Simetrični nosači

Teorija konstrukcija - HVE

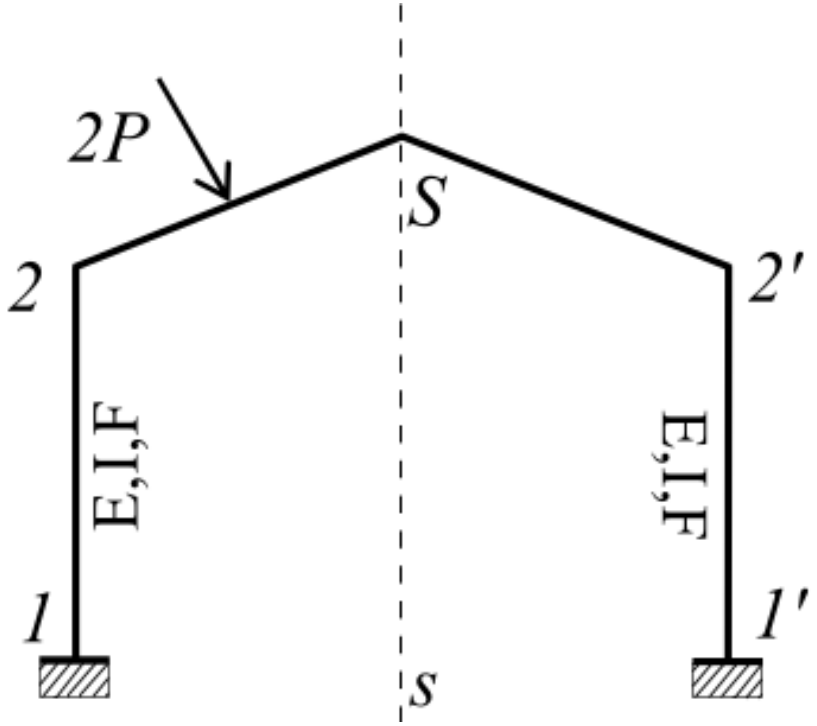
Predavanja: 11. sedmica

Simetrični nosači

Simetrični nosači su nosači kod kojih su

- elementi simetrično raspoređeni u odnosu na jednu ili više osa simetrije
- geometrijske karakteristike (h, F, I) simetrično položenih preseka su međusobno jednake
- materijalne karakteristike (E, ν, γ) simetrično položenih preseka su međusobno jednake

Simetrični nosači



Simetrični nosači

Statička analiza simetričnih nosača može se znatno uprostiti zahvaljujući činjenici da se *svako opterećenje na simetričnom nosaču može prikazati kao zbir dva opterećenja*:

- jednog, koje je *simetrično* u odnosu na osu simetrije i
- drugog, koje je *antisimetrično* u odnosu na osu simetrije.

