Simetrični nosači

Teorija konstrukcija - HVE

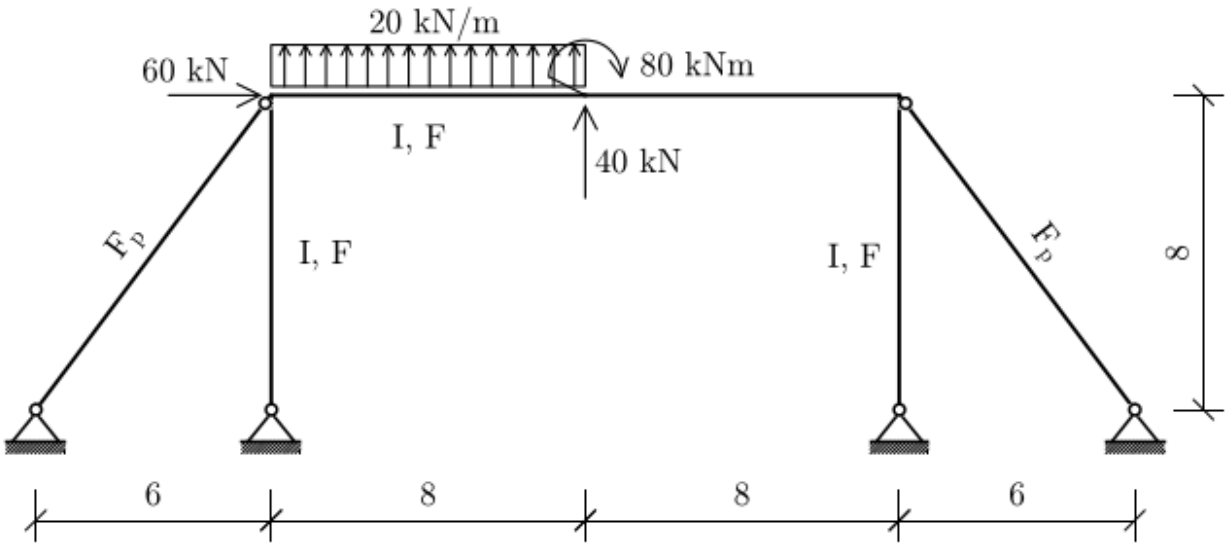
Vežbe: 11. sedmica

Primer 1

Primer 1

- Rastaviti opterećenje na simetričan i antimetričan deo.
- Nacrtati dijagrame sila u presecima koristeći osobinu simetrije nosača.

Uticaj transverzalnih sila na deformaciju zanemariti.



$EI = 10^6\,\mathrm{kNm}^2$
$I/F = 0.1\,\mathrm{m}^2$
$F_p = 0.5 \times F$

Primer 1

Simetrično opterećenje

Opterećenje kod kojeg su sile u simetrično položenim presecima slika u ogledalu u odnosu na osu simetrije.

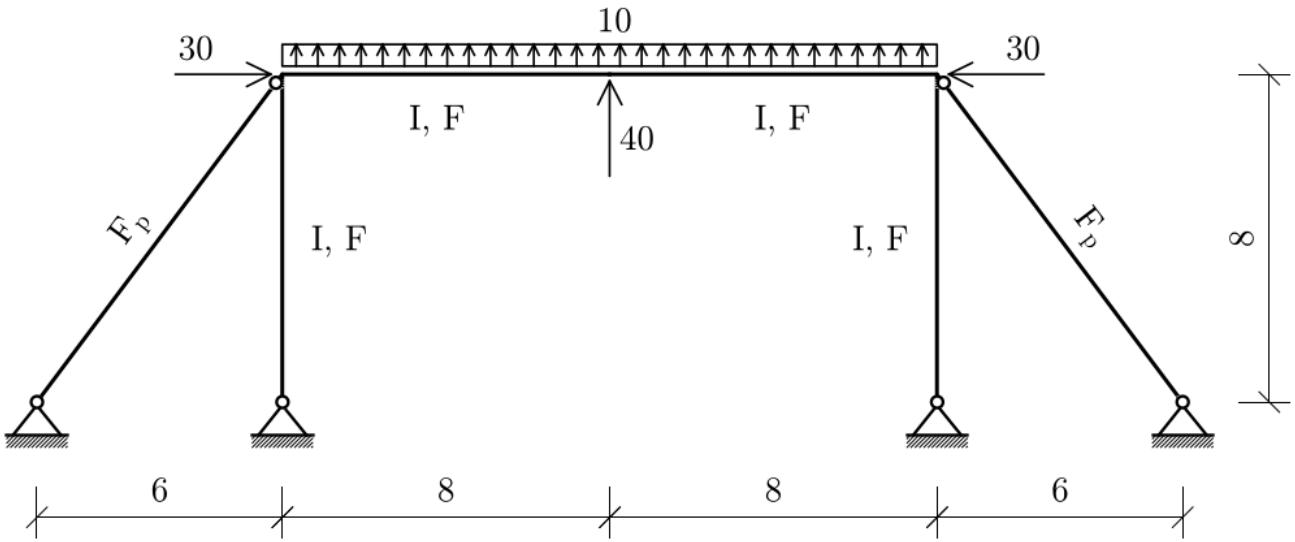
Antisimetrično opterećenje

Opterećenje kod kojeg su sile u simetrično položenim presecima slika u ogledalu u odnosu na osu simetrije, ali sa suprotnim znakom.

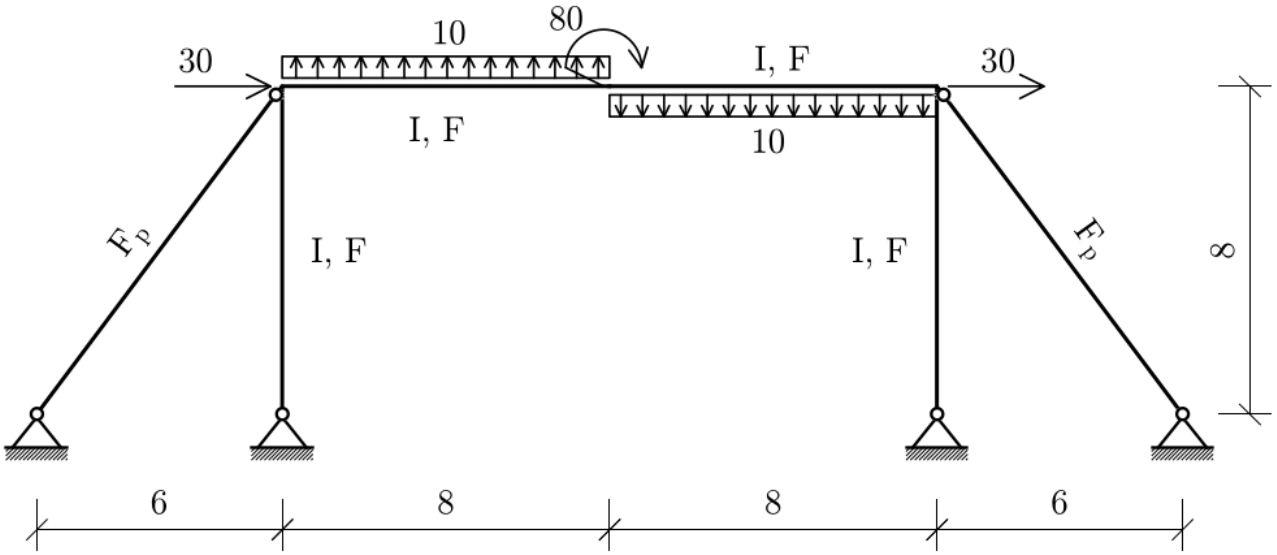
Primer 1

Zbir simetričnog i antisimetričnog dela opterećenja mora biti jednak zadatom opterećenju.

Primer 1


10
30
30
I, F
40
I, F
F_p
I, F
I, F
F_p
8
6
8
8
6

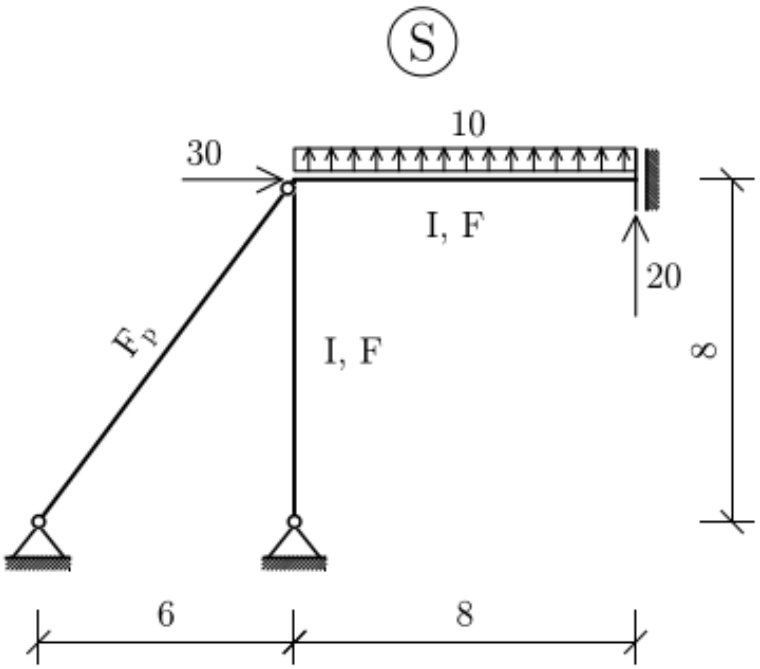
S

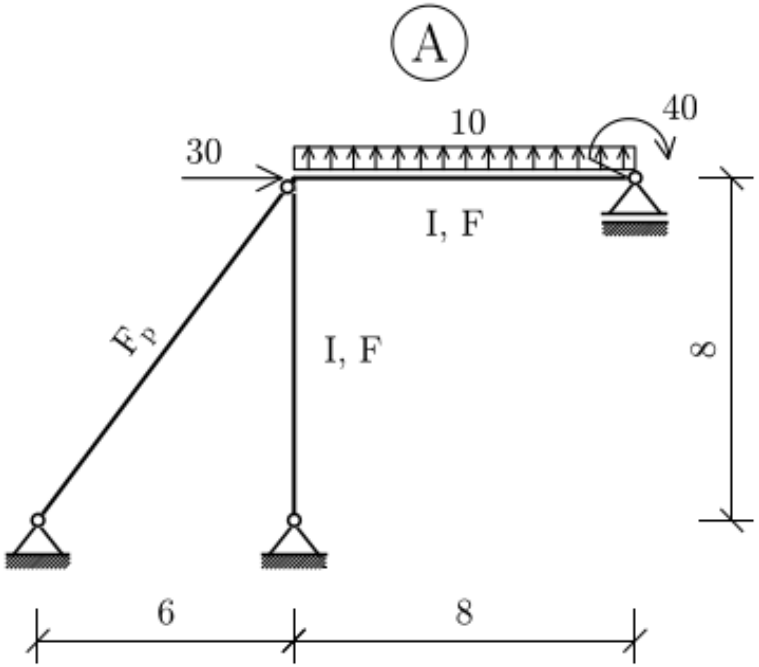

80
10
30
I, F
30
I, F
10
F_p
I, F
I, F
F_p
8
6
8
8
6

A

Primer 1

Sada možemo iskoristiti osobinu simetrije nosača i posmatrati samo jednu polovinu nosača, vodeći računa o graničnim uslovima u osi simetrije.



