}{\lambda_m}, \quad P^d_m = R_{m+1} \frac{\lambda''_{m+1}}{\lambda_{m+1}},$$

$$P^l_{m+1} = R_{m+1} \frac{\lambda'_{m+1}}{\lambda_{m+1}}$$

3. ПУНИ НОСАЧИ

- **3.1. Носачи који се састоје из 1 кинематички круте плоче**
  - 3.1.2. Нумерички поступак одређивања сила у пресецима просте греде оптерећене расподељеним оптерећењем задатим у низу дискретних тачака.



$$P_0 = \frac{\lambda_1}{6}(2p_0 + p_1)$$

$$P_m = \frac{\lambda_m}{6}(p_{m-1} + 2p_m) + \frac{\lambda_{m+1}}{6}(2p_m + p_{m+1}) \qquad m = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$P_n = \frac{\lambda_n}{6}(p_{n-1} + 2p_n)$$

$$P_0 = \frac{\lambda}{24}(7p_0 + 6p_1 - p_2)$$

$\lambda = const$

$$P_m = \frac{\lambda}{12}(p_{m-1} + 10p_m + p_{m+1}) \qquad m = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$P_n = \frac{\lambda}{24}(7p_n + 6p_{n-1} - p_{n-2})$$

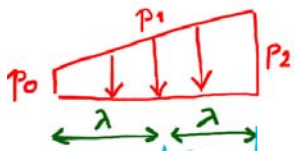
ПАРАБОЛИЧНА ПРОМЕНА

$$P_0 = \frac{\lambda}{6}(2p_0 + p_1)$$

$$P_m = \frac{\lambda}{6}(p_{m-1} + 4p_m + p_{m+1}) \qquad m = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$P_n = \frac{\lambda}{6}(p_{n-1} + 2p_n)$$

ЛИНЕАРНА ПРОМЕНА



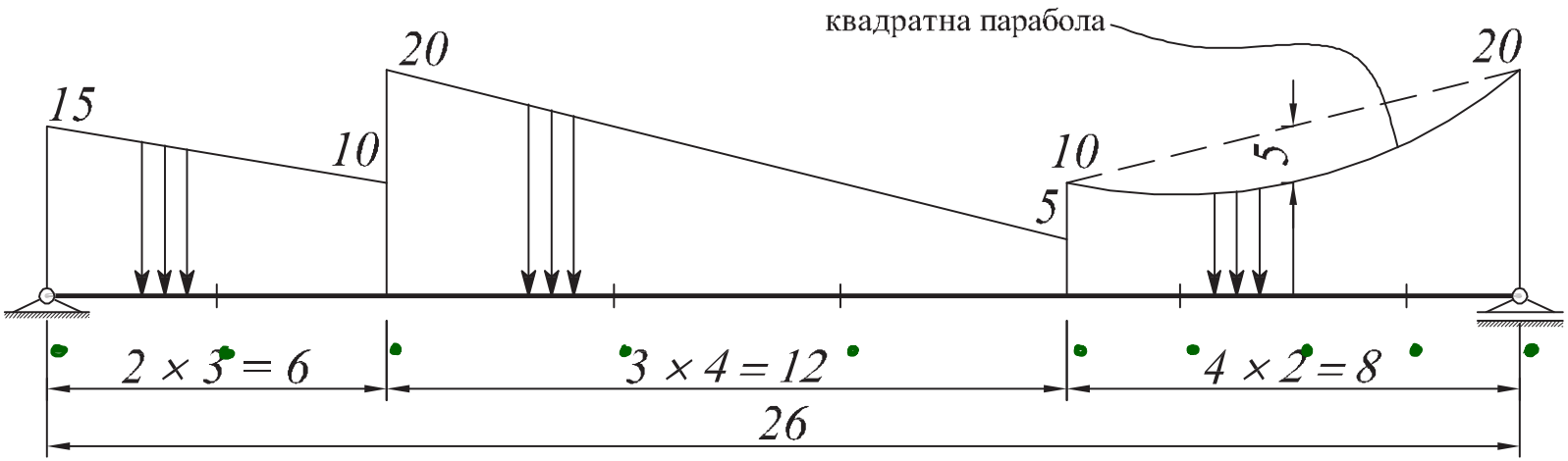
$$P_1 = \frac{\lambda}{6}(p_0 + 4p_1 + p_2)$$

$$P_n = P_2 = \frac{\lambda}{6}(p_1 + 2p_2)$$

3. ПУНИ НОСАЧИ

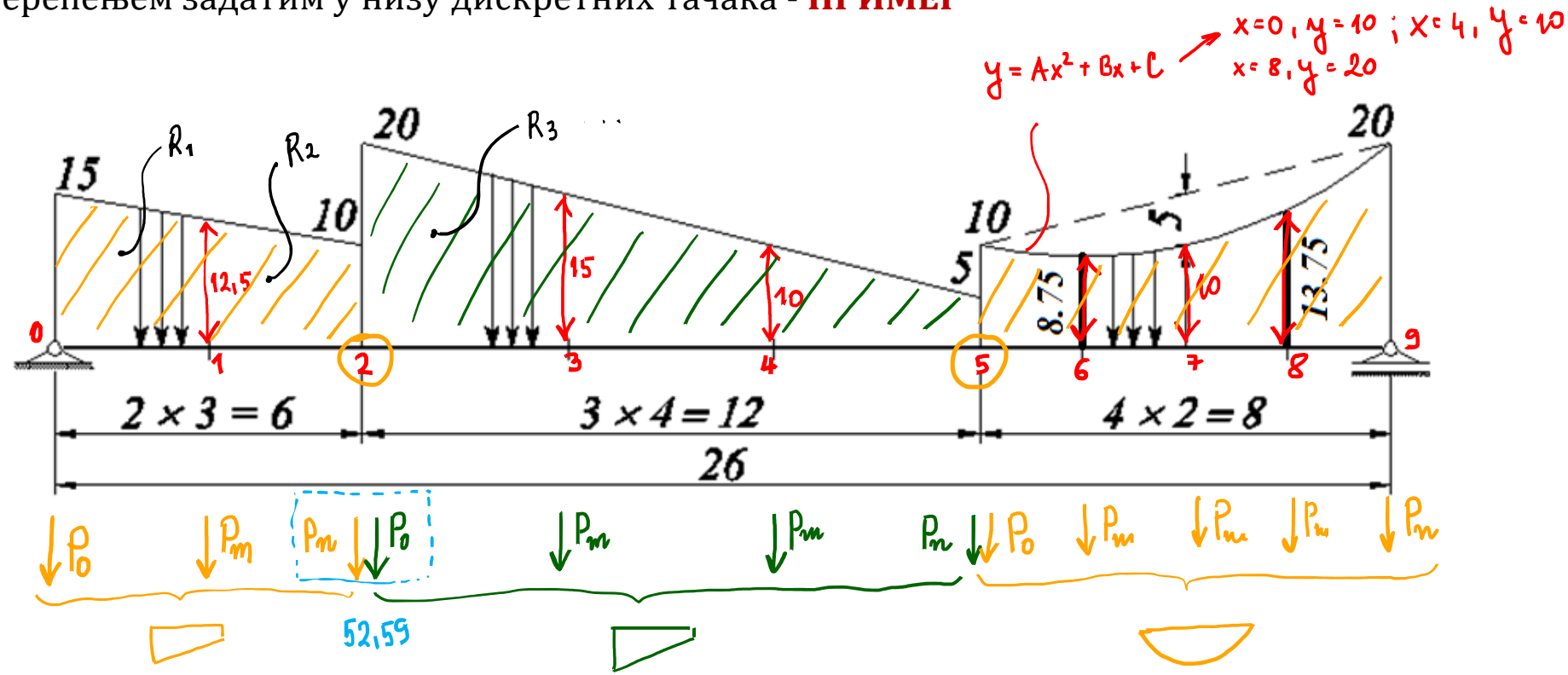
- **3.1. Носачи који се састоје из 1 кинематички круте плоче**
  - 3.1.2. Нумерички поступак одређивања сила у пресецима просте греде оптерећене расподељеним оптерећењем задатим у низу дискретних тачака - **ПРИМЕР**