Simetrični nosači

Simetrično opterećenje

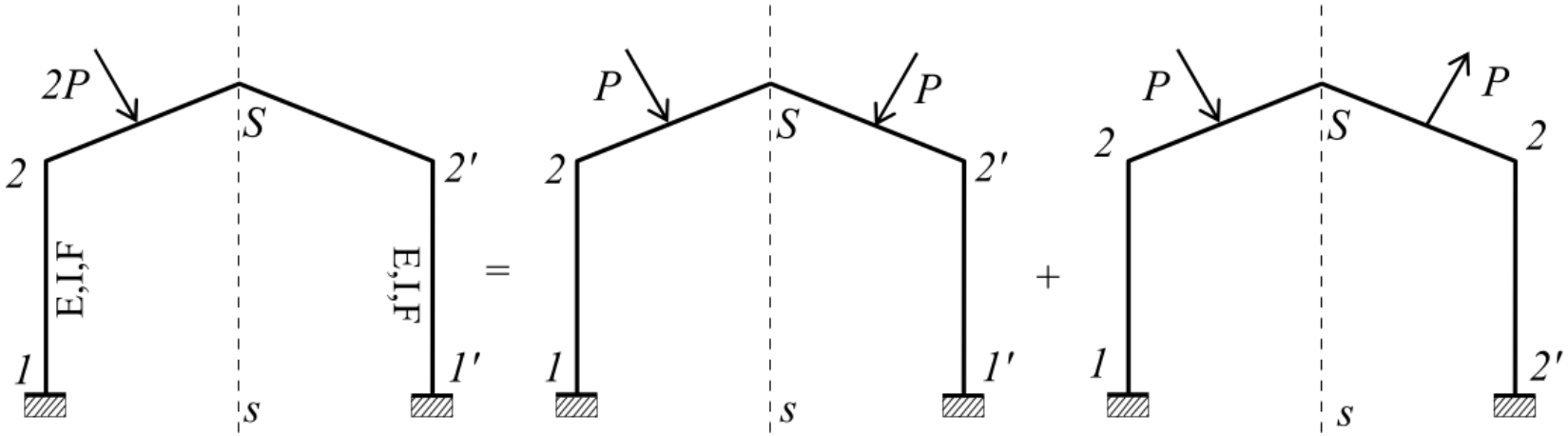
Opterećenje kod kojeg su sile u simetrično položenim presecima slika u ogledalu u odnosu na osu simetrije.

Antisimetrično opterećenje

Opterećenje kod kojeg su sile u simetrično položenim presecima slika u ogledalu u odnosu na osu simetrije, ali sa suprotnim znakom.

Simetrični nosači

Zbir simetričnog i antisimetričnog dela opterećenja mora biti jednak zadatom opterećenju.



Simetrični nosači

U linearnoj analizi presečne sile u simetričnom nosaču usled proizvoljnog opterećenja možemo dobiti superpozicijom uticaja od simetričnog i antisimetričnog dela opterećenja.

Simetrični nosači

- Ukoliko je opterećenje na nosaču simetrično, presečne sile u simetrično položenim presecima su simetrične.
- Ukoliko je opterećenje na nosaču antisimetrično, presečne sile u simetrično položenim presecima su antimetrične.

Simetrični nosači

To znači da sile u presecima simetričnog nosača usled simetričnog tj. antisimetričnog dela opterećenja možemo odrediti posmatrajući *samo jednu polovinu nosača*.

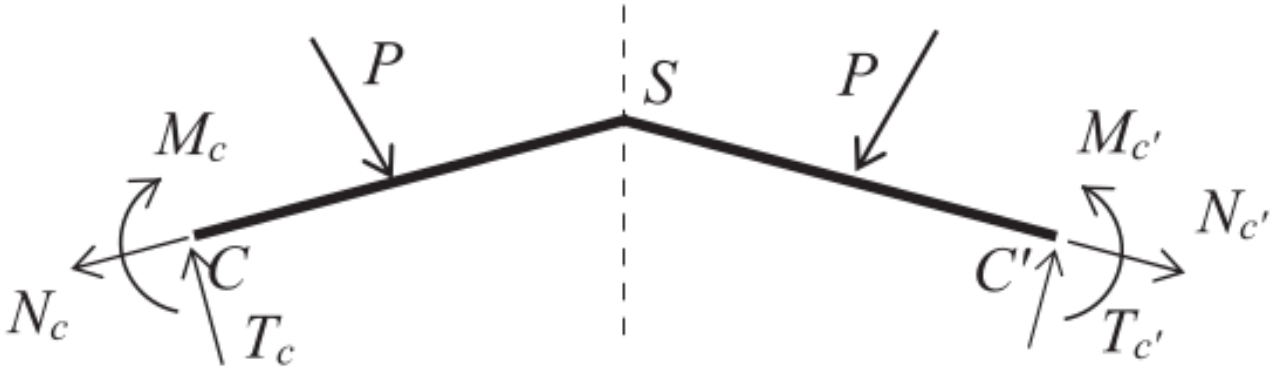
Simetrični nosači

Da bi mogli da posmatramo samo jednu polovinu nosača potrebno da znamo veze između presečnih sila u simetrično položenim presecima i granične uslove koje treba postaviti u osi simetrije pri simetričnom i pri antisimetričnom opterećenju.