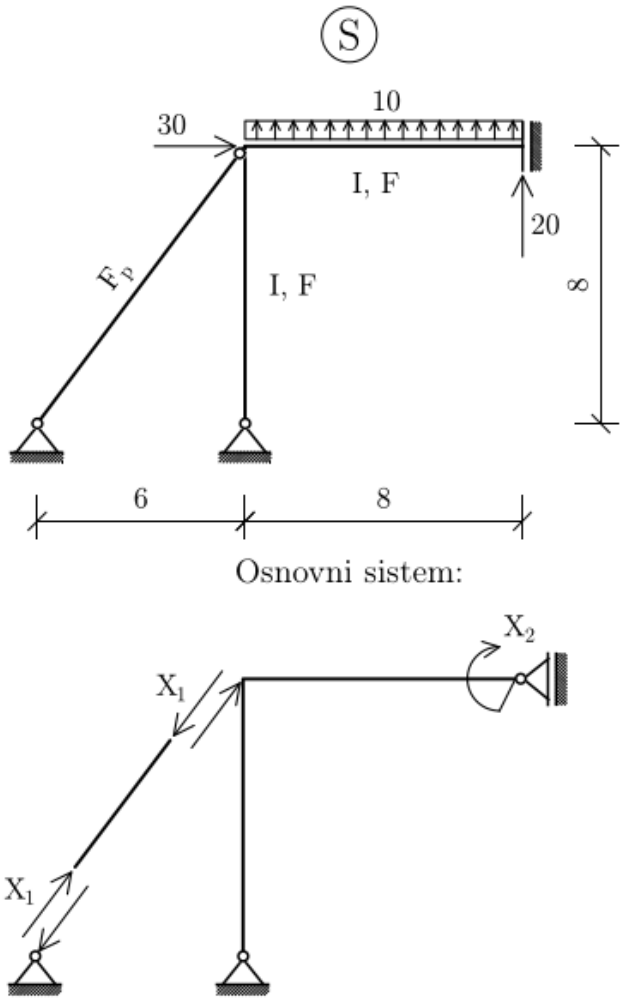


Primer 1

Dobili smo dva nosača koje ćemo rešiti nezavisno.

Dijagrame sila u presecima datog nosača dobićemo superpozicijom.

Primer 1



Nosač je dva puta statički neodređen. Rešićemo ga koristeći metodu sila. Usvajamo osnovni sistem i pišemo uslovne jednačine:

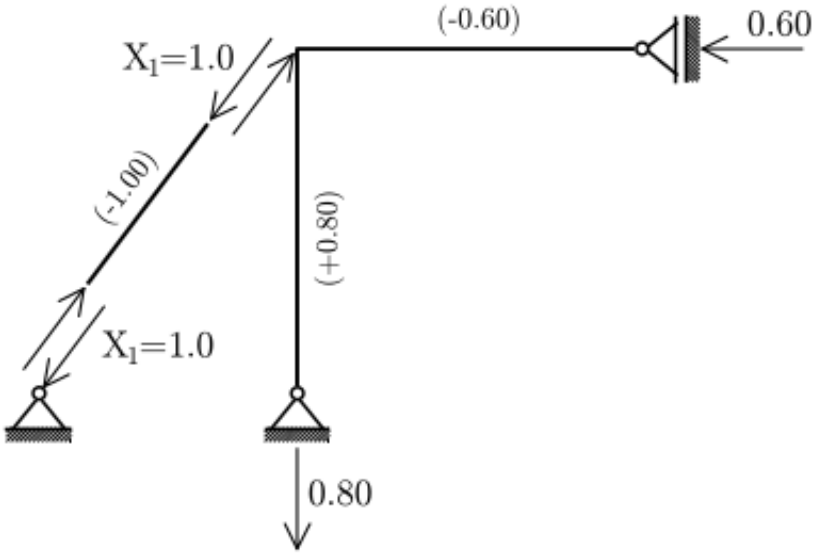
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0$$

Primer 1

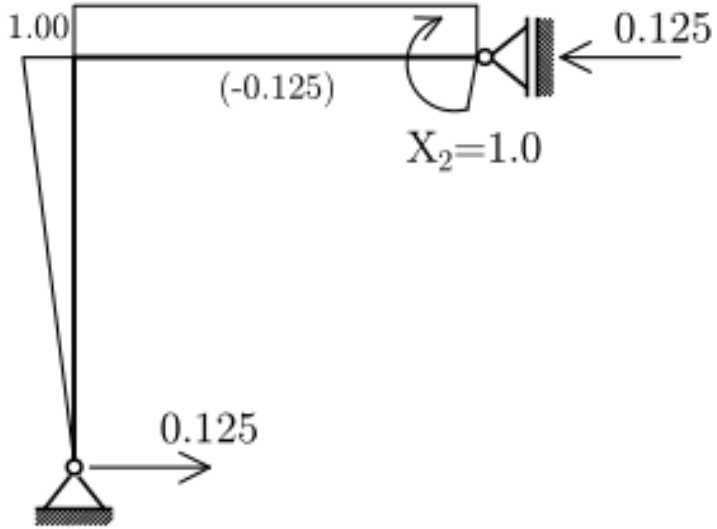
Pošto se uticaj T sila na deformaciju zanemaruje, potrebno je da odredimo M i N sile u osnovnom sistemu u usled stanja $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ i $X_i = 0$.

Primer 1



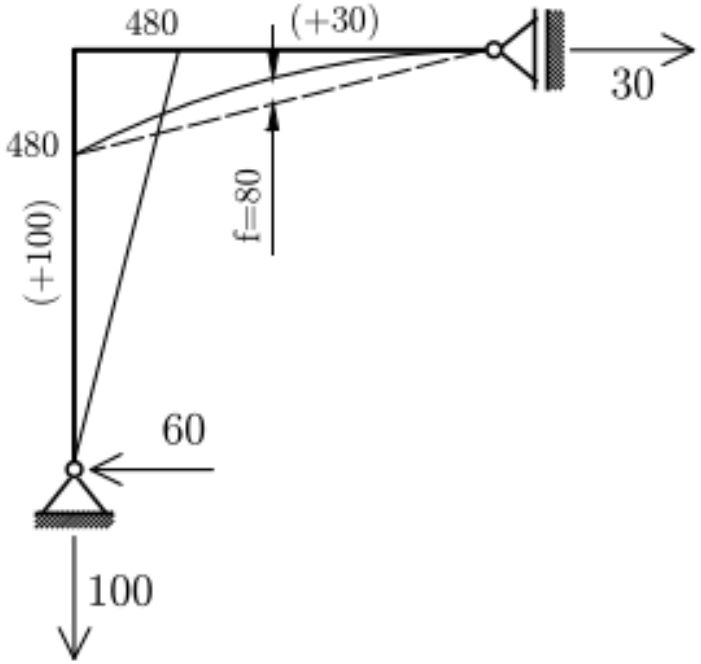
M_1 (N_1)

Primer 1



M_2 (N_2)

Primer 1



M_0 (N_0)

Primer 1

Zatim određujemo koeficijente uslovnih jednačina.

Primer 1

$$EI\delta_{11} = 0{,}1(8 \cdot 0{,}8^2 + 8 \cdot 0{,}6^2) + 0{,}2 \cdot 10 \cdot 1 = 2{,}80$$

$$EI\delta_{22} = 8 \cdot 1 + \frac{8}{3}1^2 + 0{,}1 \cdot 8 \cdot 0{,}125^2 = 10{,}6792$$

$$EI\delta_{12} = 0{,}1 \cdot 8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}125 = 0{,}06$$

$$EI\delta_{10} = 0{,}1 \cdot 8(-0{,}6 \cdot 30 + 0{,}8 \cdot 100) = 49{,}6$$

$$\begin{aligned} EI\delta_{20} &= -\frac{8}{2}480 \cdot 1 + \frac{2}{3}80 \cdot 1 \cdot 8 - \frac{8}{3}1 \cdot 480 - 0{,}1 \cdot 8 \cdot 30 \cdot 0{,}125 \\ &= -2776{,}3333 \end{aligned}$$

Primer 1

$$\begin{bmatrix} 2{,}8 & 0{,}06 \\ 0{,}06 & 10{,}6792 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 49{,}6 \\ -2776{,}3333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X_1 = -23{,}29\,\mathrm{kN}$$

$$X_2 = 260{,}11\,\mathrm{kNm}$$

Primer 1

Dijagrame sila u presecima određujemo principom superpozicije:

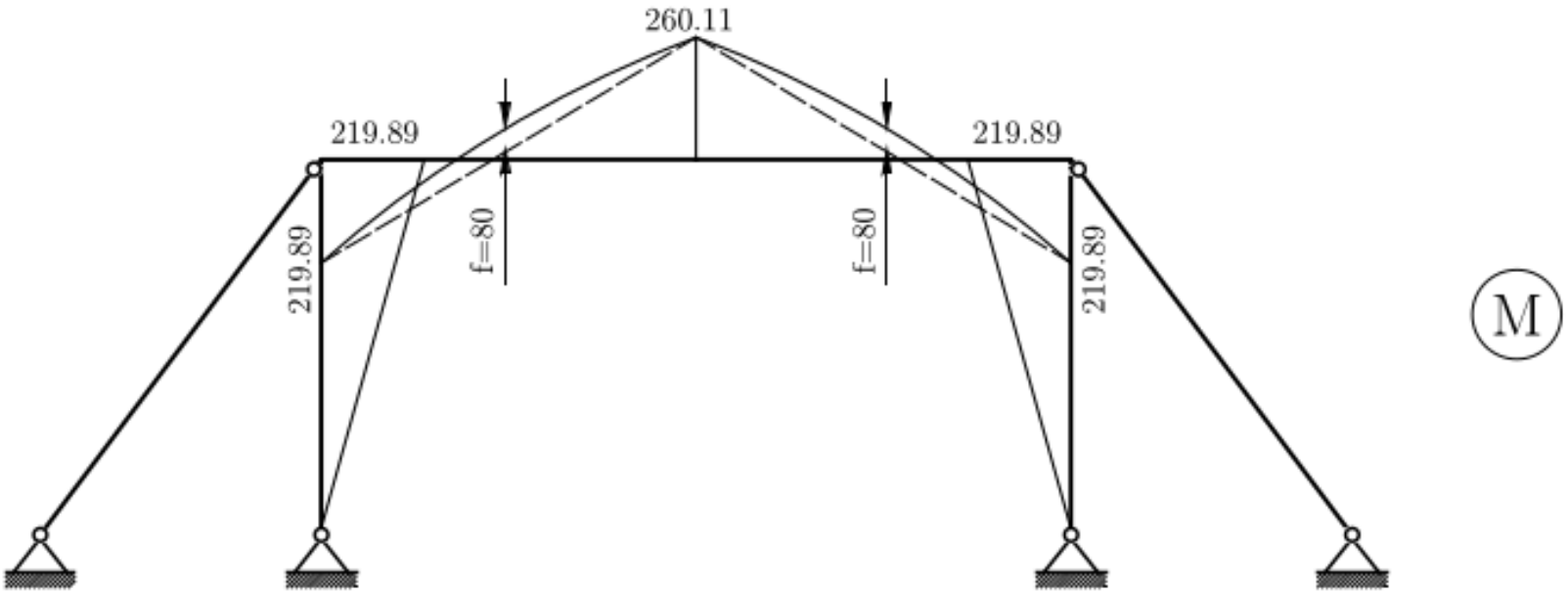
$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$$
$$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2$$

Dijagram T sila određujemo na osnovu dijagrama M sila.