Нацртати дијаграме пресечних сила просте греде услед задатог оптерећења



3. ПУНИ НОСАЧИ

- **3.1. Носачи који се састоје из 1 кинематички круте плоче**
  - 3.1.2. Нумерички поступак одређивања сила у пресецима просте греде оптерећене расподељеним оптерећењем задатим у низу дискретних тачака - **ПРИМЕР**



3. ПУНИ НОСАЧИ

- **3.1. Носачи који се састоје из 1 кинематички круте плоче**
  - 3.1.2. Нумерички поступак одређивања сила у пресецима просте греде оптерећене расподељеним оптерећењем задатим у низу дискретних тачака - **ПРИМЕР**

ЗАМЕЊУЈУЋЕ

$M_{0,m+1} = M_{0,m} + \bar{V}_{0m}\lambda_m$

m	λ_m	x'_m	p^l_m / p^d_m	P_m	$P_m x'_m$	$\bar{V}_{0m}$ (T_m)	$\bar{V}_{0m}\lambda_m$	M_{0m}	R_m	V_{0m} (T_m)
	[m]	[m]	[kN/m]	[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]	[kNm]	[kN]	[kN]
0	/	26	15	21.25	552.50	166.92 = A_0	/	0	/	166.92 = A_0
1	3	23	12.5	37.50	862.50	145.67	437.02	437.02	41.25	125.67
2	3	20	10 / 20	52.92	1058.33	108.17	324.52	761.54	33.75	91.92
3	4	16	15	60.00	960.00	55.26	221.03	982.57	70.00	21.92
4	4	12	10	40.00	480.00	-4.74	-18.97	963.59	50.00	-28.08
5	4	8	5 / 10	22.71	181.67	-44.74	-178.97	784.62	30.00	-58.08
6	2	6	8.75	17.92	107.50	-67.45	-134.90	649.72	18.33	-76.41
7	2	4	10	20.42	81.67	-85.37	-170.74	478.98	18.33	-94.74
8	2	2	13.75	27.92	55.83	-105.78	-211.57	267.41	23.33	-118.08
9	2	0	20	17.71	0	-133.70	-267.40	0	33.33	-151.41 = $-B_0$
			Σ	318.33	4340	-151.41 = $-B_0$		Σ	318.33	

$V_{0m+1} = V_{0m} - R_m$

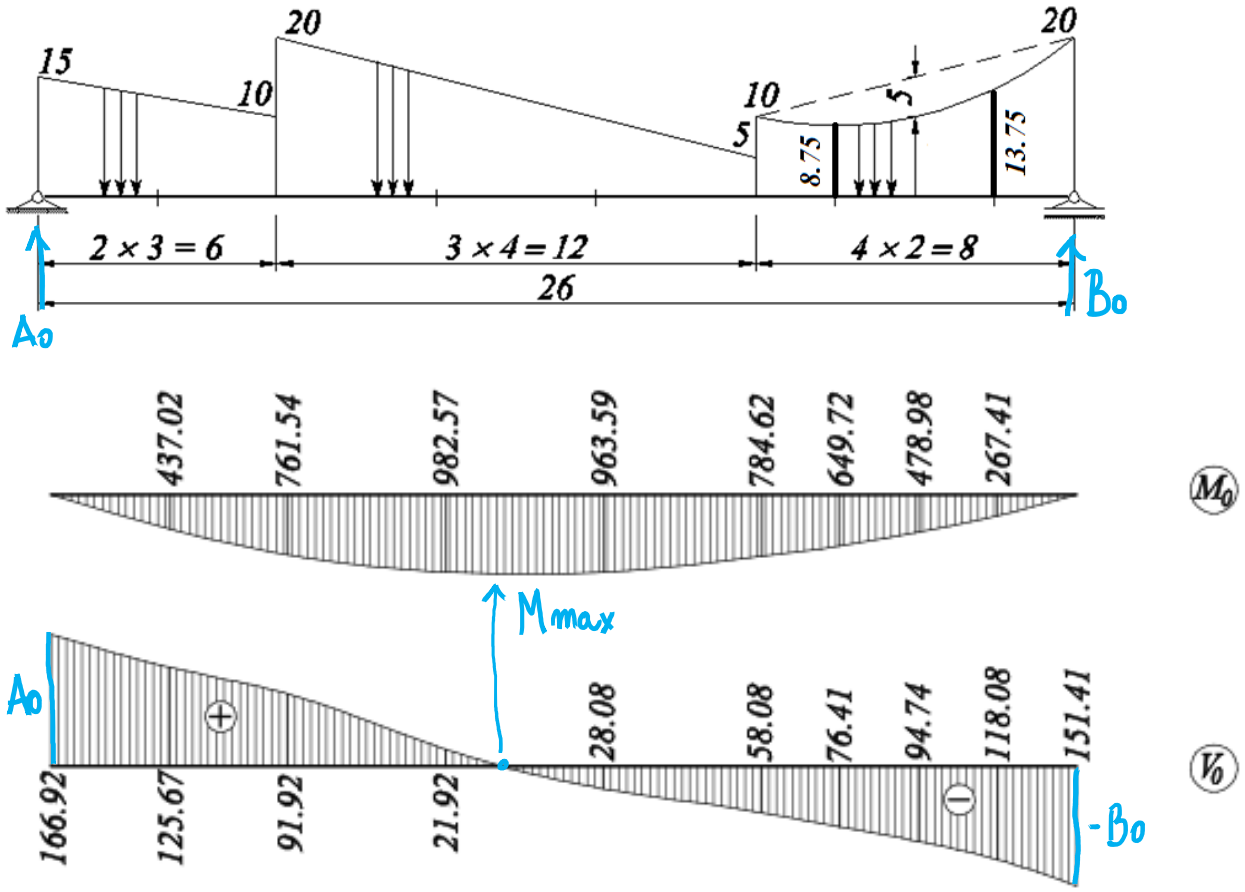
$A_0 = \frac{1}{\ell}\sum P_m x'_m = \frac{4340}{26} = 166{,}92\,kN$

