Pomeranja
Određivanje dijagrama pomeranja nosača

Teorija konstrukcija - HVE

Predavanja: 7. sedmica

Određivanje dijagrama pomeranja nosača

Za određivanje dijagrama pomeranja nosača stoje nam na raspolaganju:

- diferencijalna jednačina štapa *
- uslovi kompatibilnosti pomeranja nosača *
- statičko-kinematička analogija nosača

> U statici konstrukcija, dijagram pomeranja nosača određujemo najčešće primenom **statičko-kinematička analogije nosača**.

Prvo ćemo definisati statičko-kinematičku analogiju **štapa**.

*Nije obavezno, ali preporučujemo da pročitate u knjizi.

Statičko-kinematička analogija štapa

Oto Mor (*Otto Mohr*) - formulisao analogiju za prav štap

Maksvel (*Maxwell*) - proširio formulaciju na štapove sa proizvoljnim oblikom ose

Statičko-kinamatička analogija štapa naziva se i **Mor-Maksvelova analogija štapa**.

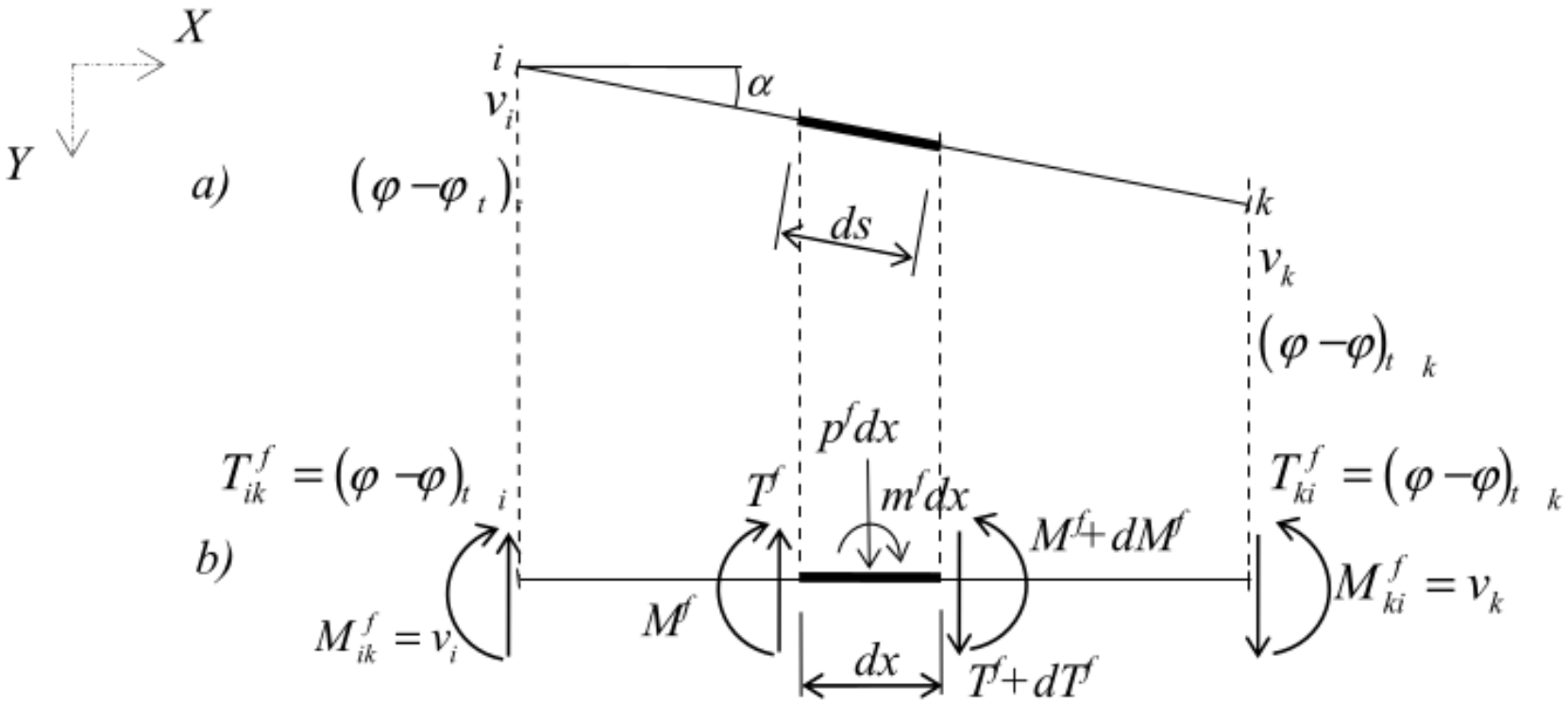
Mor-Maksvelova analogija štapa

Mor-Maksvelova analogija štapa

Dobija se upoređivanjem

- jednačina veze između pomeranja i deformacije diferencijalnog elementa datog štapa i
- uslova ravnoteže diferencijalnog elementa jednog pravog fiktivnog štapa, koji je upravan na pravac pomeranja koje tražimo.