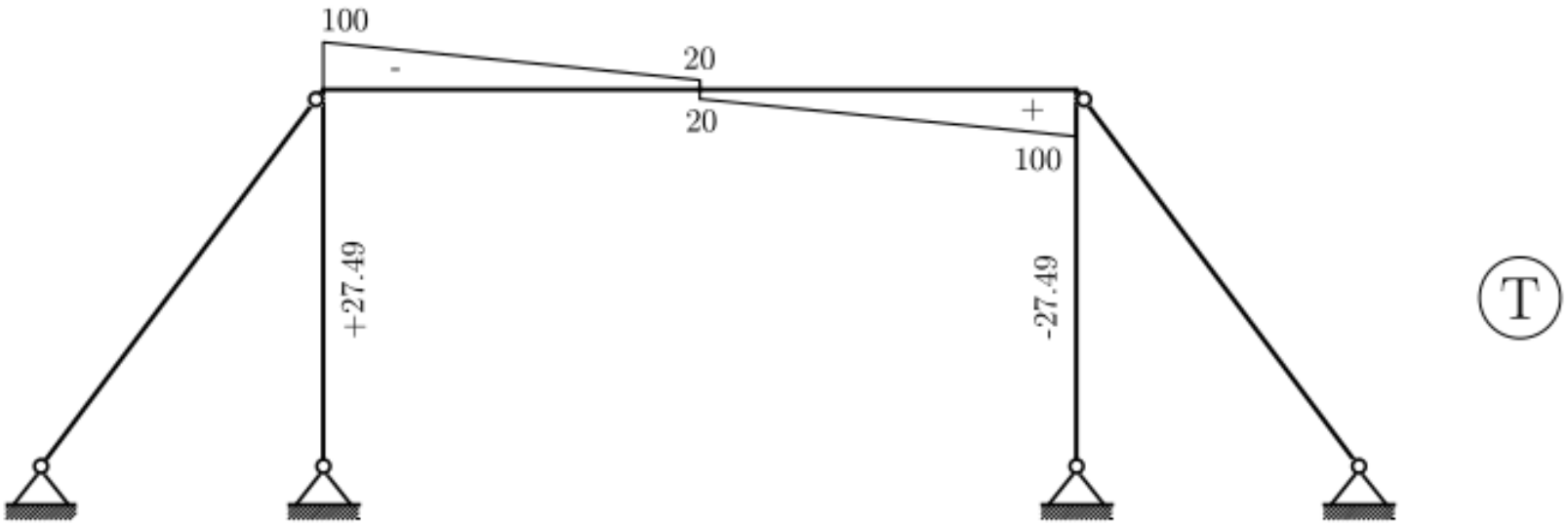
Primer 1

Ako znamo sile u presecima na jednoj polovini nosača sile u presecima na drugoj polovini nosača crtamo tako da su dijagrami normalnih sila i momenata isti i po znaku i po vrednostima ordinata, dok je dijagram transverzalnih sila isti po vrednostima ordinata, ali suprotnog znaka.

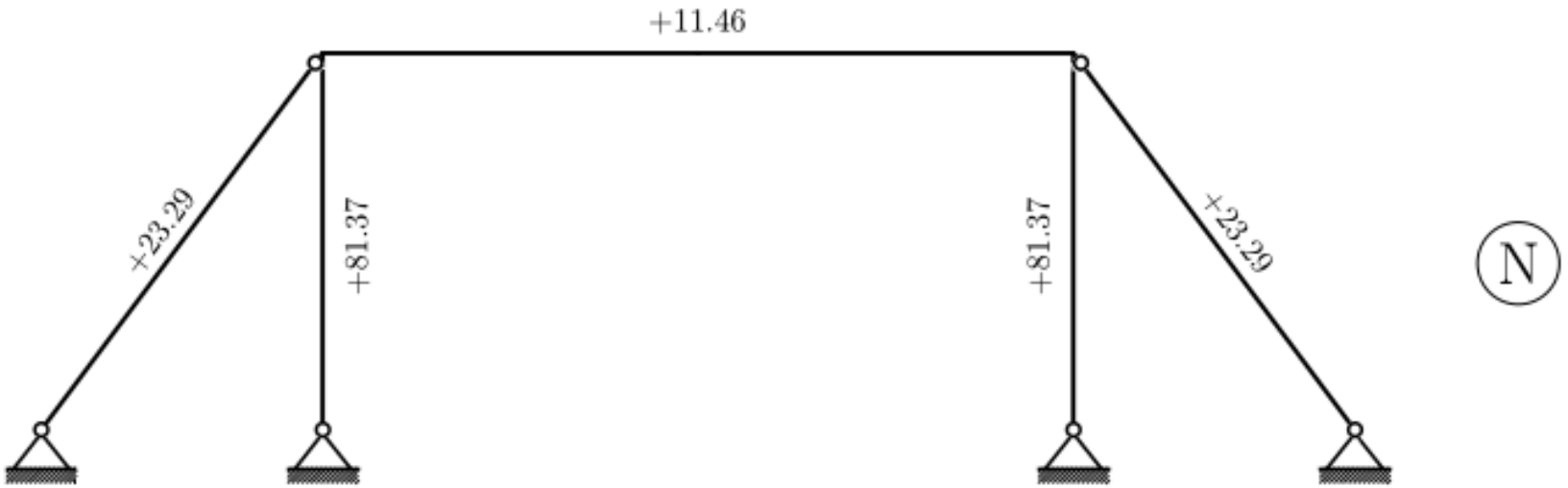
Primer 1



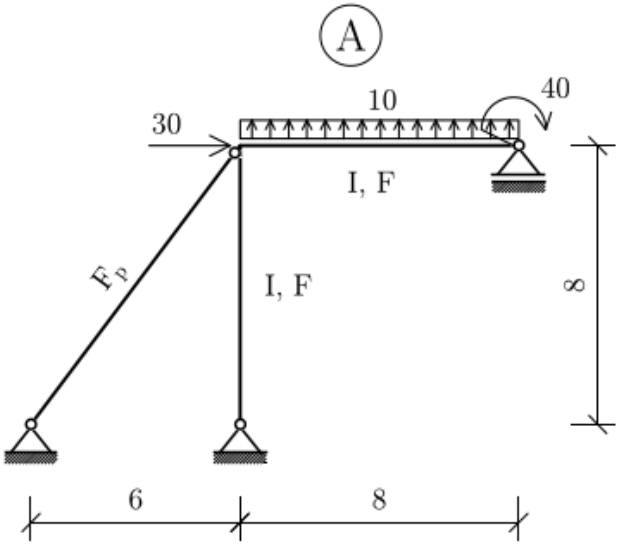
Primer 1



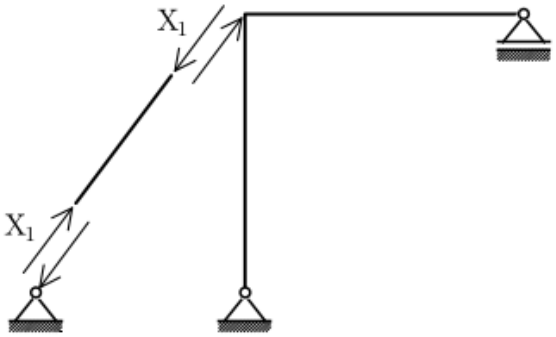
Primer 1



Primer 1



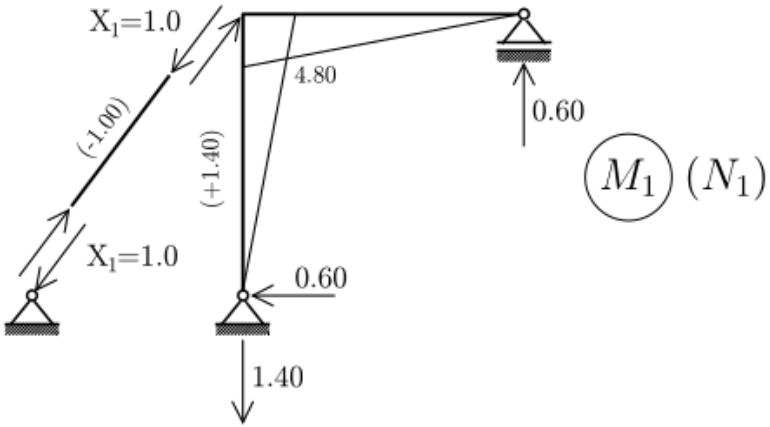
Osnovni sistem:

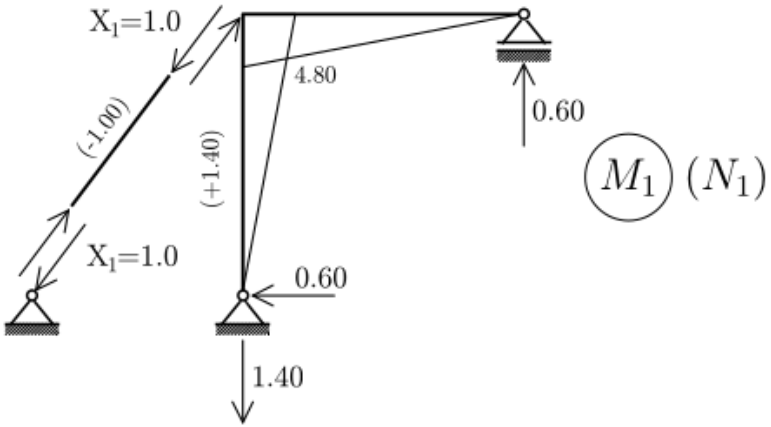


Nosač je jednom statički neodređen. Rešićemo ga koristeći metodu sila. Usvajamo osnovni sistem i pišemo uslovnu jednačinu:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0$$