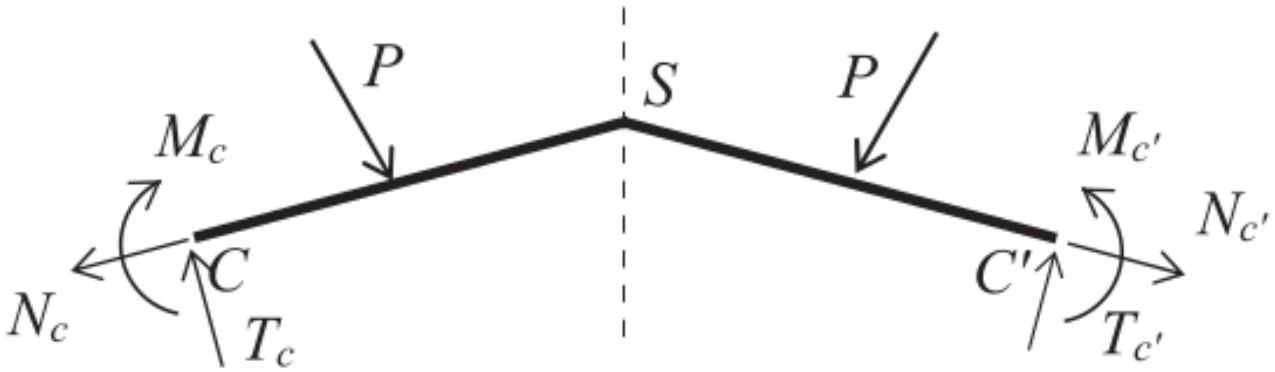
Simetrično opterećeni simetrični nosači

Simetrično opterećeni simetrični nosači

Da bi izveli veze između sila u simetrično položenim presecima posmatraćemo deo nosača između simetrično položenih preseka C i C' koji je opterećen simetričnim opterećenjem.