Mor-Maksvelova analogija štapa



Mor-Maksvelova analogija štapa

Veza između pomeranja (v i $(\varphi - \varphi_t)$) i deformacija (ϵ i κ):

$$dv = \varepsilon dy + \varphi dx$$
$$\frac{d\left(\varphi - \varphi_t\right)}{ds} = -\kappa$$

Nakon transformacija* jednačine postaju:

$$\frac{dv}{dx} = \varepsilon \cdot \operatorname{tg}\alpha + \varphi_t + \left(\varphi - \varphi_t\right)$$
$$\frac{d\left(\varphi - \varphi_t\right)}{dx} = -\frac{\kappa}{\cos\alpha}$$

*Detaljnije u knjizi.

Mor-Maksvelova analogija štapa

Posmatrajmo sada (slajd 5)

- prav, fiktivni štap
- upravan na pravac pomeranja koje tražimo
- opterećen fiktivnim raspodeljenim opterećenjem p_f i fiktivnim raspodeljenim momentima m_f

Mor-Maksvelova analogija štapa

Uslovi ravnoteže elementa dx fiktivnog štapa:

$$\frac{dM^f}{dx} = T^f + m^f$$
$$\frac{dT^f}{dx} = -p^f$$

Mor-Maksvelova analogija štapa

Uporedimo jednačine sa slajdova 6 i 8:

$$\frac{dv}{dx} = \varepsilon \cdot \operatorname{tg}\alpha + \varphi_t + (\varphi - \varphi_t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{dM^f}{dx} = T^f + m^f$$

$$\frac{d(\varphi - \varphi_t)}{dx} = -\frac{\kappa}{\cos\alpha} \quad \leftrightarrow \quad \frac{dT^f}{dx} = -p^f$$

Jednačine prelaze jedna u drugu ako stavimo da je:

$$\begin{aligned} \varepsilon \operatorname{tg}\alpha + \varphi_t &\leftrightarrow m^f \\ \frac{\kappa}{\cos\alpha} &\leftrightarrow p^f \\ v &\leftrightarrow M^f \\ \varphi - \varphi_t &\leftrightarrow T^f \end{aligned}$$

Ove jednačine predstavljaju Mor-Maksvelovu analogiju.

Mor-Maksvelova analogija štapa

Mor-Maksvelova analogija štapa

Pomeranja v datog štapa usled spoljašnjih uticaja jednaka su momentima M_f , a uglovi obrtanja poprečnih preseka $\varphi - \varphi_t$ jednaki su transverzalnim silama T_f jednog fiktivnog štapa opterećenog fiktivnim raspodeljenim opterećenjem p_f upravno na osu štapa i fiktivnim raspodeljenim momentima m_f.

$$p^f = \frac{\kappa}{\cos\alpha} = \left(\frac{M}{EI} + a_t\frac{\Delta t}{h}\right)\cdot\sec\alpha$$

$$m^f = \varepsilon\,\mathrm{tg}\,\alpha + \varphi_t = \left(\frac{N}{EF} + \alpha_t t^o\right)\cdot\mathrm{tg}\,\alpha + k\frac{T}{GF}$$

Mor-Maksvelova analogija štapa

Fiktivni štap

Prav štap upravan na pravac pomeranja koje se traži, čiji granični uslovi **po silama** odgovaraju graničnim uslovima **po pomeranjima** datog štapa.