$\bar{V}_{0,m+1} = \bar{V}_{0,m} - P_m$

$A_0 + B_0 = 318{,}33\,kN$

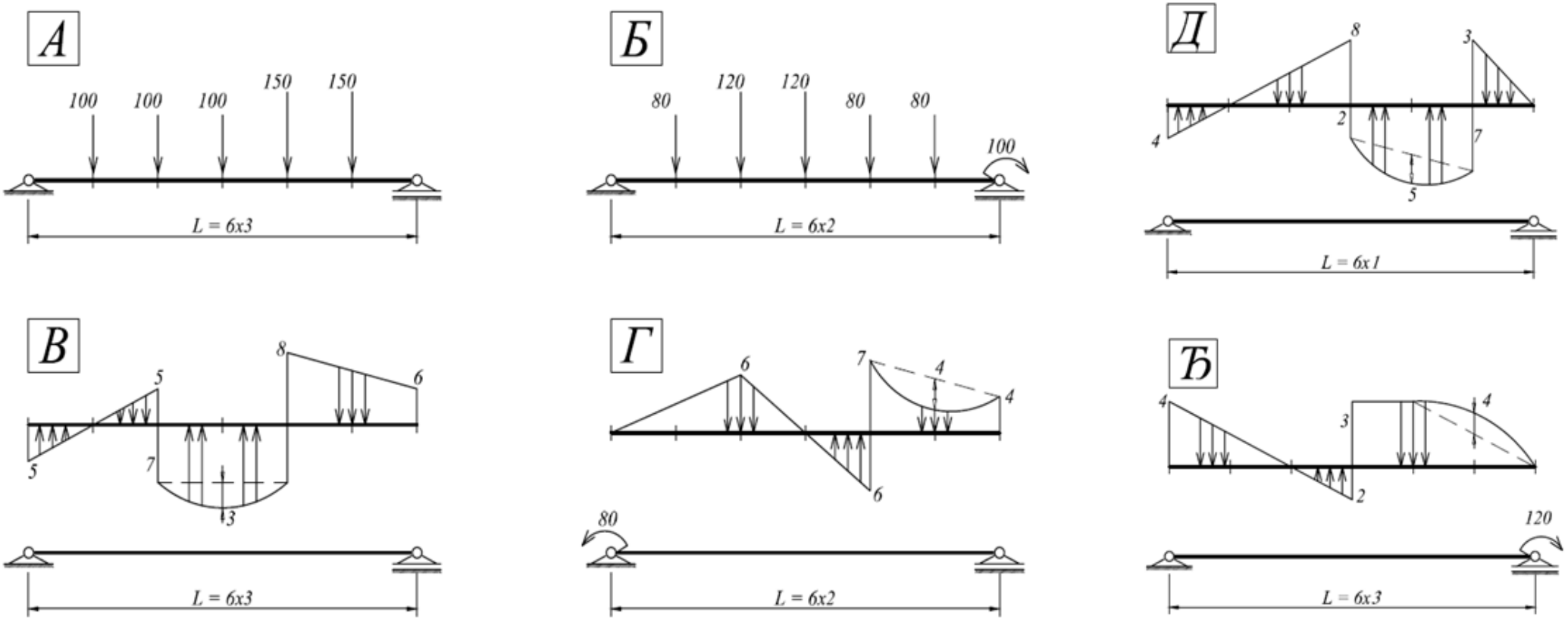
$= \sum P_m$

3. ПУНИ НОСАЧИ



3. ПУНИ НОСАЧИ

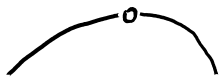
ПРИМЕРИ ЗА ВЕЖБУ



3. ПУНИ НОСАЧИ

$z_o + z_u + 2 \cdot z_z = 3 z_p$ (2, 6)