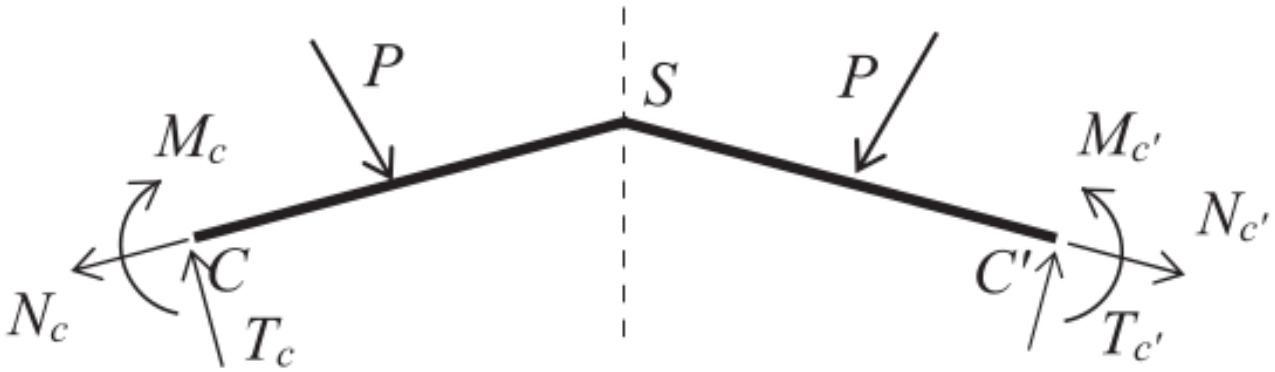


Simetrično opterećeni simetrični nosači



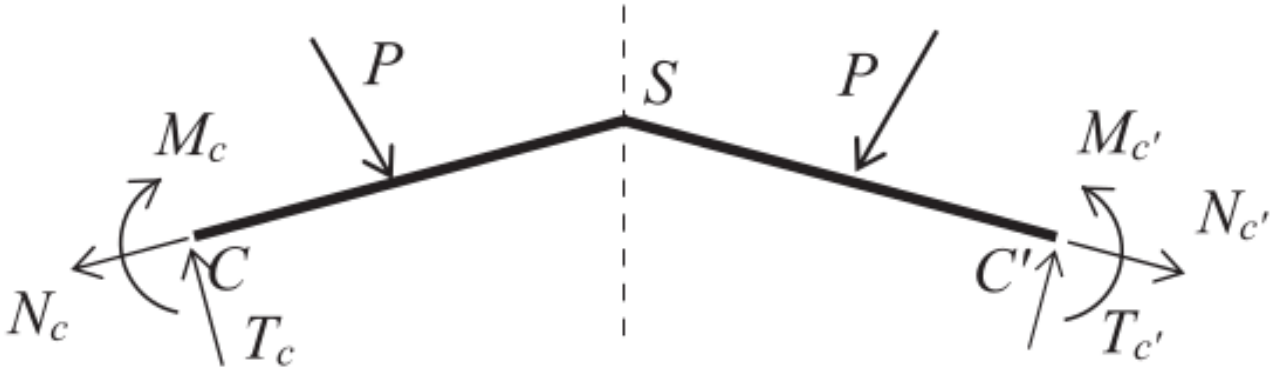
Pretpostavimo da se u preseku C javljaju unutrašnje sile M_c, N_c i T_c pozitivne prema konvenciji.

Simetrično opterećeni simetrični nosači



Pošto je opterećenje simetrično, u simetrično položenom preseku C' javiće se sile M_c', N_c' i T_c' koje su slika u ogledalu sila M_c, N_c i T_c odnosu na osu sumetrije.

Simetrično opterećeni simetrični nosači



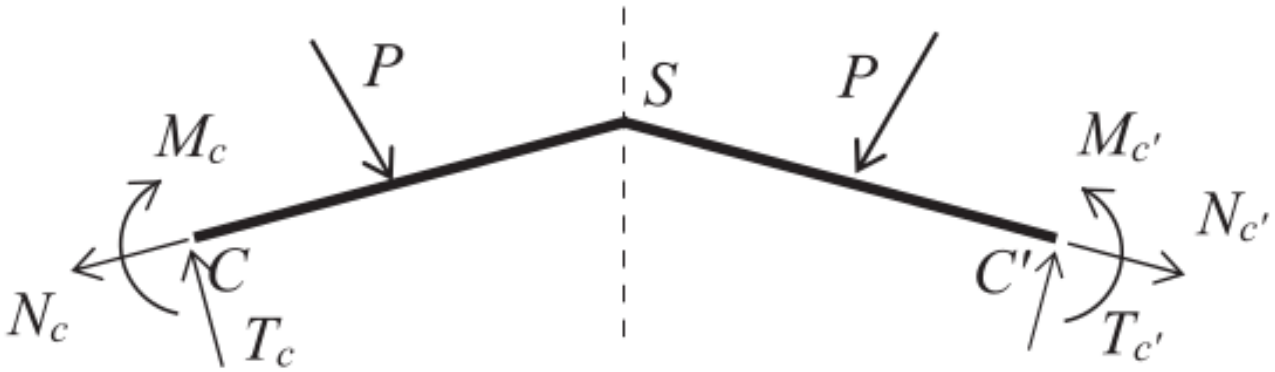
Između sila u simetrično položenim presecima C' i Cmože se uspostaviti sledeća veza:

$$N_c' = N_c$$

$$M_c' = M_c$$

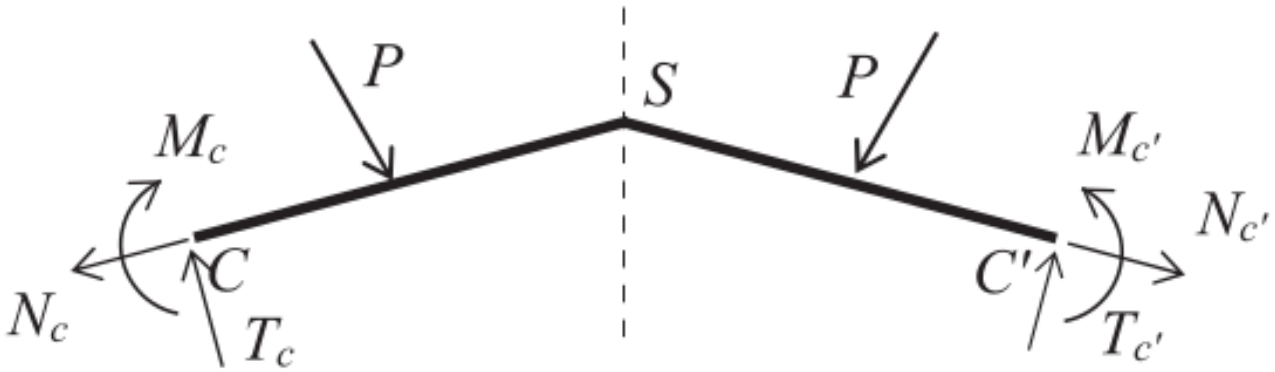
$$T_c' = -T_c$$

Simetrično opterećeni simetrični nosači



Pri simetričnom opterećenju normalne sile i momenti su simetrični uticaji u odnosu na osu simetrije, dok su transverzalne sile antimetričnan uticaj.

Simetrično opterećeni simetrični nosači

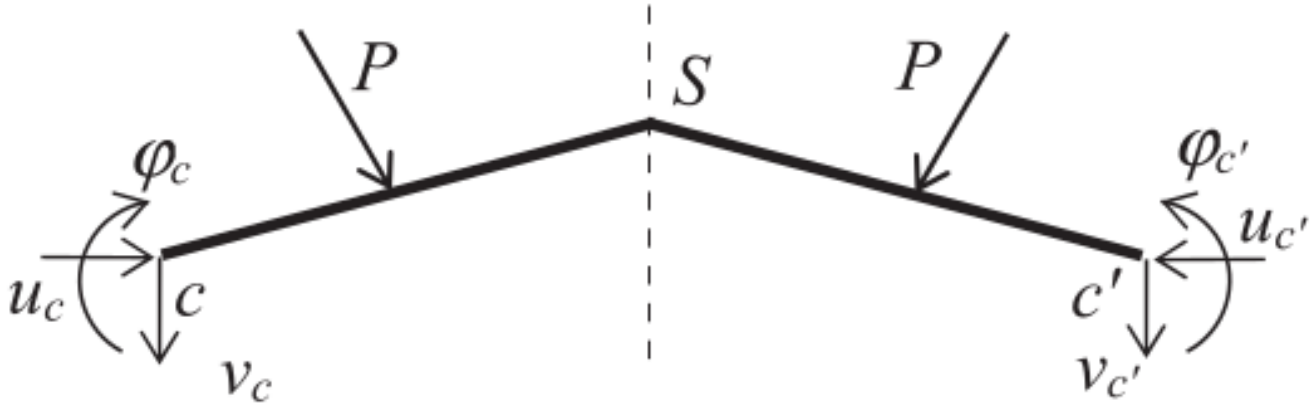


Ako znamo sile u presecima na jednoj polovini nosača sile u presecima na drugoj polovini nosača crtamo tako da su dijagrami normalnih sila i momenata isti i po znaku i po vrednostima ordinata, dok je dijagram transverzalnih sila isti po vrednostima ordinata, ali suprotnog znaka.