Granični uslovi

$$M_{ik}^f = v_i \qquad M_{ki}^f = v_k$$

$$T_{ik}^f = (\varphi - \varphi_t)_i \qquad T_{ki}^f = (\varphi - \varphi_t)_k$$

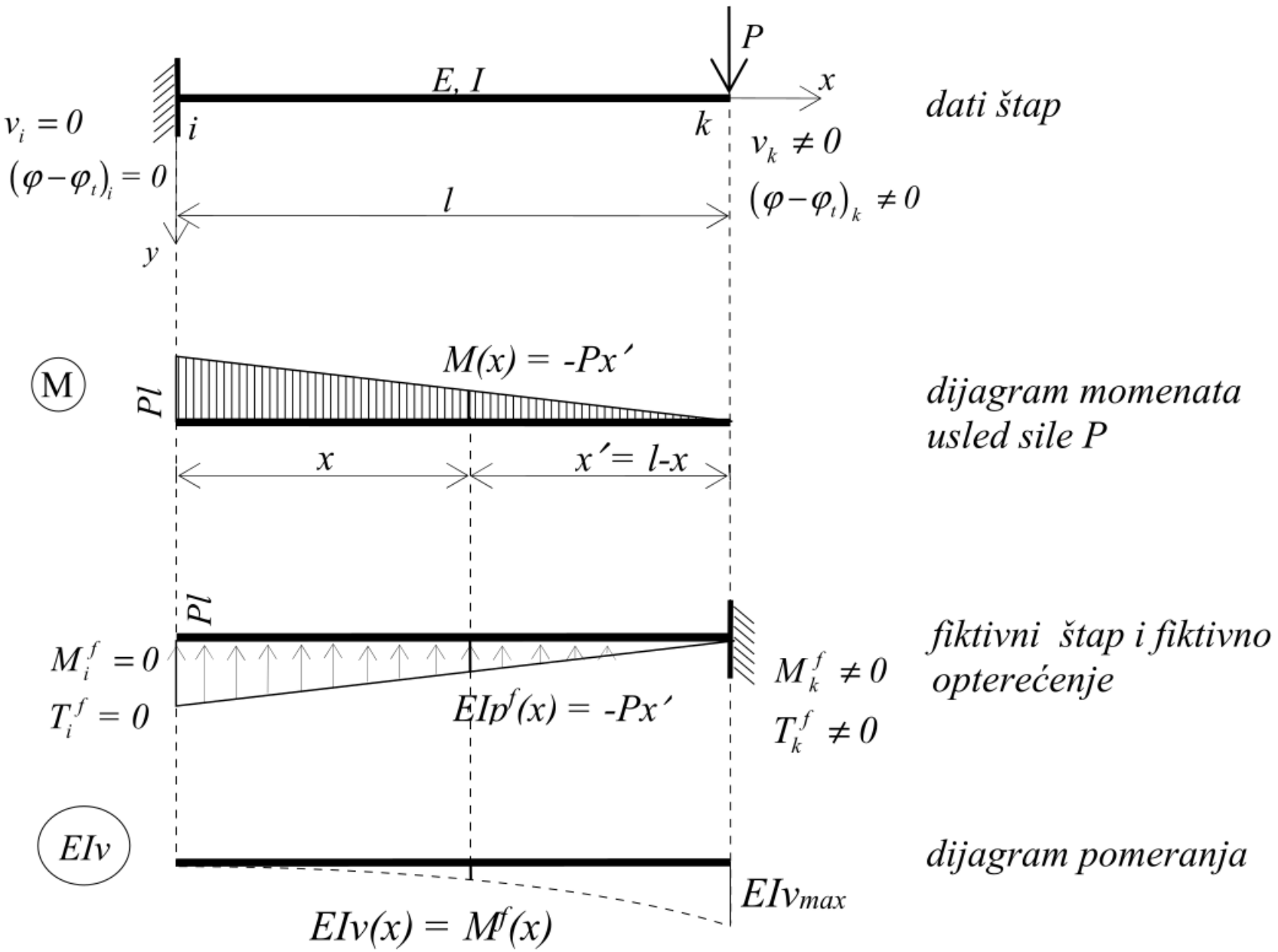
Mor-Maksvelova analogija štapa

Pošto analogija uspostavlja vezu između deformacijskih veličina datog štapa i statičkih veličina jednog fiktivnog štapa opterećenog fiktivnim raspodeljenim opterećenjem i fiktivnim raspodeljenim momentima, naziva se i **statičko-kinematička analogija štapa**.

Statičko-kinematička analogija štapa

Dijagram pomeranja v datog štapa usled spoljašnjih uticaja jednak je dijagramu momenata M_f, a dijagram obrtanja poprečnih preseka $\varphi - \varphi_t$ jednak je dijagramu transverzalnih sila T_f fiktivnog štapa koji je opterećen fiktivnim raspodeljenim opterećenjem p_f i fiktivnim raspodeljenim momentima m_f.

Mor-Maksvelova analogija štapa: primer



Mor-Maksvelova analogija nosača

Mor-Maksvelova analogija nosača

Statičko-kinematička analogija štapa se može proširiti na nosače.