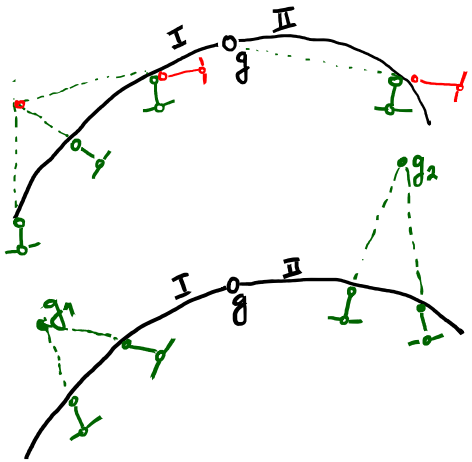
$z_o + z_u = 4$



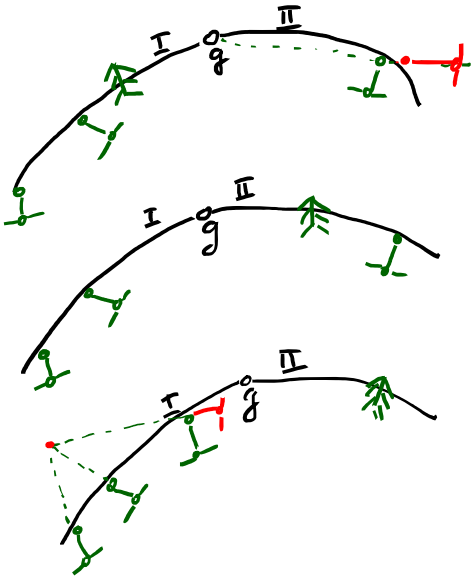
$z_p = 2$
$z_z = 1$

▪ 3.2. Носачи који се састоје из 2 кинематички круте плоче

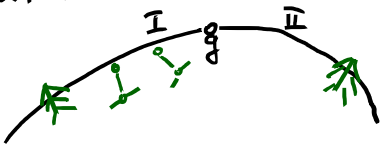
$z_o = 4,\ z_u = 0$

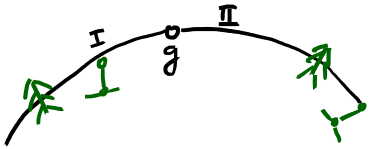


$z_o = 3,\ z_u = 1$

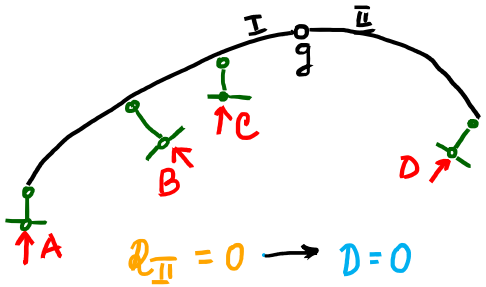


$z_o = 2,\ z_u = 2$





1) 3 СПОЉ. ЕЛЕМЕНТА НА ЈЕДНОЈ + 1 СПОЉ. ЕЛЕМЕНТ НА ДРУГОЈ ПЛОЧИ



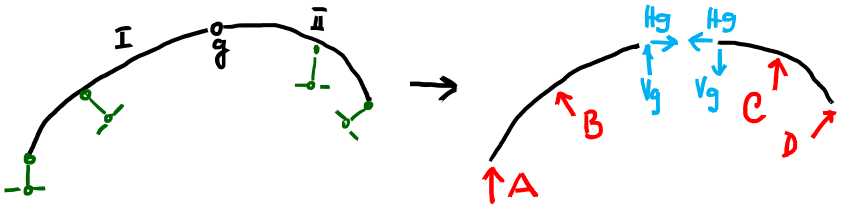
$\Sigma M_g^{II} = 0$: D

$\Sigma H = 0$
$\Sigma V = 0$
$\Sigma M = 0$ } 4 ЕО НОСАЧ

A, B, C

$R_{II} = 0 \rightarrow D = 0$

2) ПО 2 СПОЉ. ЕЛЕМЕНТА НА ОБЕ ПЛОЧЕ

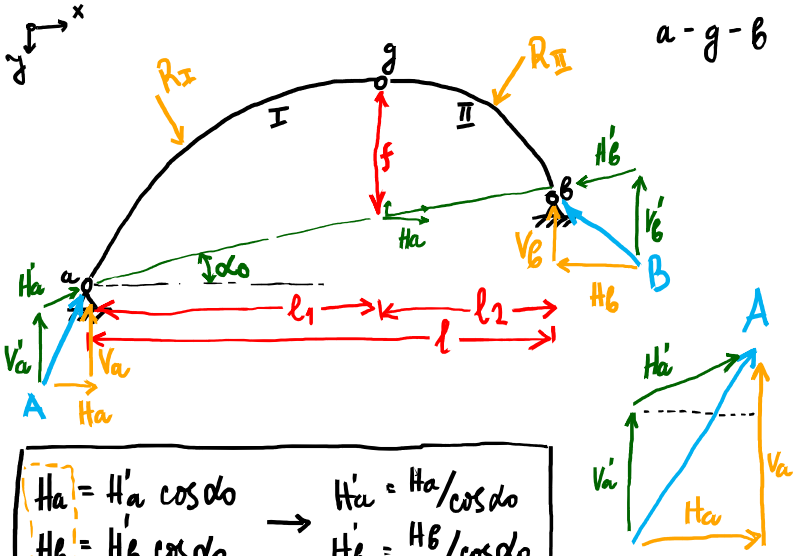


→ 6 НЕПОЗНАТИХ

→ 6 УСЛОВА РАВНОТЕЖЕ (2×3)

3. ПУНИ НОСАЧИ

- **3.2. Носачи који се састоје из 2 кинематички круте плоче**
  - 3.2.1. Лук на 3 зглоба при произвољном оптерећењу



$$\boxed{\begin{aligned} H_a &= H_a' \cos\alpha_0 \\ H_b &= H_b' \cos\alpha_0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} H_a' &= H_a/\cos\alpha_0 \\ H_b' &= H_b/\cos\alpha_0 \end{aligned}}$$

$$V_a = V_a' + H_a' \sin\alpha_0 \Rightarrow \boxed{V_a = V_a' + H_a \operatorname{tg}\alpha_0}$$

$$V_b = V_b' - H_b' \sin\alpha_0 \qquad \boxed{V_b = V_b' - H_b \operatorname{tg}\alpha_0}$$

1) СРАЧУНАВАЊЕ V_a' и V_b':

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M_a} = 0: \quad \overset{\curvearrowright}{M_a} - V_b' \cdot l = 0 \rightarrow \boxed{V_b' = \frac{\overset{\curvearrowright}{M_a}}{l}}$$

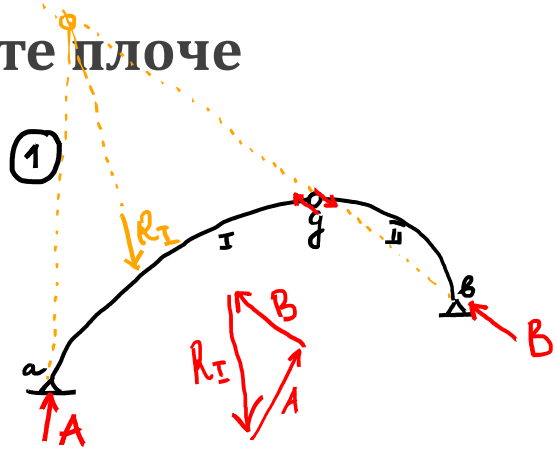
$$\sum \overset{\curvearrowright}{M_b} = 0: \quad \overset{\curvearrowright}{M_b} + V_a' \cdot l = 0 \rightarrow \boxed{V_a' = -\frac{\overset{\curvearrowright}{M_b}}{l}}$$

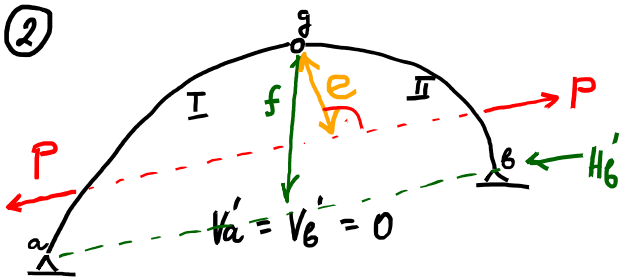
2) СРАЧУНАВАЊЕ H_a и H_b:

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M_g^{levo}} = 0: \quad \underbrace{\overset{\curvearrowright}{M_g^{levo}}}_{V_a',\ R_I} - H_a \cdot f = 0 \rightarrow \boxed{H_a = \frac{\overset{\curvearrowright}{M_g^{levo}}}{f}}$$