Primer 1


X1=1.0
(-1.00)
X1=1.0
(+1.40)
4.80
0.60
0.60
1.40
M1 (N1)


X1=1.0
(-1.00)
X1=1.0
(+1.40)
4.80
0.60
0.60
1.40
M1 (N1)

Primer 1

$$EI\delta_{11} = \frac{8}{3}4{,}8^2 + \frac{8}{3}4{,}8^2 + 0{,}1 \cdot 8 \cdot 1{,}4^2 + 0{,}2 \cdot 10 \cdot 1 = 126{,}448$$

$$EI\delta_{10} = \frac{8}{6}4{,}8(2 \cdot 240 - 40) - \frac{8}{3}4{,}8 \cdot 80 + \frac{8}{3}4{,}8 \cdot 240 + 0{,}1 \cdot 8 \cdot 1{,}4 \cdot 75 =$$

$$= 4948$$

$$X_1 = -\frac{4948}{126{,}448} = -39{,}13\,\mathrm{kN}$$

Primer 1

Dijagrame sila u presecima određujemo principom superpozicije:

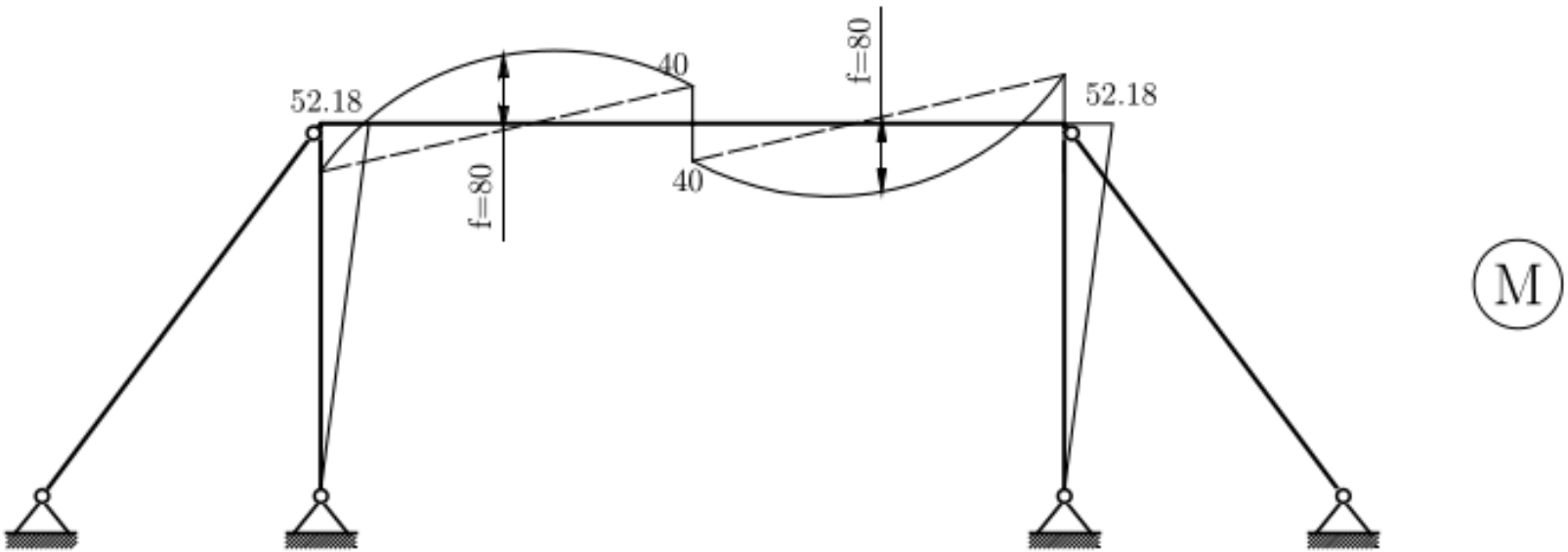
$$M = M_0 + M_1 X_1$$
$$N = N_0 + N_1 X_1$$

Dijagram T sila određujemo na osnovu dijagrama M sila.

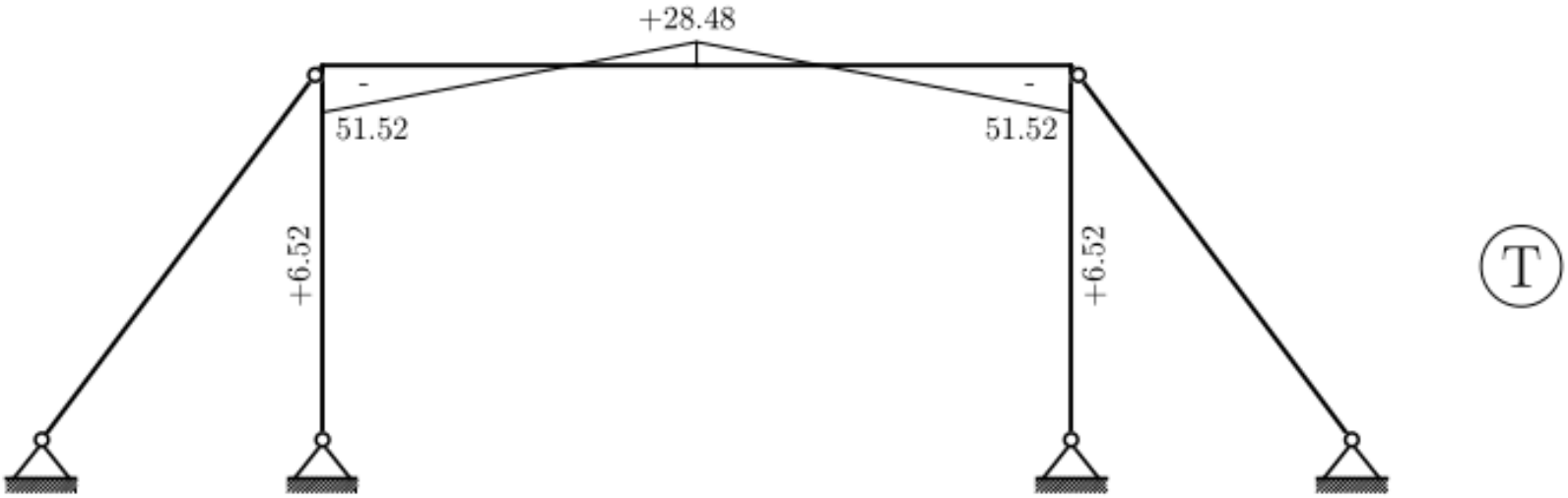
Primer 1

Ako znamo sile u presecima na jednoj polovini nosača sile u presecima na drugoj polovini nosača crtamo tako da su dijagrami transverzalnih sila isti i po znaku i po vrednostima ordinata, dok je dijagram normalnih sila i momenata isti po vrednostima ordinata, ali suprotnog znaka.

Primer 1



Primer 1



Primer 1

Primer 1

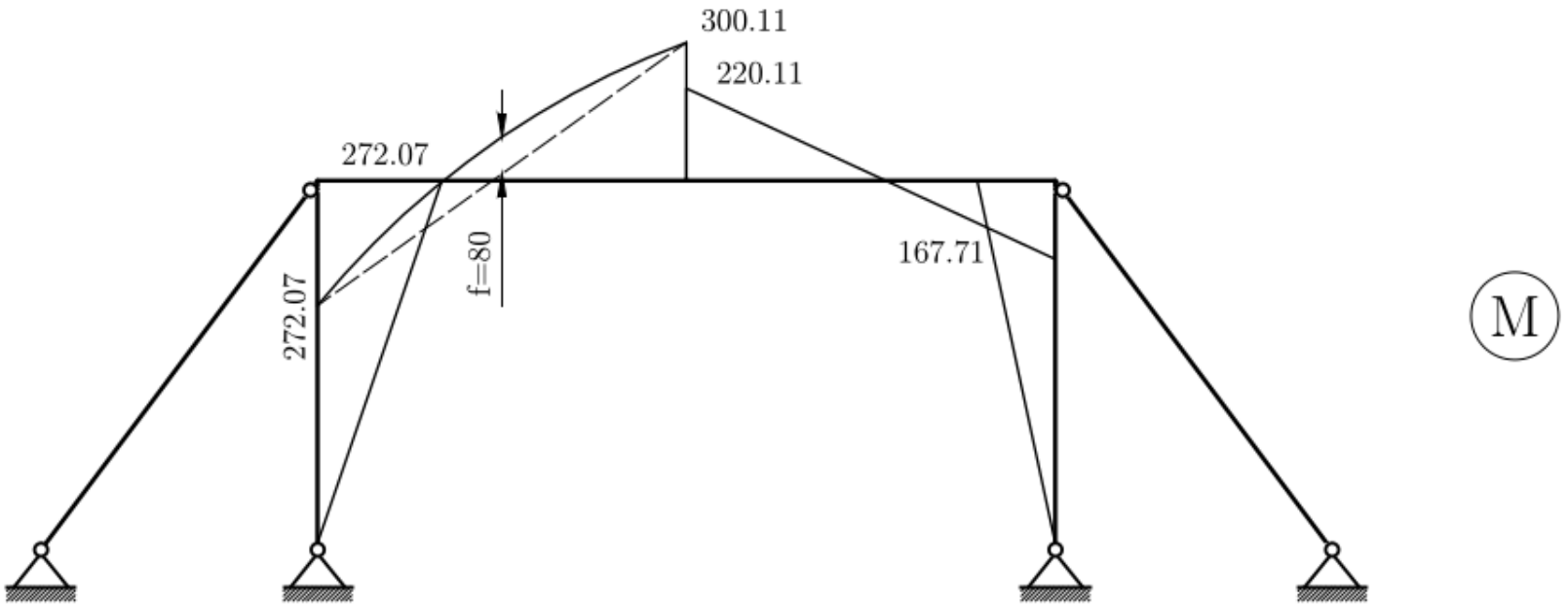
Dijagrame sila u presecima u datom nosaču (slajd 2) određujemo superponiranjem uticaja u simetriji i antisimetriji.