Statičko-kinematička analogija nosača

Dijagram pomeranja v datog nosača usled zadatih spoljašnjih uticaja jednak je dijagramu momenata M f , a dijagram obrtanja poprečnih preseka — t jednak je dijagramu transverzalnih sila T f fiktivnog nosača koji je opterećen fiktivnim raspode- ljenim opterećenjem p f i fiktivnim raspodeljenim momentima m f

Fiktivni nosač

Fiktivni nosač je prav upravan na pravac traženog pomeranja, čiji granični i prelazni uslovi po silama odgovaraju graničnim i prelaznim uslovima po pomeranjima datog nosača.

Mor-Maksvelova analogija nosača: granični i prelazni uslovi stvarnog nosača

Granični uslovi

Uslovi kojima se definišu pomeranja u krajnjim tačkama datog nosača, osnosno sile u slučaju fiktivnog nosača.

Prelazni uslovi

Definišu veze između pomeranja u među-čvorovima datog nosača, odnosno veze između sila u odgovarajućim čvorovima fiktivnog nosača.

Mor-Maksvelova analogija nosača: granični i prelazni uslovi fiktivnog nosača

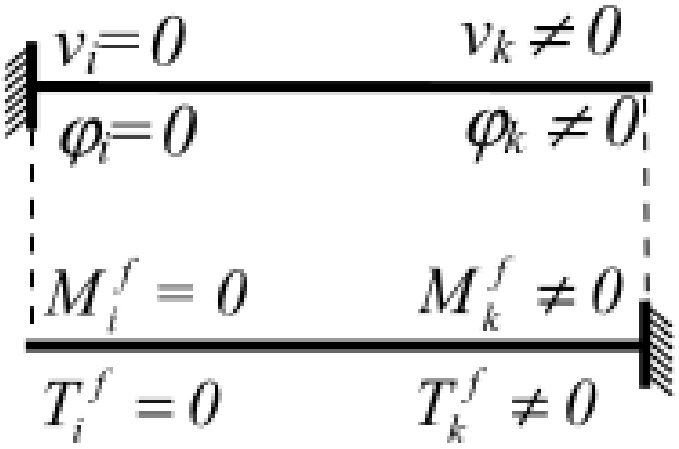
Granični i prelazni uslovi po silama fiktivnog nosača dobijaju se primenom Mor-Maksvelove analogije iz graničnih i prelaznih uslova po pomeranjima datog nosača.

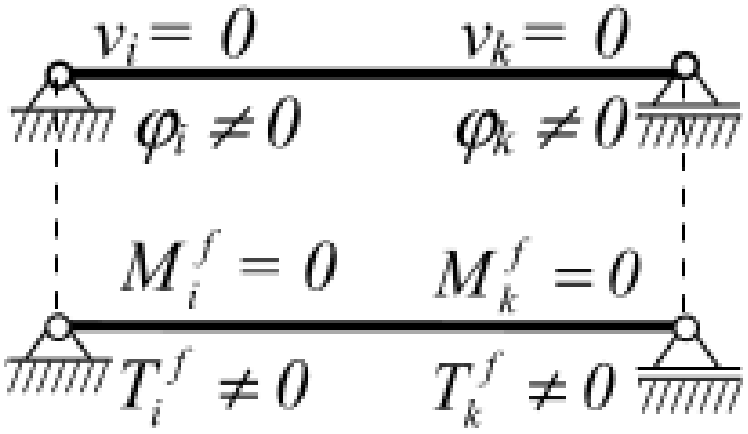
Mor-Maksvelova analogija nosača: granični i prelazni uslovi

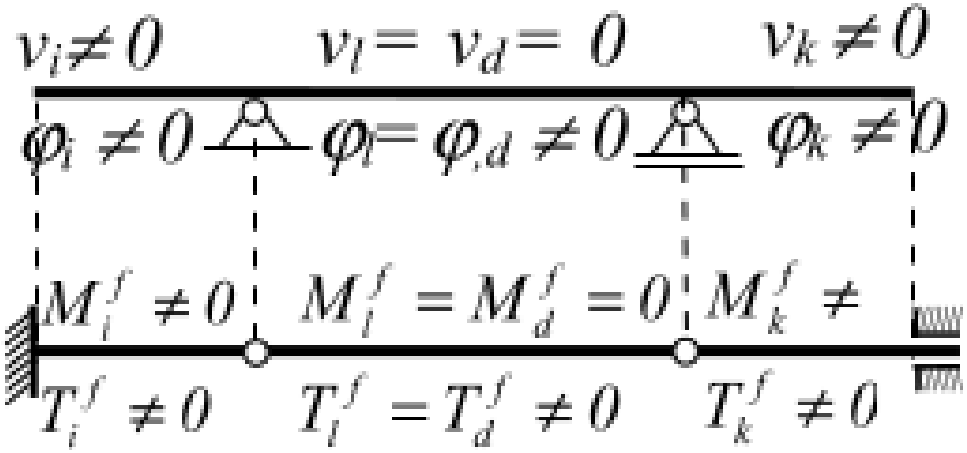
Postupak:

- u stvarnom nosaču se odredi da li su pomeranja i obrtanja u krajnjim tačkama stvarnog nosača jednaka nuli ili različita od nule
- u stvarnom nosaču se odredi da li su pomeranja i obrtanja u presecima levo i desno od među-čvorova ista ili različita
- u tako definisane granične i prelazne uslove po pomeranjima datog nosača stavljamo da je $M_f = v$ i $T_f = \varphi\varphi_t$ dobijaju se granični i prelazni uslovi po silama za fiktivni nosač

Mor-Maksvelova analogija nosača: granični i prelazni uslovi







Mor-Maksvelova analogija nosača

Opterećenje fiktivnog nosača p_f upravno na osu štapa, tako da su horizontalne reakcije oslonaca fiktivnog nosača uvek jednake nuli.

Radi kinematičke stabilnosti dovoljno je samo jednom od oslonaca fiktivnog nosača sprečiti horizontalno pomeranje, a sve ostale oslonce ostaviti pomerljive u horizontalnom pravcu.

Mor-Maksvelova analogija nosača

Fiktivni nosači statički određenih stvarnih nosača mogu biti

- statički određeni ili
- statički neodređeni.

Mor-Maksvelova analogija nosača

Fiktivni nosač statički određen

Određivanje dijagrama pomeranja i obrtanja stvarnog nosača svodi se na crtanje dijagrama momenata tj. transverzalnih sila statički određenog nosača.

Mor-Maksvelova analogija nosača

Fiktivni nosač statički neodređen

Sile u presecima možemo dobiti ukoliko prethodno odredimo reakcije n veza, gde je n broj statičke neodređenosti nosača.

Izabrane reakcije veza nazivamo statički neodređenim veličinama nosača i obeležavamo sa $X_i^f, i = 1, 2, \ldots n$.

Statički neodređene veličine fiktivnog nosača X_i^f predstavljaju odgovarajuća generalisana pomeranja δ_i stvarnog nosača.

Vrednost pomeranja δ_i određuje se primenom **Principa virtualnih sila**.