АНАЛОГНО: $\boxed{H_b = -\overset{\curvearrowright}{M_g^{desno}}/f}$

$$\boxed{V_a, V_b}$$



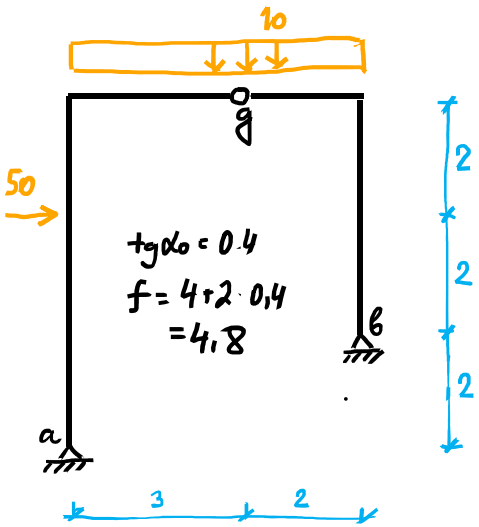


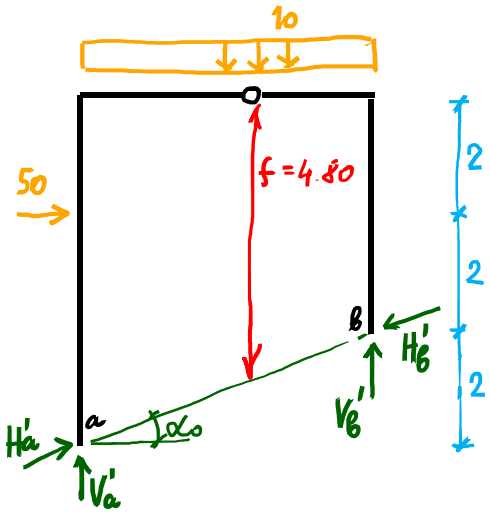
$$\sum M_g^{II} = 0: \quad P \cdot e - H_b \cdot f = 0 \rightarrow H_b = \frac{P \cdot e}{f}$$

$$H_a = \frac{P \cdot e}{f} \Rightarrow \boxed{H_a = H_b = H}$$

3. ПУНИ НОСАЧИ

- **3.2. Носачи који се састоје из 2 кинематички круте плоче**
  - 3.2.1. Лук на 3 зглоба при произвољном оптерећењу - **ПРИМЕР**





$\sum M_g^d = 0: \; 10 \cdot 2 \cdot 1 - 65 \cdot 2 + H_b \cdot 4{,}8 = 0$

$$\boxed{H_b = \frac{130 - 20}{4.8} = 22.9\,kN}$$

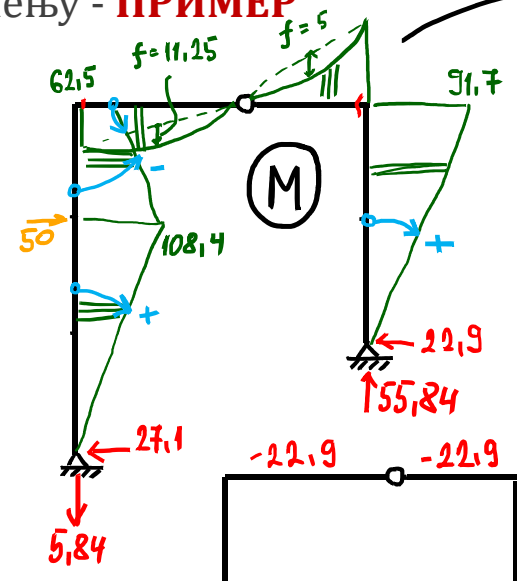
$\sum H = 0: \; \boxed{H_a = -27{,}1\,kN}$

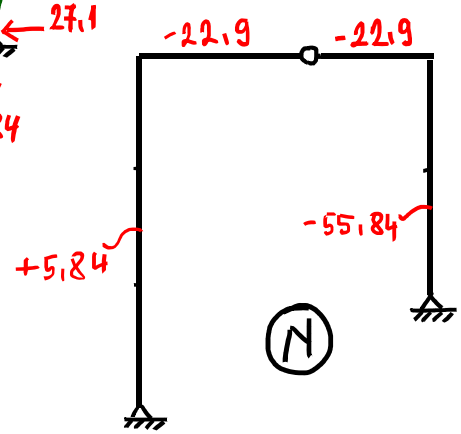
$\sum M_b = 0: \; -10 \cdot 5 \cdot 2{,}5 + 50 \cdot 2 + V_a' \cdot 5 = 0$

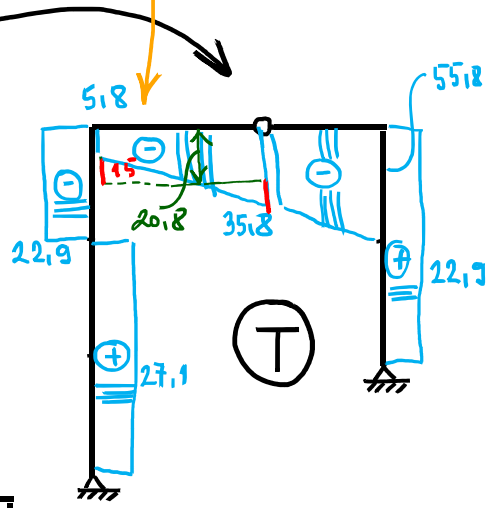
$$V_a' = \frac{50 \cdot 2.5 - 100}{5} = 5\,kN$$

$\sum M_a = 0: \; 50 \cdot 4 + 10 \cdot 5 \cdot 2{,}5 = V_b' \cdot 5$

$$V_b' = \frac{200 + 125}{5} = 65\,kN$$







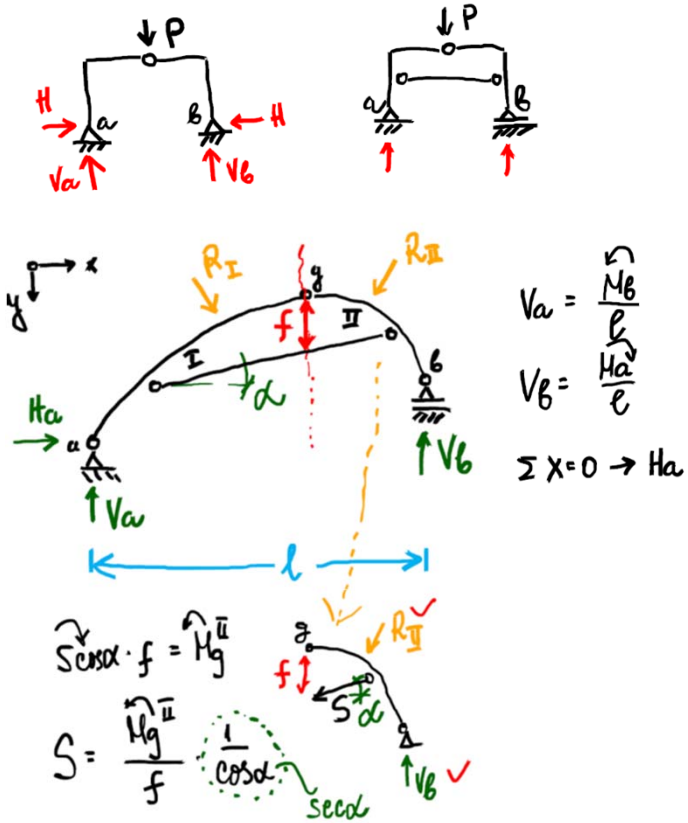
ШТАП ЛЕВО:
$62{,}5 / 3 = 20{,}8\,kN$ ⊖
$gl/2 = \pm 15\,kN$