Primer 1

$$M = M_S + M_A$$

- M - slajd 31
- M_S - slajd 18
- M_A - slajd 26

Primer 1

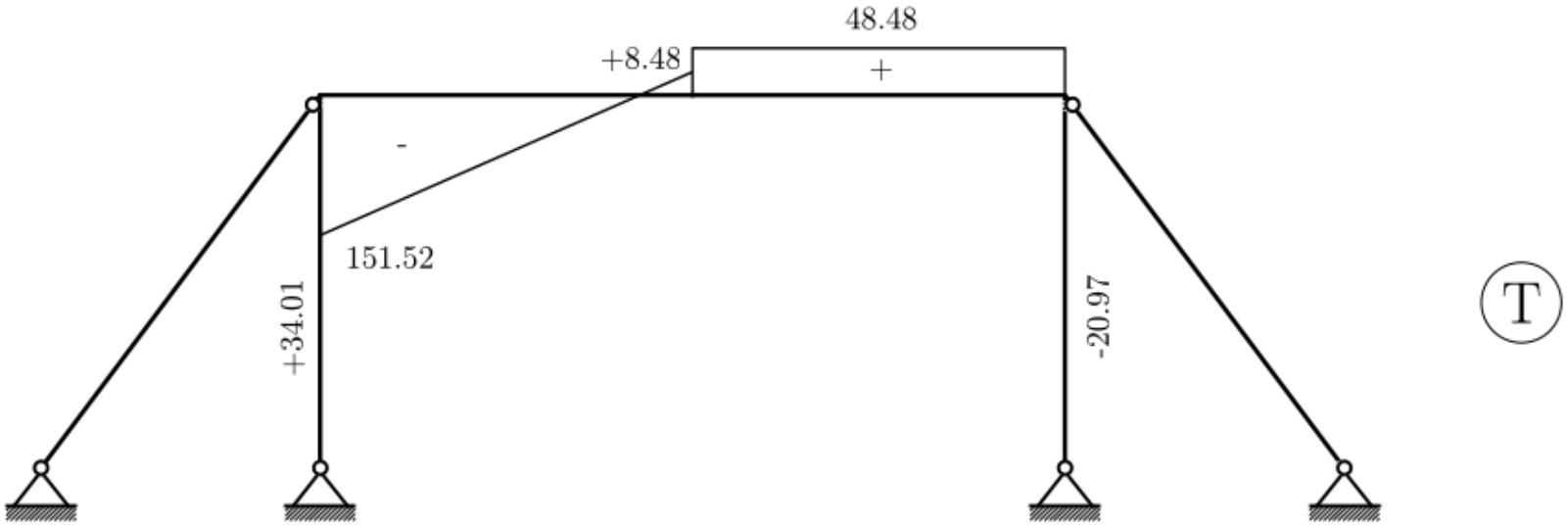


Primer 1

$$T = T_S + T_A$$

- T - slajd 33
- T_S - slajd 19
- T_A - slajd 27

Primer 1

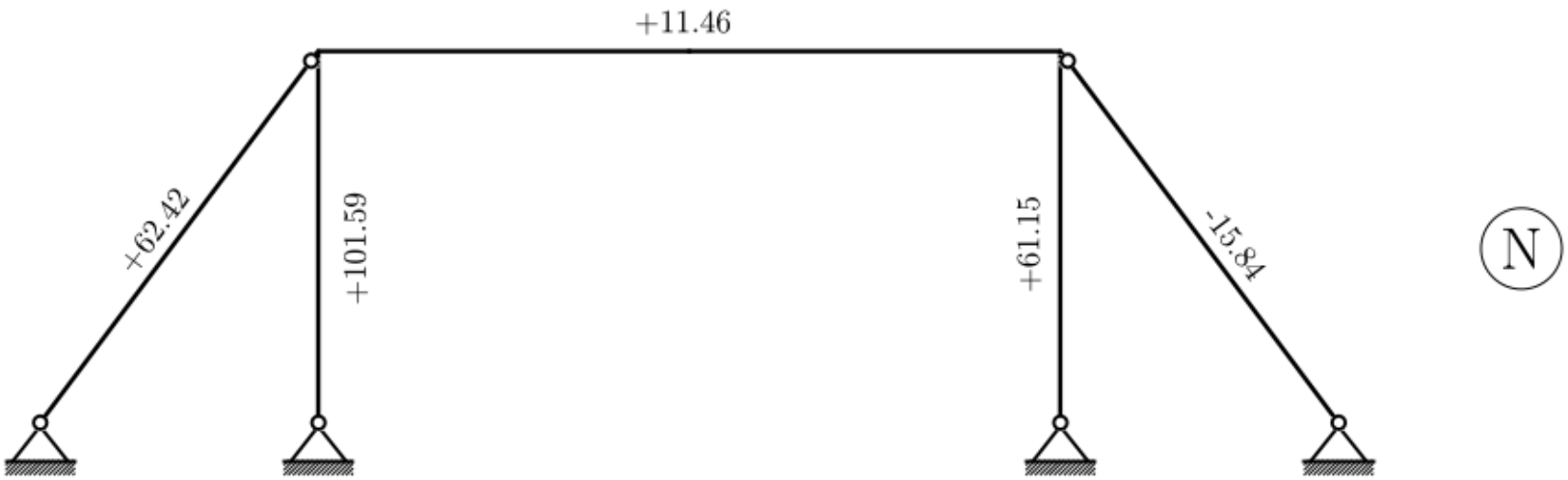


Primer 1

$$N = N_S + N_A$$

- N - slajd 35
- N_S - slajd 20
- N_A - slajd 28

Primer 1



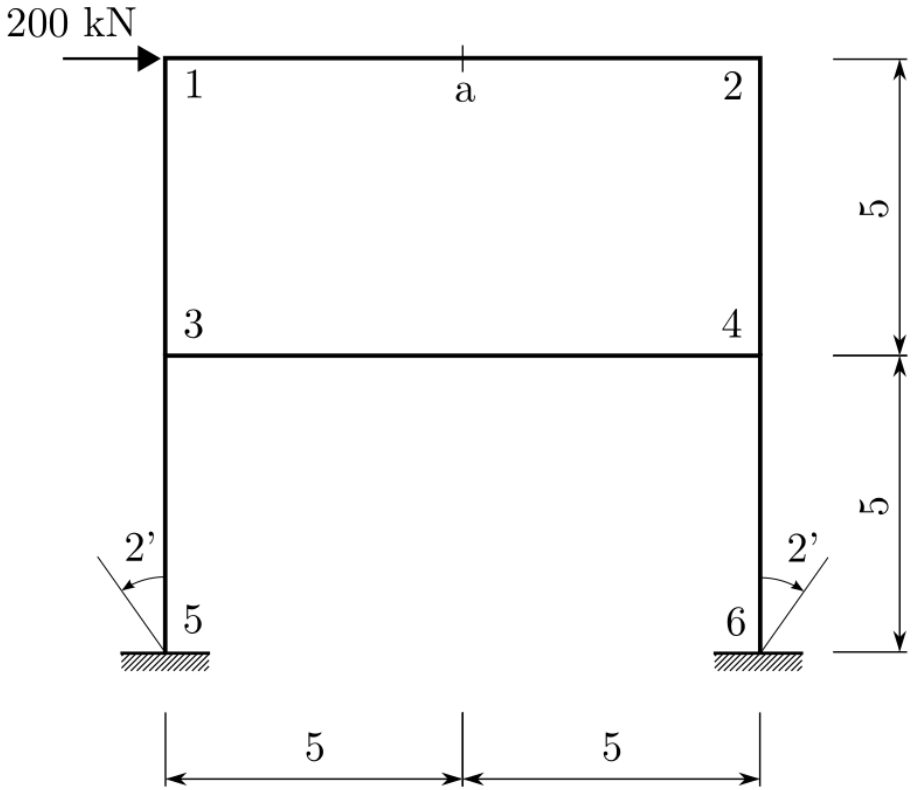
Primer 2

Primer 2

Odrediti dijagram momenata u nosaču usled uticaja koji izazivaju horizontalno pomeranje čvora a.

Koristiti osobinu simetrije nosača.

Uticaj normalnih i transverzalnih sila na deformaciju zanemariti.