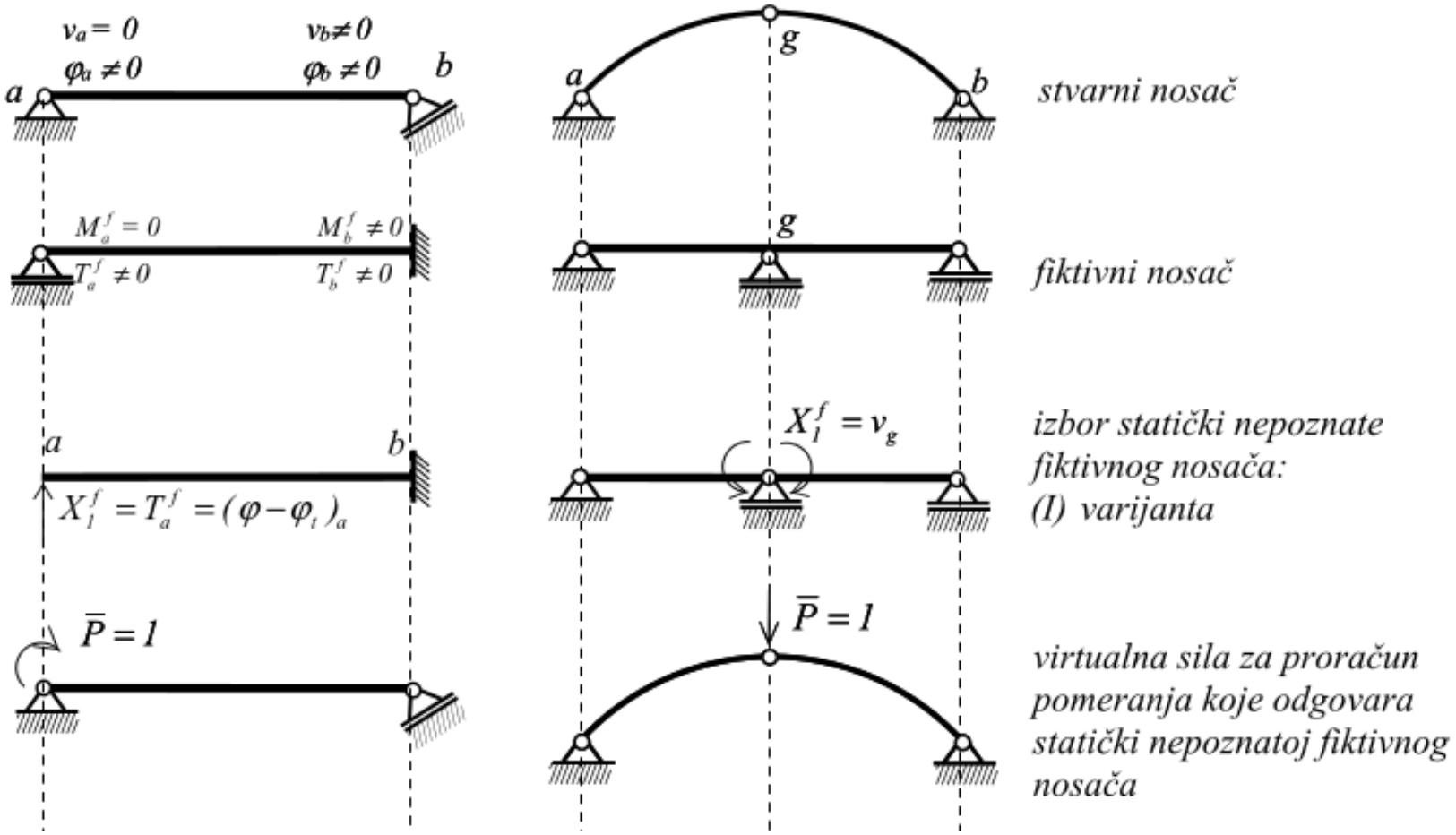
Mor-Maksvelova analogija nosača

U datom nosaču zadaje se odgovarajuća generalisana virtualna sila $\overline{P}_i = 1$ koja odgovara traženom generalisanom pomeranju δ_i.

Vrednost sile X_i^f jednaka je:

$$X_i^f = \delta_i = \int_s \frac{M\overline{M}}{EI} ds + \int_s \frac{N\overline{N}}{EF} ds + k \int_s \frac{T\overline{T}}{EF} ds +$$
$$+ \int_s \overline{N} \alpha_t t^o ds + \int_s \overline{M} \alpha_t \frac{\Delta t}{h} ds -$$
$$- \sum_j \overline{C}_j c_j$$