$V_a = V_a' + H_a\, tg\alpha_0 =$
$5 - 27.1 \cdot 0.4 = -5{,}84\,kN$

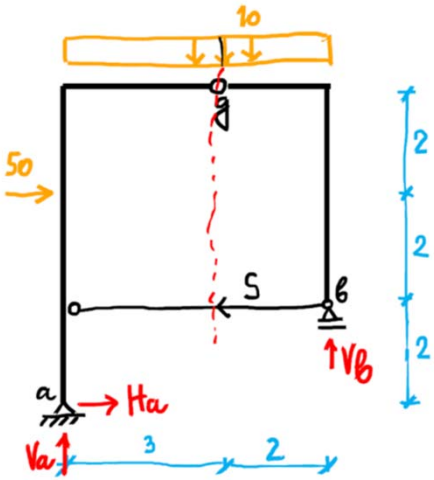
$V_b = V_b' - H_b\, tg\alpha_0 =$
$= 65 - 22.9 \cdot 0.4 = 55{,}84\,kN$

3. ПУНИ НОСАЧИ

- **3.2. Носачи који се састоје из 2 кинематички круте плоче**
  - 3.2.2. Лук са затегом



ПРИМЕР

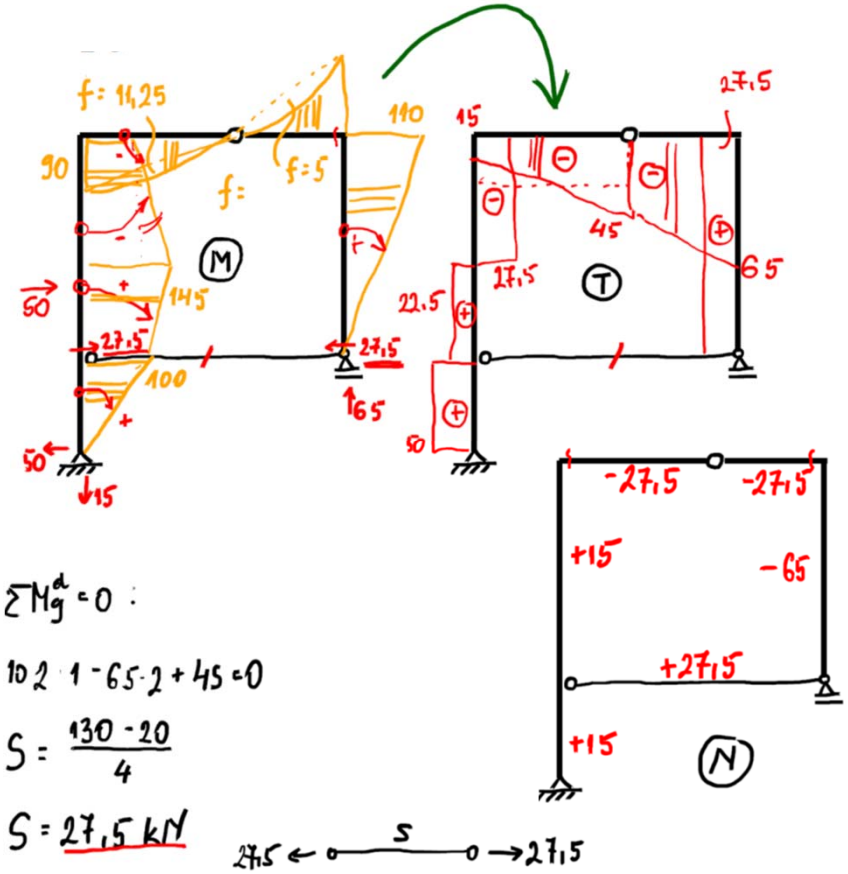


$\Sigma H_a = 0: \; 10 \cdot 5 \cdot 2{,}5 + 50 \cdot 4 = V_b \cdot 5$

$V_b = \frac{1}{5}(125 + 200) = 65\,kN$

$\Sigma V = 0: \; V_a = -15$

$\Sigma H = 0: \; H_a = -50$



$\Sigma M_g^d = 0:$

$10 \cdot 2 \cdot 1 - 65 \cdot 2 + 45 = 0$

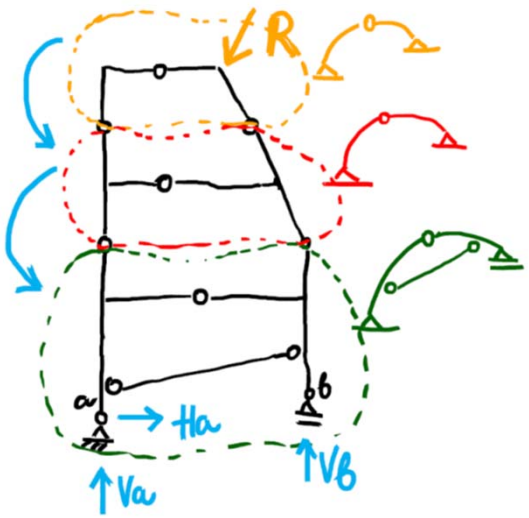
$S = \frac{130 - 20}{4}$

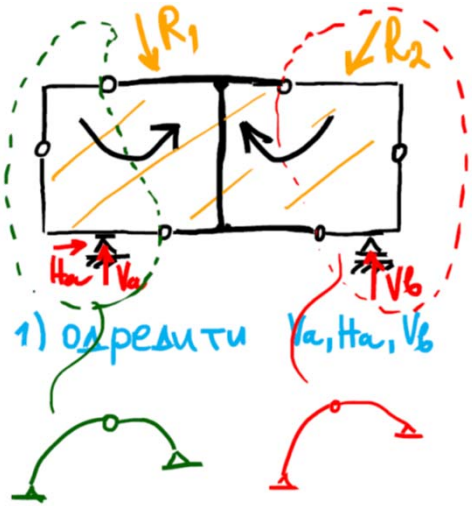
$S = 27{,}5\,kN$

3. ПУНИ НОСАЧИ

- **3.2. Носачи који се састоје из 2 кинематички круте плоче**
  - 3.2.3. Вишеспратни и приземни оквири – принцип решавања