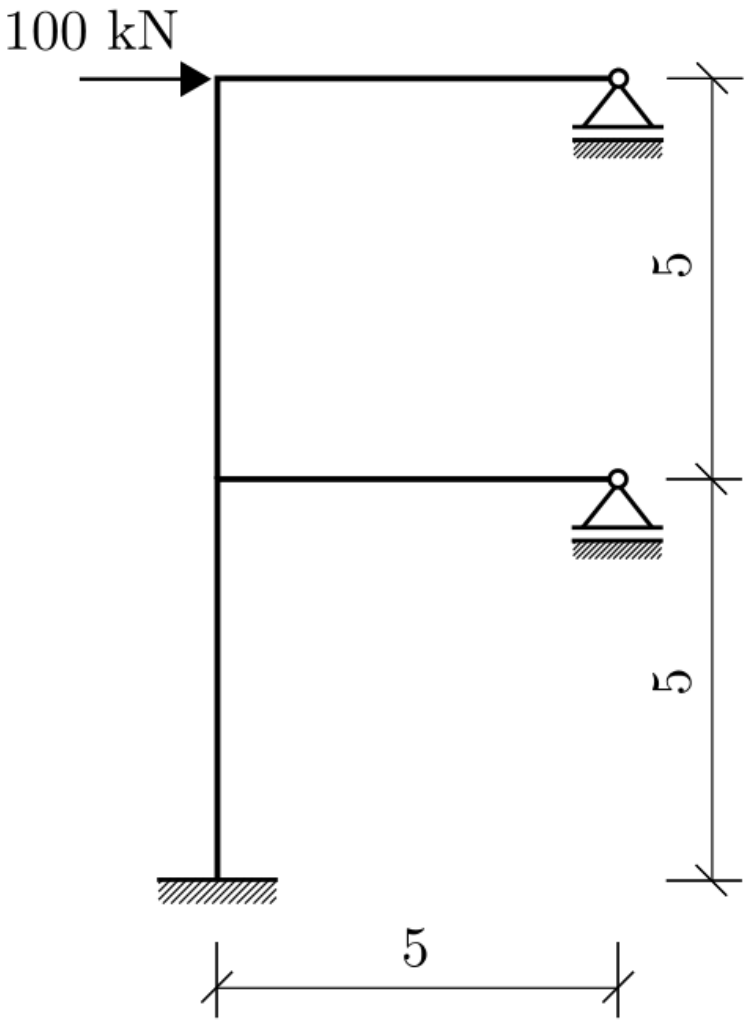
$EI = 10^5\,\mathrm{kNm}^2$

$I/F = 0$

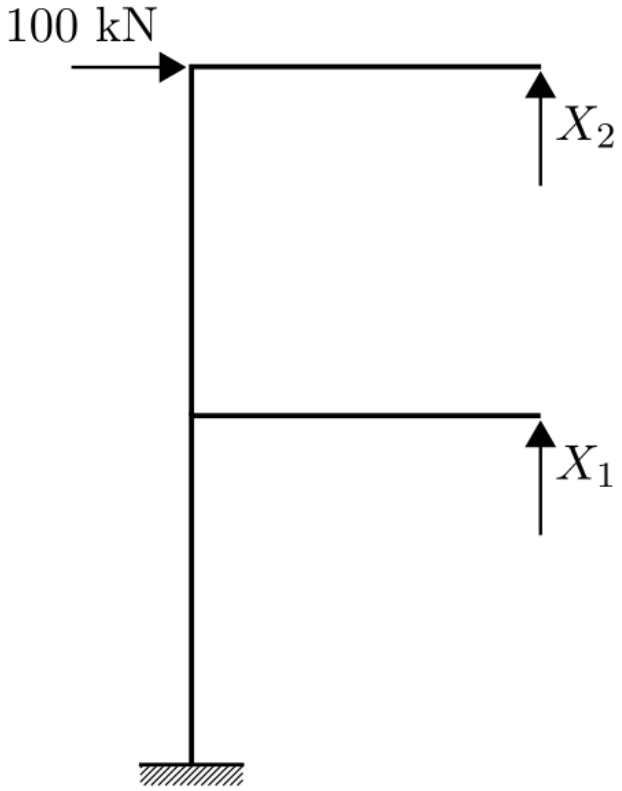
Primer 2

Horizontalno pomeranje čvora a postoji samo pri delovanju antisimetričnog dela opterećenja i uticaja.

Primer 2



Primer 2



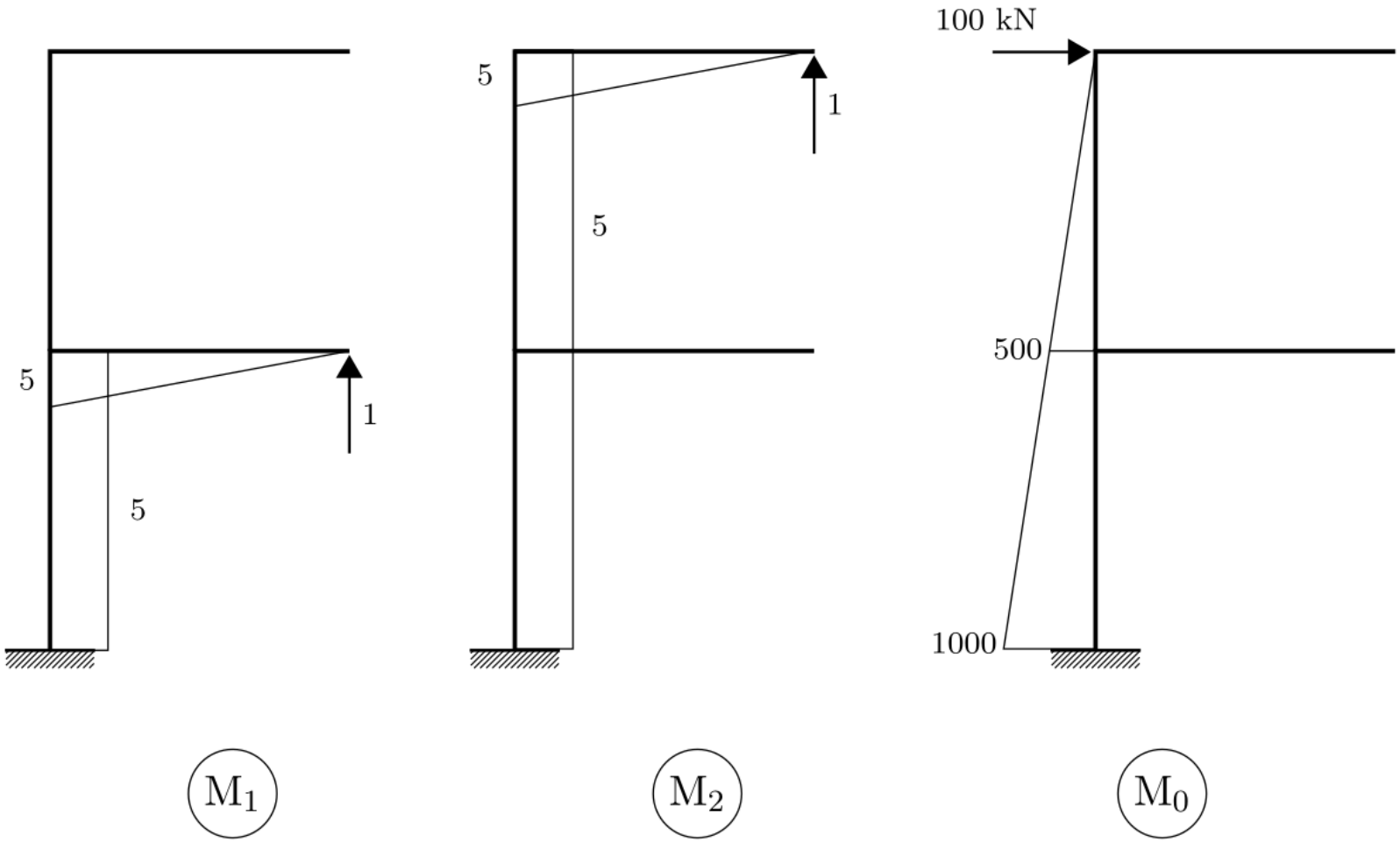
Nosač je dva puta statički neodređen. Usvajamo osnovni sistem i pišemo uslovne jednačine metode sila:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0$$

Primer 2

Pošto se uticaj T i N sila na deformaciju zanemaruje, potrebno je da odredimo dijagrame momenata u osnovnom sistemu u usled stanja $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ i $X_i = 0$.

Primer 2



Primer 2

Zatim određujemo koeficijente uslovnih jednačina.

Primer 2

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EI}\delta_{11} &= \frac{5}{3}5^2 + 5 \cdot 5^2 && = 166{,}6667 \\
\mathrm{EI}\delta_{22} &= \frac{5}{3}5^2 + 10 \cdot 5^2 && = 291{,}6667 \\
\mathrm{EI}\delta_{12} &= -5 \cdot 5^2 && = \quad 125 \\
\mathrm{EI}\delta_{10} &= -\frac{5}{2}5(500 + 1000) && = -\,18750 \\
\mathrm{EI}\delta_{20} &= \frac{10}{2}1000 \cdot 5 && = -\,25000
\end{aligned}
$$

Primer 2

$$\begin{bmatrix} 166{,}6667 & 125 \\ 125 & 291{,}6667 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -18750 \\ -25000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X_1 = 71{,}05\,\mathrm{kN}$$

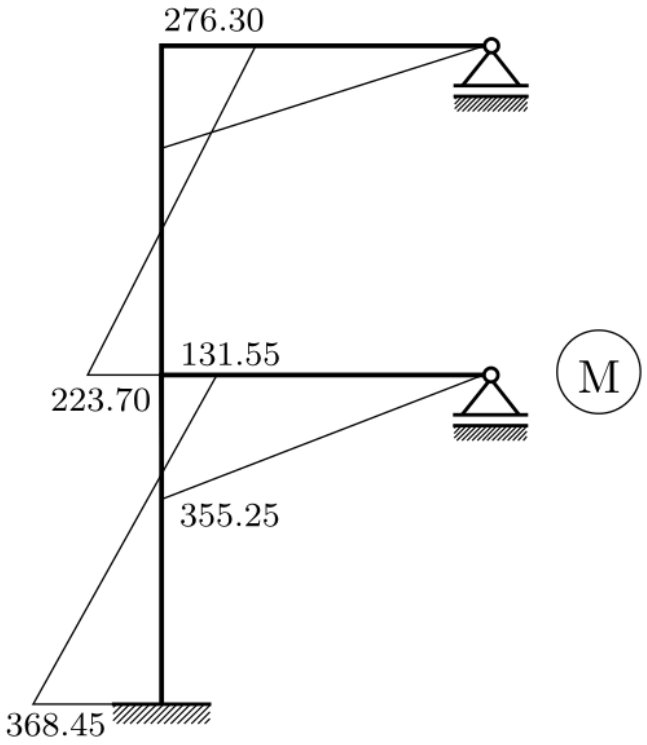
$$X_2 = 55{,}26\,\mathrm{kN}$$

Primer 2

Dijagram momenata u datom nosaču određujemo koristeći princip superpozicije

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$$

Primer 2

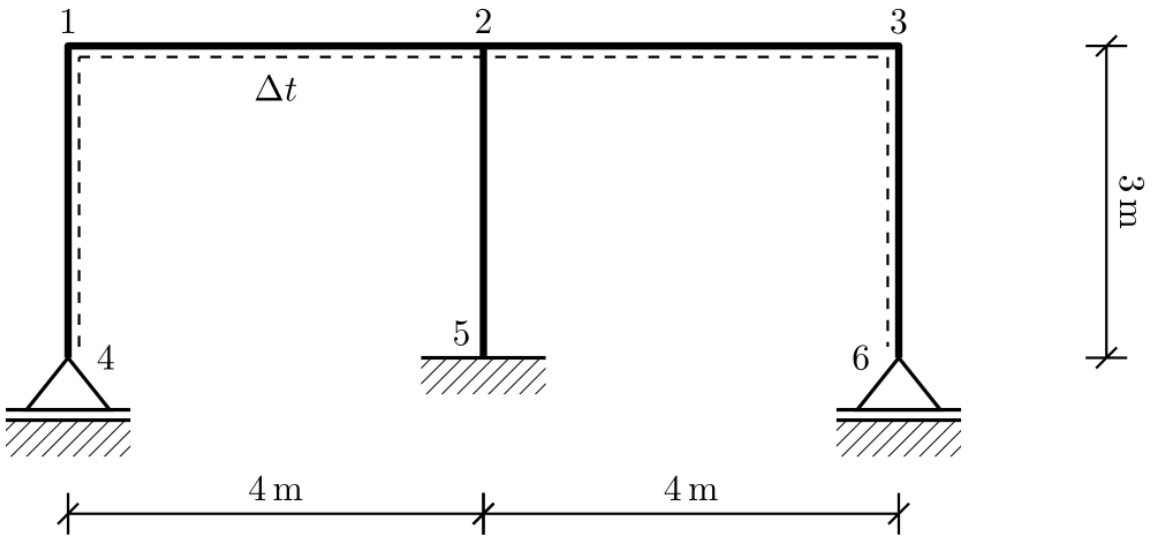


Primer 3

Primer 3

Odrediti dijagram vertikalnih pomeranja poteza štapova 1-2-3.