Mor-Maksvelova analogija nosača



Određivanje dijagrama pomeranja rešetkastih nosača

Određivanje dijagrama pomeranja rešetkastih nosača

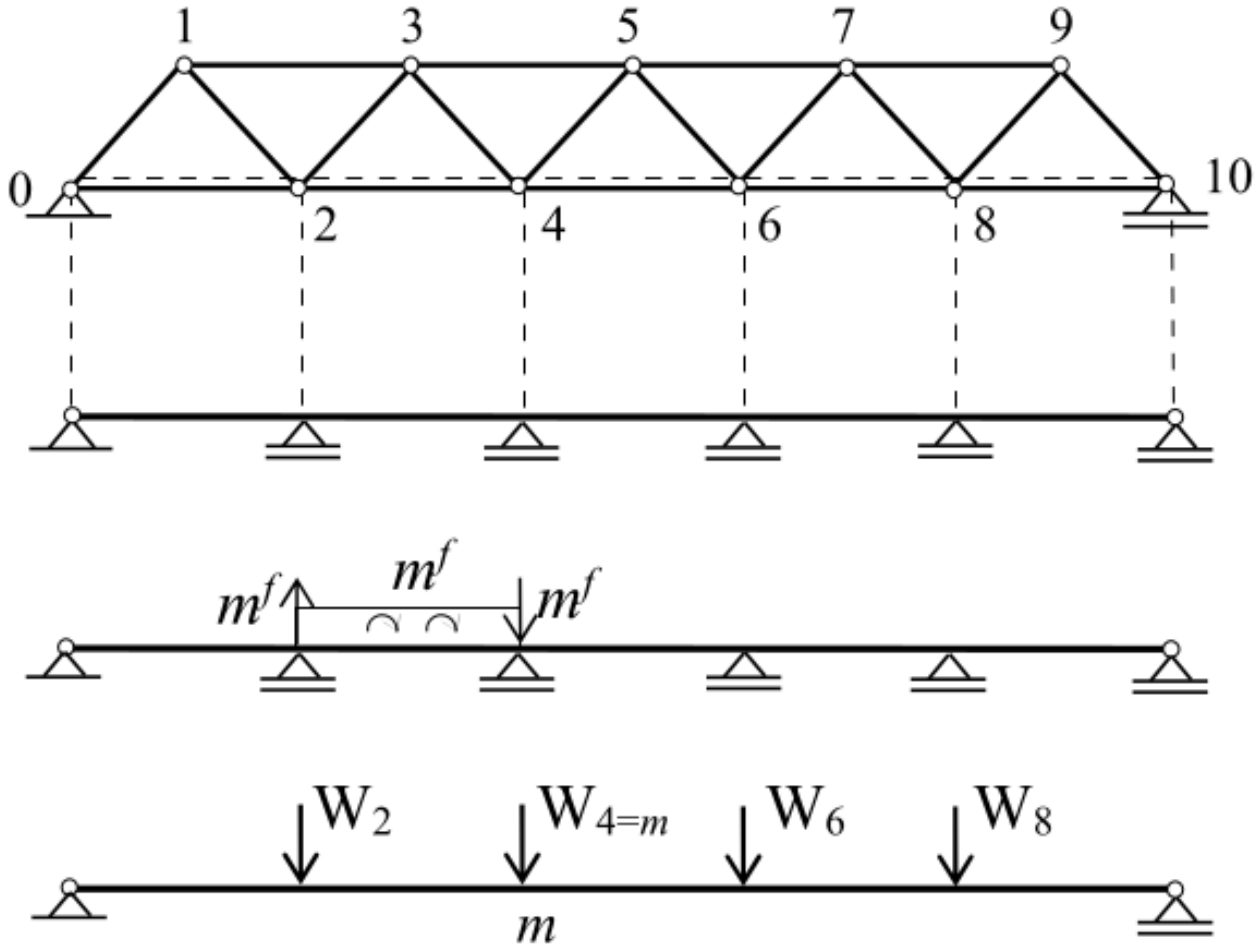
Dijagram pomeranja rešetkastih nosača određuje se takođe primenom statičko-kinematičke analogije nosača.

Određivanje dijagrama pomeranja rešetkastih nosača

Fiktivni nosač rešetkastog nosača je kontinualni nosač čiji je broj polja jednak broju polja posmatranog pojasa datog rešetkastog nosača.

Ako je broj polja posmatranog pojasa rešetke $n + 1$ onda je fiktivni nosač n puta statički neodređen.

Određivanje dijagrama pomeranja rešetkastih nosača



Određivanje dijagrama pomeranja rešetkastih nosača

Usled spoljašnjih uticaja kod rešetkastih nosača javljaju se samo normalne sile, tako da je fiktivni nosač opterećen raspodeljenim fiktivnim momentima m_f.

Ako je pojas rešetke za koji crtamo fiktivni nosač horizontalan, onda je i $m_f = 0$.

Elastične težine

Sile koje potiču od m_f i reakcije oslonaca X_i mogu se zameniti silama W_m koje deluju u oslonačkim čvorovima nosača.

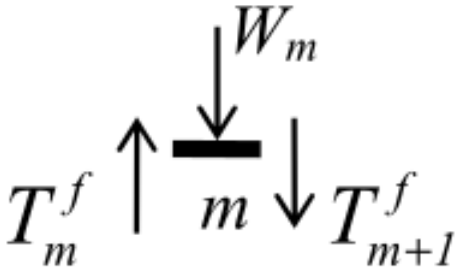
Određivanje dijagrama pomeranja rešetkastih nosača: elastične težine

Elastične težine se određuju neposredno, primenom principa virtualnih sila.

Direktnim određivanjem elastičnih težina W_m izbegava se pojedinačno određivanje sila usled raspodeljenog momenta m_f i usled statički nepoznatih veličina X_i.

Određivanje dijagrama pomeranja rešetkastih nosača: elastične težine

Sile u čvoru m:



$$W_m = T_m^f - T_{m+1}^f$$

Transverzalna sila T_m fiktivnog nosača jednaka je razlici momenata na krajevima štapa podeljeno sa dužinom štapa.