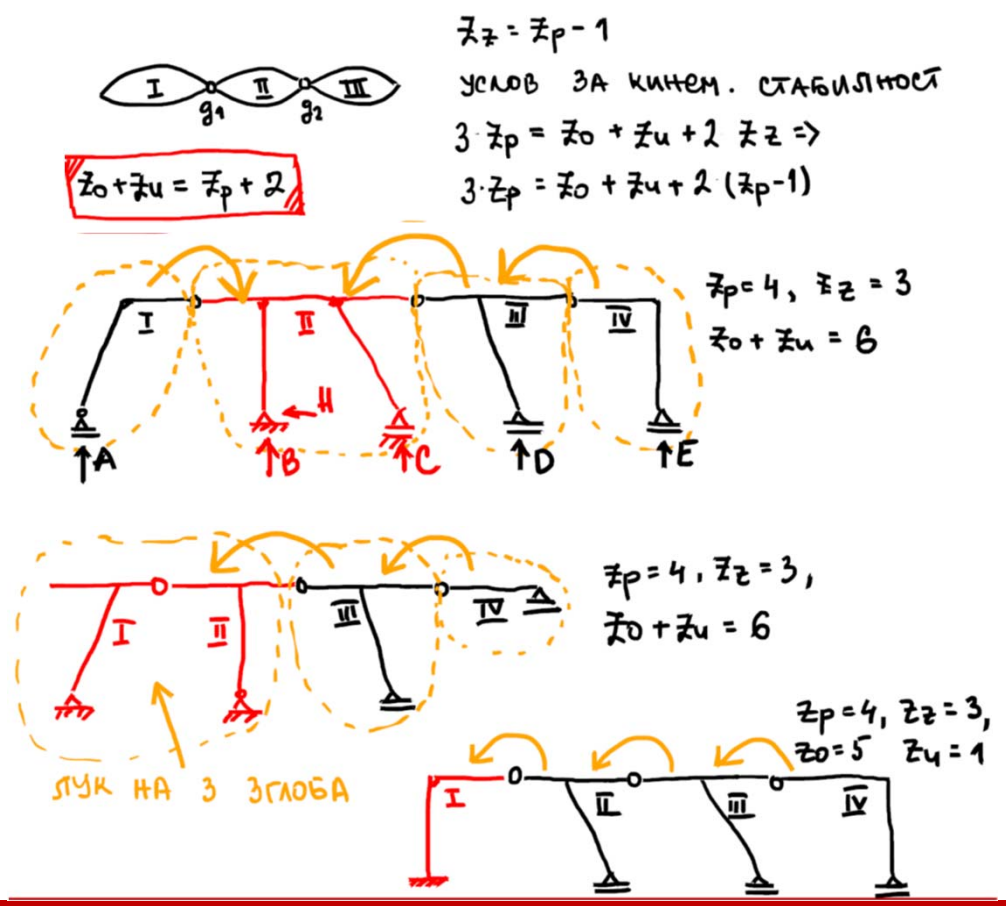
→ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИЈЕ

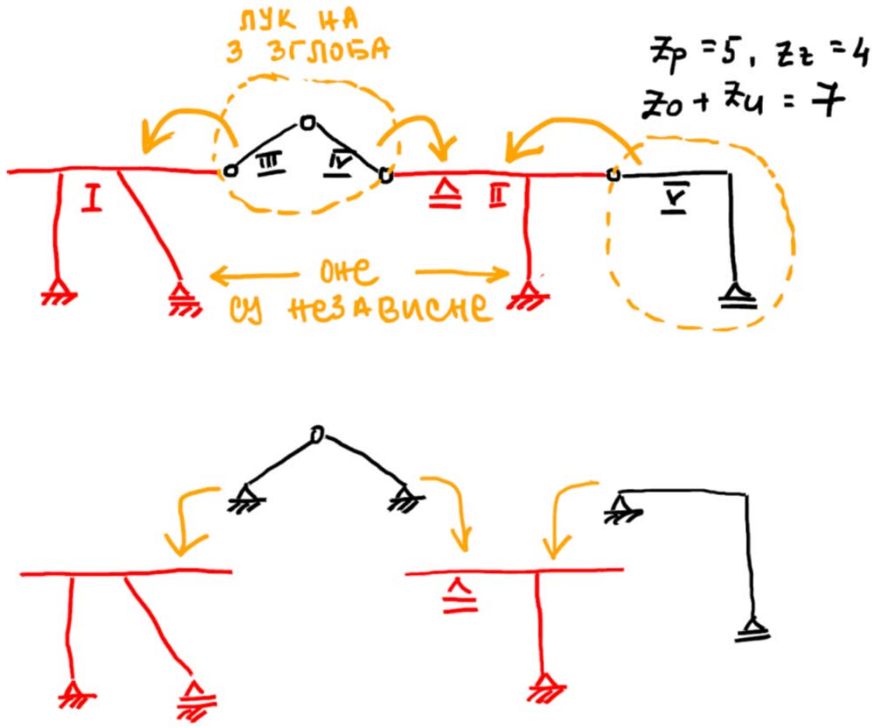




3. ПУНИ НОСАЧИ

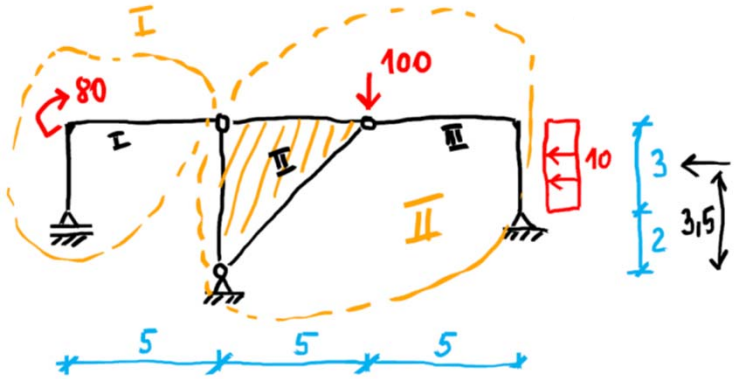
- **3.3. Носачи који се састоје из ланца плоча**