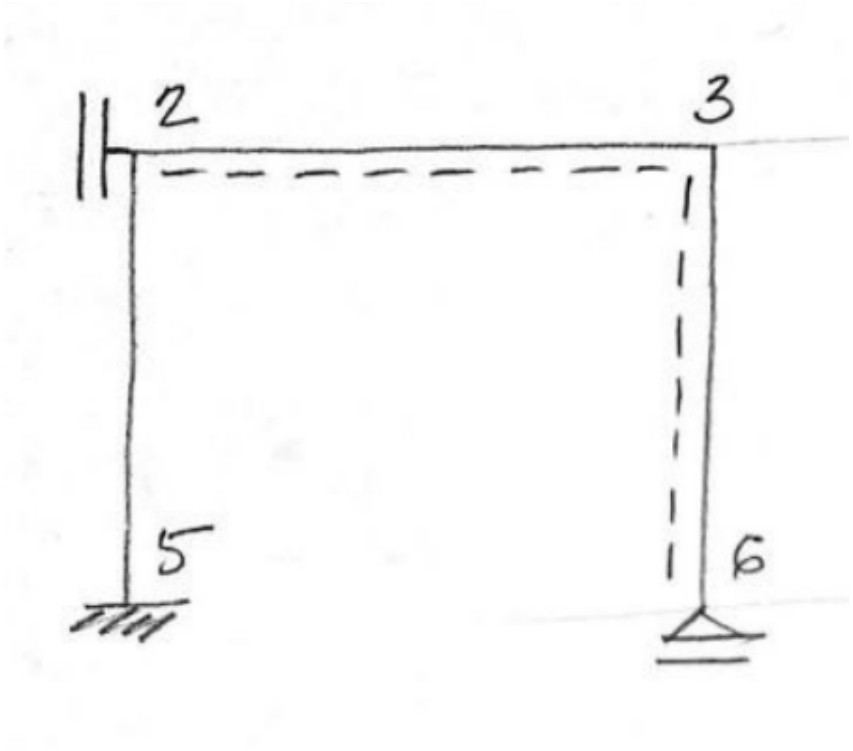
Koristiti osobinu simetrije nosača. Uticaj normalnih i transverzalnih sila na deformaciju zanemariti.



$$EI = 10^5\,\mathrm{kN\,m^2}$$
$$I/F = 0$$
$$\Delta t = 10\,^\circ\mathrm{C}$$
$$\mathrm{h} = 1\,\mathrm{m}$$
$$\alpha_t = 10^{-5}\,1/^\circ\mathrm{C}$$

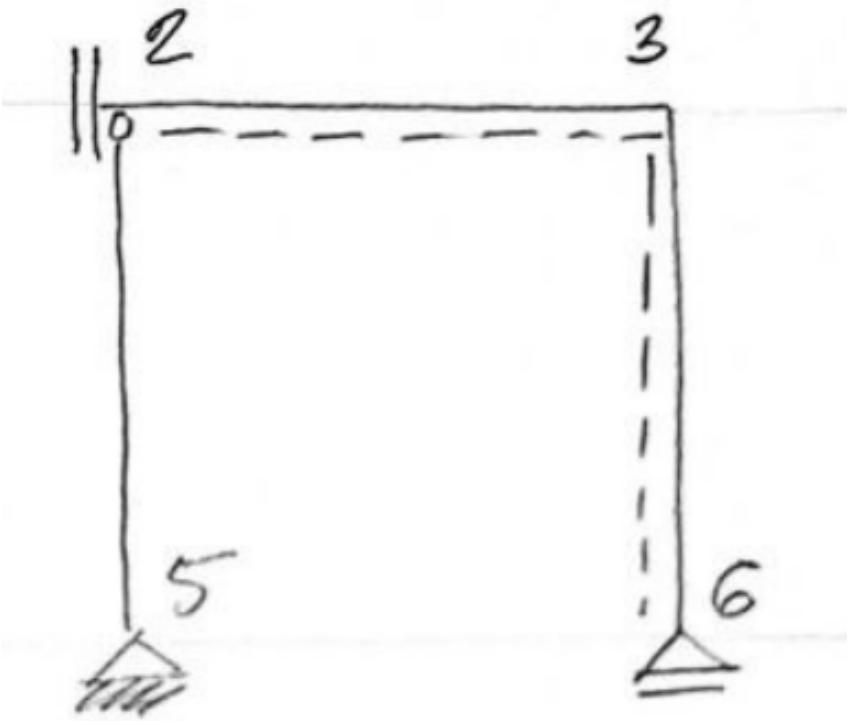
Primer 3

Temperaturna razlika na datom nosaču je čisto simetrično opterećenje. Zato ćemo posmatrati samo polovinu nosača pri simetričnoj deformaciji.



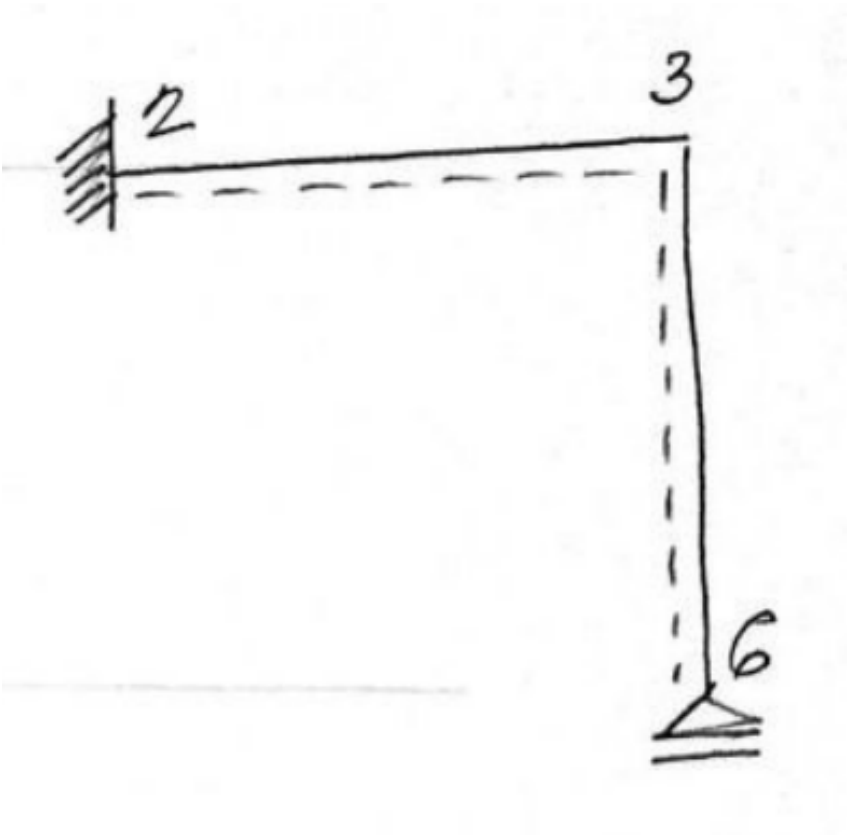
Primer 3

U štapu u osi simetrije, 2-5, mogu se javiti samo normalne sile. Zato taj štap možemo prikazati kao prost štap.



Primer 3

Pošto je uticaj normalnih sila na deformaciju zanemaren, štap 2-5 nije deformabilan, pa se ponaša kao oslonac za čvor 2. Zato štap 2-5 možemo ukloniti i u čvoru 2 nacrtati potpuno uklještenje.

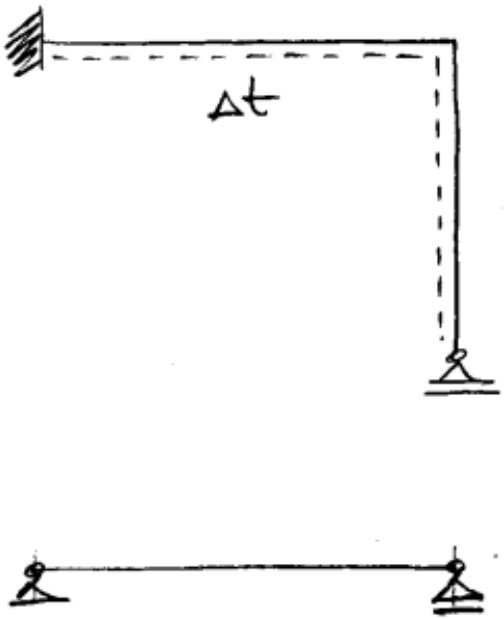


Primer 3

Da bismo odredili dijagram pomeranja, primenićemo statičko-kinematičku analogiju nosača.

Primer 3

Fiktivni nosač datog poteza štapova je statički preodređen nosač.



$$\beta_f = \left(\frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)\frac{1}{\cos\alpha}$$

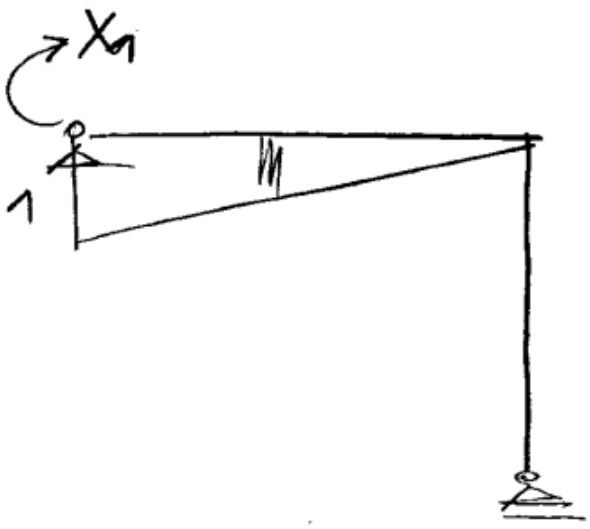
$$EI\,\beta_f = \overset{\Delta t}{M} + \underbrace{EI\,\alpha_t \frac{\Delta t}{h}}_{10^{5}\cdot 10^{-5}\cdot \frac{10}{1} = 10}$$

Primer 3

Da bismo odredili fiktivno opterećenje p_f, moramo odrediti dijagram momenata usled temperaturne razlike Δt u datom (stvarnom) nosaču.

Primer 3

Stvarni nosač je jednom statički neodređen. Da bismo odredili dijagram momenata, koristićemo metodu sila. Usvajamo osnovni sistem i pišemo uslovnu jednačinu metode sila.