Određivanje dijagrama pomeranja rešetkastih nosača: elastične težine

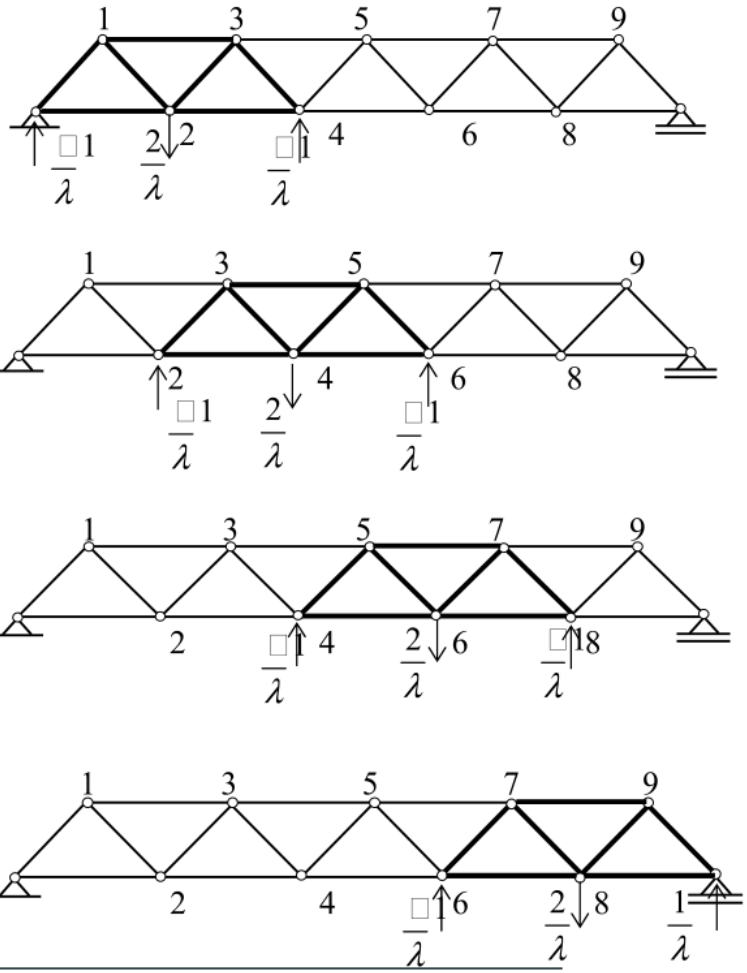
Pošto je momenat fiktivnog nosača u tački m jednak ugibu stvarnog nosača, $M_m = v_m$, može se napisati da su transverzalne sile jednake razlici ugiba u čvorovima na krajevima štapa podeljeno sa dužinom štapa

$$T_m^f = \frac{v_m - v_{m-1}}{\lambda_m}, T_{m+1}^f = \frac{v_{m+1} - v_m}{\lambda_{m+1}}$$

Izraz za elastičnu težinu W_m postaje:

$$W_m = \frac{v_m - v_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{v_{m+1} - v_m}{\lambda_{m+1}}$$

Određivanje dijagrama pomeranja rešetkastih nosača: elastične težine



$\bar{S}_2$

$$W_2 = \sum_s \frac{\bar{S}_2 S}{EF} l + \sum_s \bar{S}_2 \alpha_t t^o l$$

$\bar{S}_4$

$$W_4 = \sum_s \frac{\bar{S}_4 S}{EF} l + \sum_s \bar{S}_4 \alpha_t t^o l$$

$\bar{S}_6$

$$W_6 = \sum_s \frac{\bar{S}_6 S}{EF} l + \sum_s \bar{S}_6 \alpha_t t^o l$$

$\bar{S}_8$

$$W_8 = \sum_s \frac{\bar{S}_8 S}{EF} l + \sum_s \bar{S}_8 \alpha_t t^o l$$

*Štapovi u kojima se javljaju sile označeni su zadebljanim linijama.

Određivanje dijagrama pomeranja rešetkastih nosača: elastične težine

Ako deluje na jednoj kinematički krutoj ploči, ravnotežni sistem sila **ne izaziva reakcije oslonaca niti sile veze između ploča**, već samo sile u štapovima rešetke na delu između čvorova u kojima deluju te sile, $m-1$, m i $m+1$.

Proračun elastičnih težina primenom izraza svodi se na sabiranje samo nekoliko članova izraza, bez obzira na broj štapova u rešetkastom nosaču.

Literatura

LINK