Simetrično opterećeni simetrični nosači

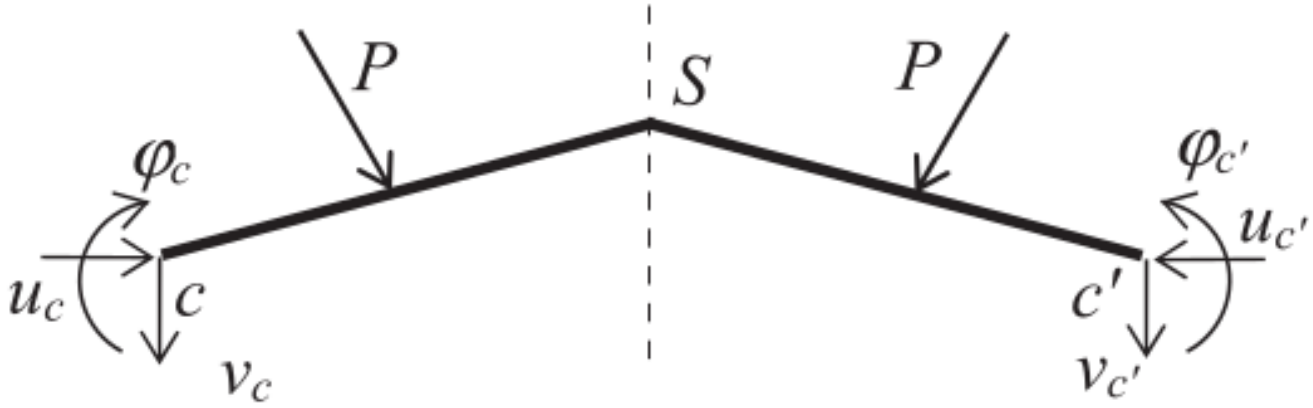
Na sličan način ćemo uspostaviti vezu između pomeranja u simetrično položenim presecima C i C'.

Simetrično opterećeni simetrični nosači



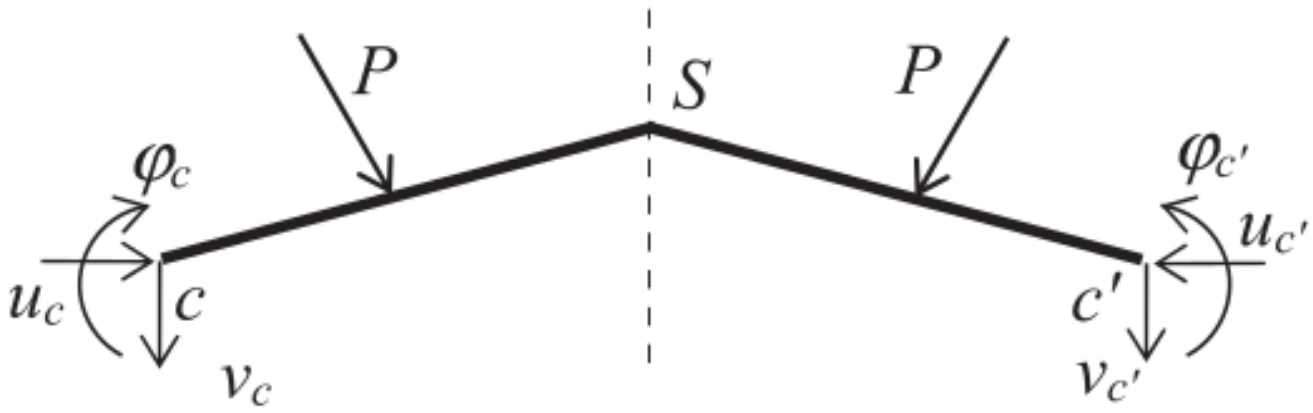
U preseku C crtamo pomeranja u_c, v_c i obrtanje φ_c pozitivna prema konvenciji.

Simetrično opterećeni simetrični nosači



Pošto je opterećenje simetrično, u simetrično položenom preseku C' pomeranja u'_c, v'_c i obrtanje φ'_c crtamo tako da su slika u ogledalu u odnosu na pomeranja u_c, v_c i i obrtanje φ_c.