$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$EI\,\delta_{11} = \frac{4}{3} \cdot 1^2 = 4/3$$

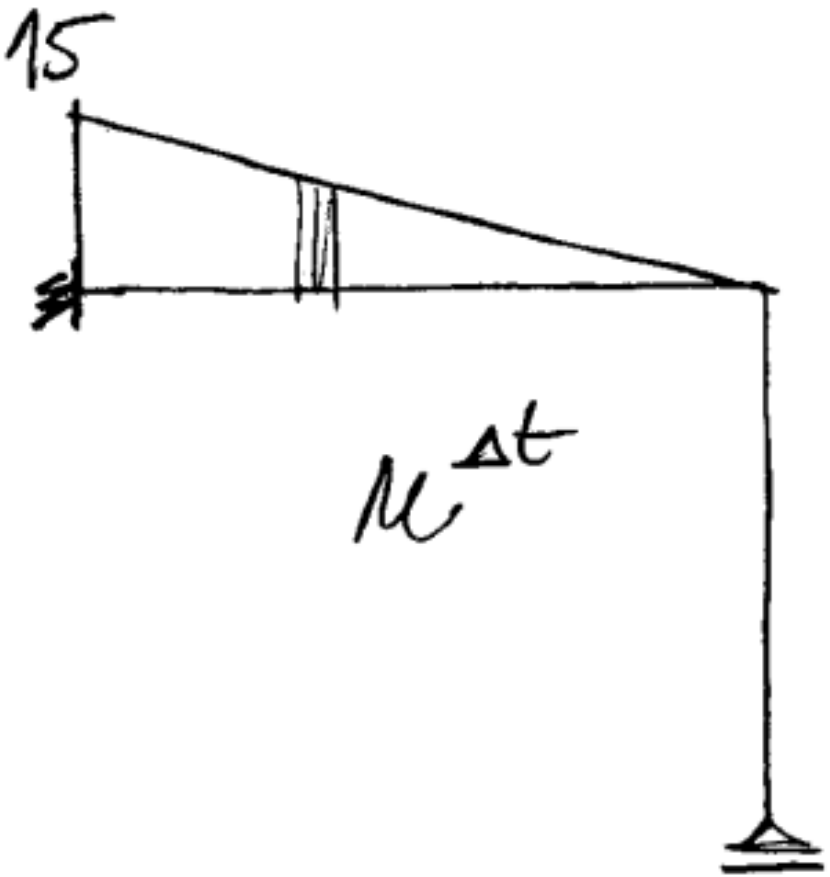
$$EI\,\delta_{10} = \frac{4 \cdot 1}{2} \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{10}{1} = 20$$

$$X_1 = -20 \cdot \frac{3}{4} = -15$$

Primer 3

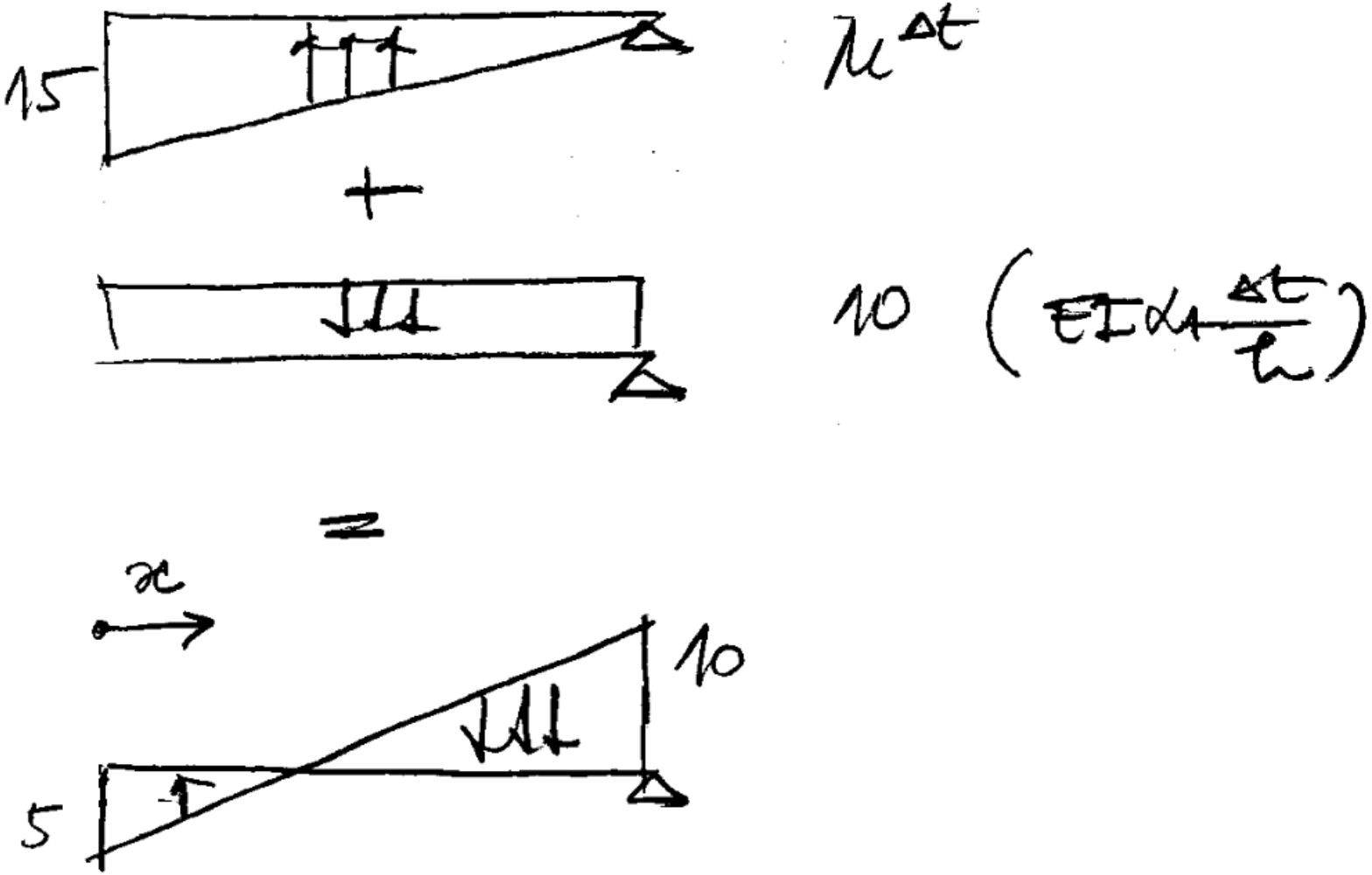
Dijagram momenata usled temperaturne razlike na datom nosaču računamo koristeći princip superpozicije

$$M = M_1 X_1$$



Primer 3

Sada možemo odrediti fiktivno opterećenje fiktivnog nosača:

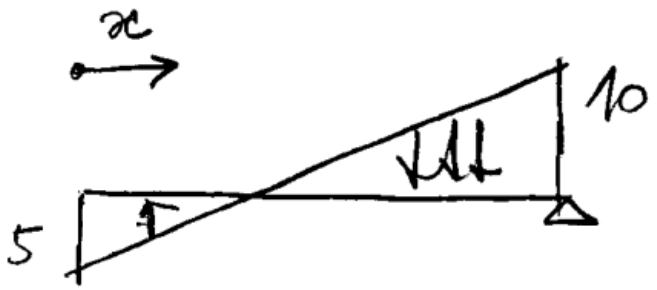


Primer 3

Dijagram pomeranja štapova odredićemo analitički.

Primer 3

Prvo određujemo funkciju fiktivnog opterećenja.



$$p(x) = ax + b$$

$$p(0) = -5 \Rightarrow b = -5$$

$$p(4) = 10 \Rightarrow 4a - 5 = 10 \Rightarrow a = 3{,}75$$

$$p(x) = 3{,}75x - 5$$

Primer 3

Zatim određujemo vrednost momenta u proizvoljnom preseku c.

$$M_c = \cancel{A_0}^{\,0} \cdot x_c - \int_0^{x_c} p(x)(x_c - x)\,dx =$$

$$= -\int_0^{x_c} (3{,}75x - 5)(x_c - x)\,dx =$$

$$= -\int_0^{x_c} (3{,}75x x_c + 3{,}75x^2 - 5x_c + 5x)\,dx$$

$$= -3{,}75x_c \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_c} - 3{,}75\frac{x^3}{3}\Big|_0^{x_c} + 5x_c x\Big|_0^{x_c} - 5\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_c}$$

$$= -3{,}75\frac{x_c^3}{2} - 3{,}75\frac{x_c^3}{3} + 5x_c^2 - 5\frac{x_c^2}{2}$$

$$= -0{,}625x_c^3 + 2{,}5x_c^2$$

Primer 3

Zatim tražimo položaj i vrednost maksimalnog momenta.

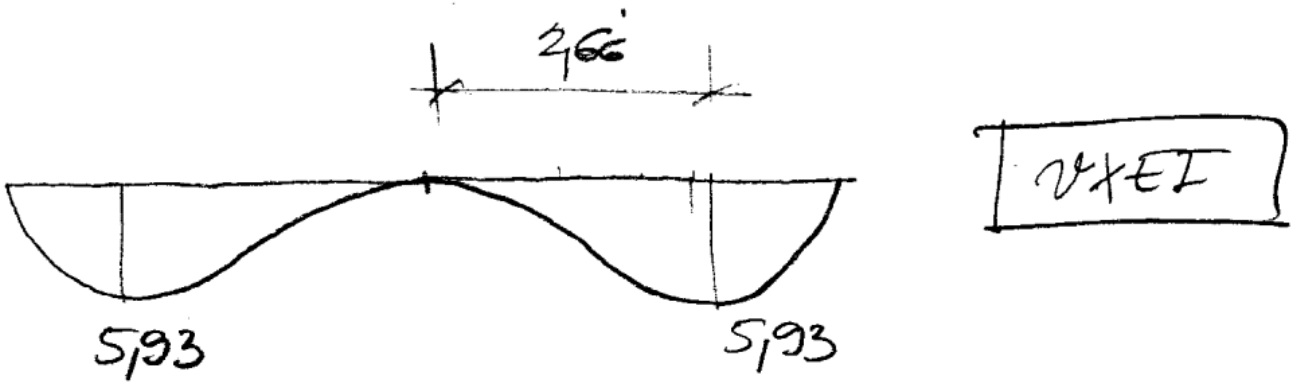
$$M(x) = -0{,}625x^3 + 2{,}5x^2$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \qquad -1{,}875x^2 + 5x = 0$$

$$x(-1{,}875x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2{,}\dot{6}$$

$$M(2{,}\dot{6}) = 5{,}93$$

Primer 3

Dijagram vertikalnih pomeranja štapova jednak je dijagramu momenata na fiktivnom nosaču.

Pošto je u pitanju simetrično opterećen simetričan nosač, dijagram vertikalnih pomeranja je slika u ogledalu u odnosu na osu simetrije nosača.