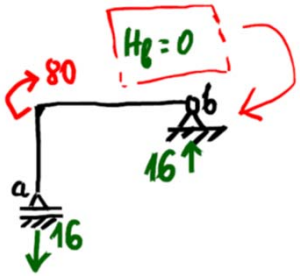


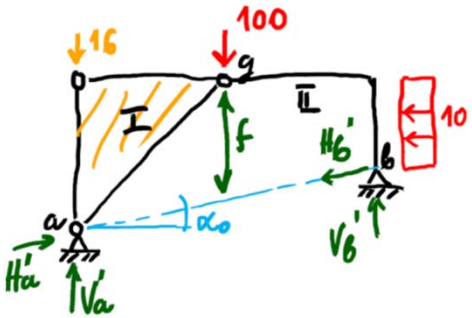


3. ПУНИ НОСАЧИ

- **3.3. Носачи који се састоје из ланца плоча - ПРИМЕР**







$tg\alpha_0 = 0{,}20$

$f = 5 \cdot 5 \cdot tg\alpha_0$

$f = 4\ m$

$\Sigma M_a = 0: \ 100 \cdot 5 - V_b' \cdot 10 - 10 \cdot 3 \cdot 3{,}5 = 0$

$V_b' = \frac{1}{10}(500 - 105) = 39{,}5\ kN$

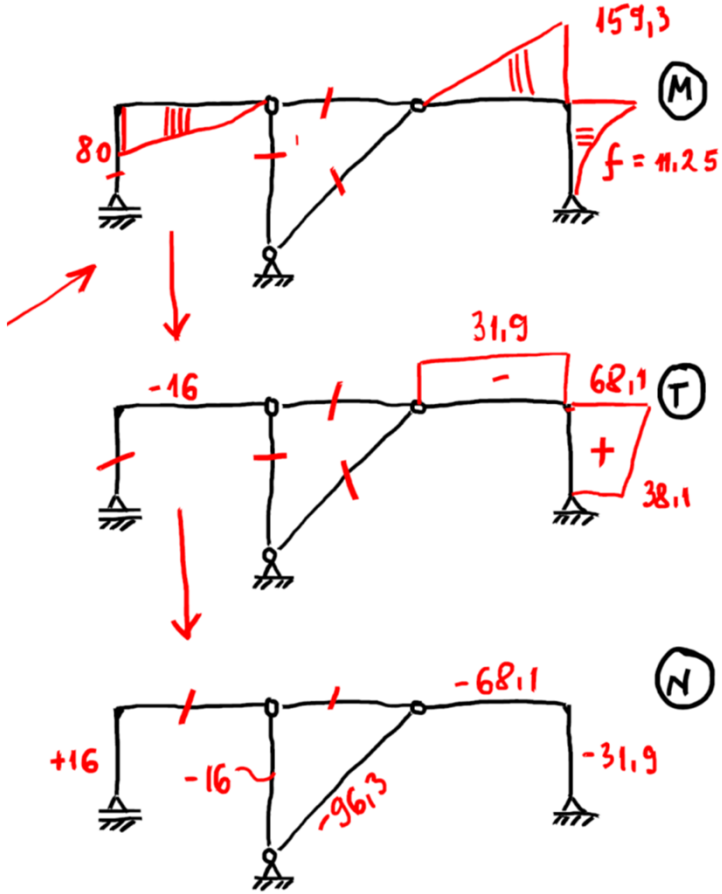
$\Sigma M_b = 0: \ 100 \cdot 5 + 16 \cdot 10 + 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 10 V_a'$

$V_a' = \frac{1}{10}(500 + 160 + 45) = 70{,}5\ kN$

$\Sigma M_g^{II} = 0: \ 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 - 39{,}5 \cdot 5 + H_b \cdot 4 = 0$

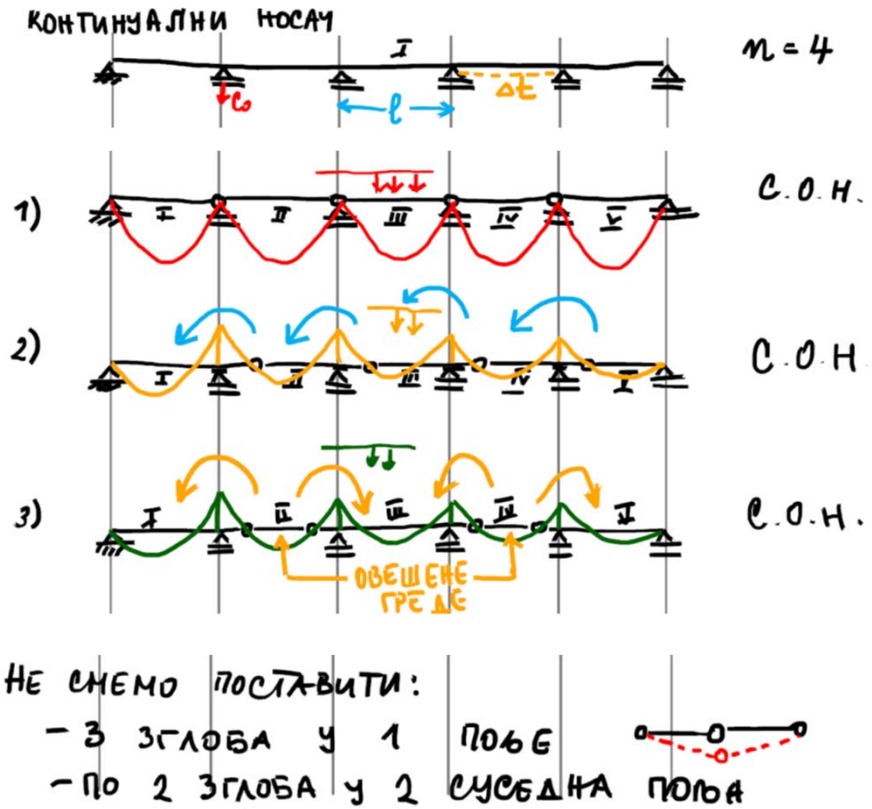
$H_b = \underline{38{,}1}\ kN$

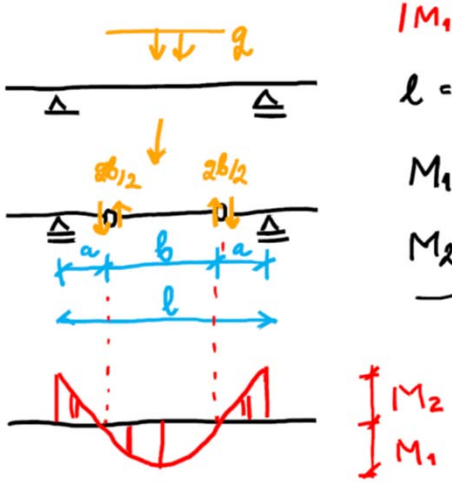
$\Sigma H = 0: \ H_a = 68{,}1\ kN$



3. ПУНИ НОСАЧИ

- **3.3. Носачи који се састоје из ланца плоча**
  - 3.3.1. Герберови носачи. Увод. Распоред зглобова.





$|M_1| = |M_2|$?

$l = b + 2a \rightarrow b = l - 2a$

$M_1 = \frac{qb^2}{8}$

$M_2 = -\left(\frac{qb}{2}\cdot a + q\frac{a^2}{2}\right) = -qa\frac{a+b}{2}$

$\frac{\cancel{q}b^2}{8} = \cancel{q}a\frac{a+b}{2}$

$\frac{b^2}{8} = \frac{a^2+ab}{2} \quad \cdot\frac{4}{4}$

$b^2 = 4a^2 + 4ab \leftarrow (b = l - 2a)$

$l^2 - 4al + \cancel{4a^2} = \cancel{4a^2} + 4a(l - 2a)$

$l^2 - 4al = 4al - 8a^2 \longrightarrow$

$l^2 - 8al + 8a^2 = 0$

$a = 0{,}146\,l \qquad b = 0{,}707\,l$