Simetrično opterećeni simetrični nosači



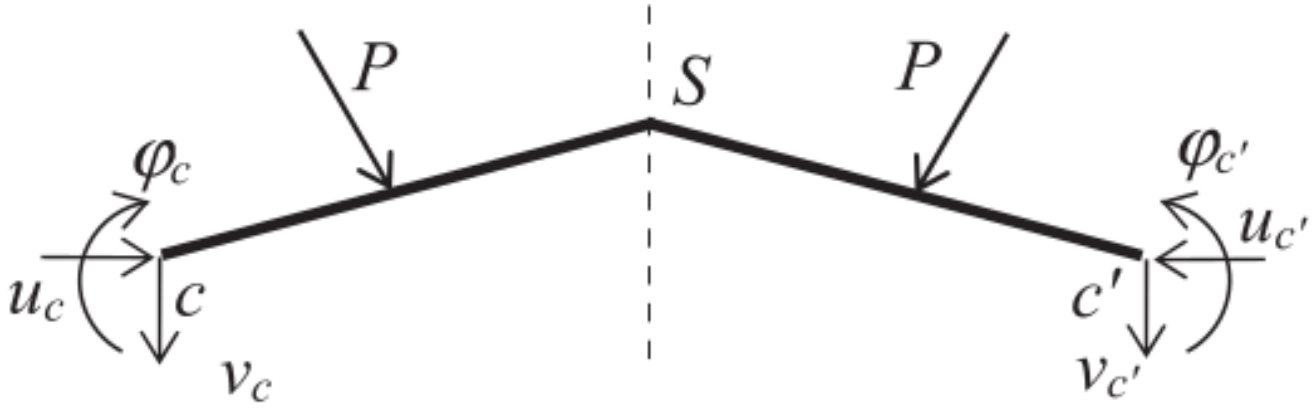
Između pomeranja u simetrično položenim presecima C' i Cmože se uspostaviti sledeća veza:

$$u'_c = -N_c$$

$$\varphi'_c = -\varphi_c$$

$$v'_c = v_c$$

Simetrično opterećeni simetrični nosači



Pri simetričnom opterećenju horizontalno pomeranje i obrtanje poprečnog preseka su antisimetrični u odnosu na osu simetrije, dok je vertikalno pomeranje simetrično.

Granični uslovi u osi simetrije

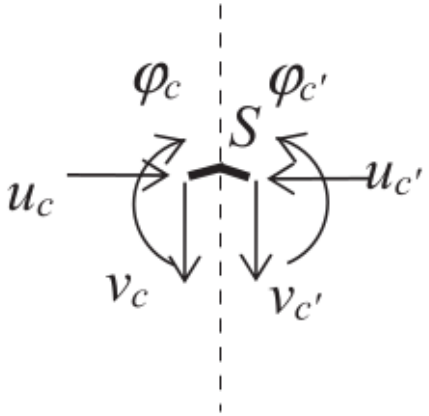
Da bi analizirali polovinu nosača potrebno je u tački S na osi simetrije postaviti odgovarajuće granične uslove koji odgovaraju simetričnom opterećenju tj. simetričnoj deformaciji nosača.

Simetrično opterećeni simetrični nosači

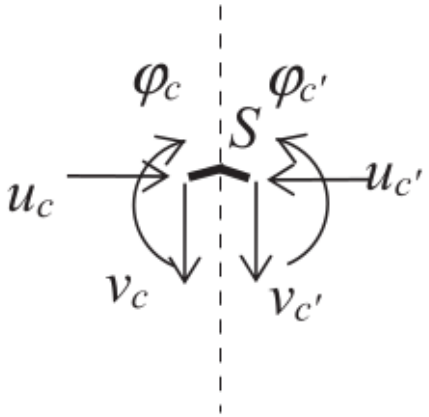
Granične uslove u osi simetrije pri simetričnom opterećenju možemo odrediti bilo da posmatramo sile, bilo pomeranja beskonačno blisko levo i desno od tačke S.

Simetrično opterećeni simetrični nosači

Posmatrajmo prvo pomeranja tačaka beskonačno blisko levo i desno od tačke S.



Simetrično opterećeni simetrični nosači

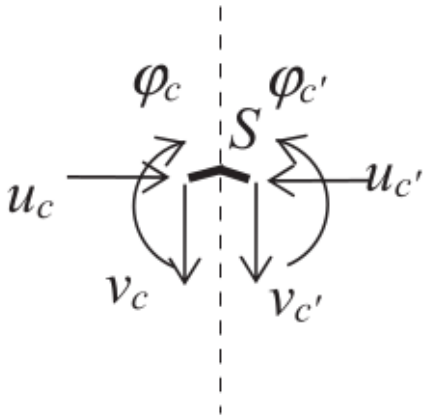


Horizontalno pomeranje u i obrtanje poprečnog preseka φ su suprotnog znaka u tačkama C i C' beskonačno blisko levo i desno od tačke S.

$$\Downarrow$$

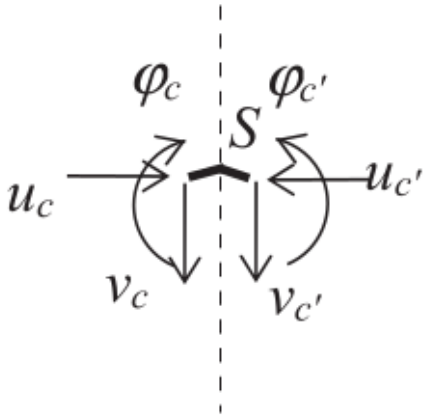
U tački S na osi simetrije komponenta pomeranja u_S i obrtanje poprečnog preseka φ_S, kao antimetrične veličine, moraju imati vrednost *nula*.

Simetrično opterećeni simetrični nosači



Vertikalne komponente pomeranja v_c i v_c' tačaka beskonačno blisko levo i desno od tačke S su istog znaka, što znači da je u tački S vertikalna komponenta pomeranja v_S, kao simetrična funkcija, *različita od nule*.

Simetrično opterećeni simetrični nosači



U osi simetrije važi:

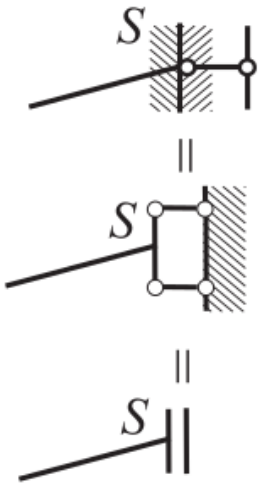
$$u_S = 0$$

$$\varphi_s = 0$$

$$v_s \neq 0$$

Simetrično opterećeni simetrični nosači

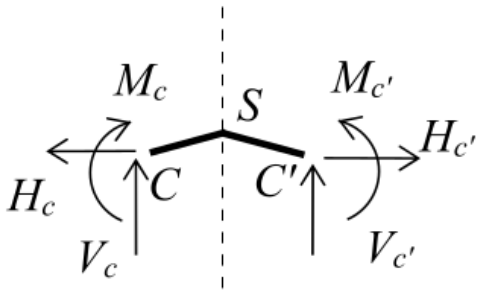
Graničnim uslovima odgovara oslonac prikazan na tri različita načina:



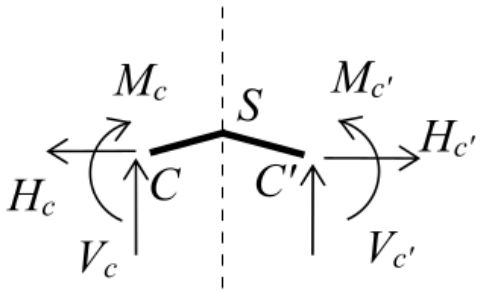
$$\varphi_S = 0$$
$$u_s = 0$$
$$v_s \neq 0$$

Simetrično opterećeni simetrični nosači

Isti uslov oslanjanja dobijamo ako umesto pomeranja posmatramo sile H, V i M u simetrično položenim presecima C i C', beskonačno blisko tački S.



Simetrično opterećeni simetrični nosači

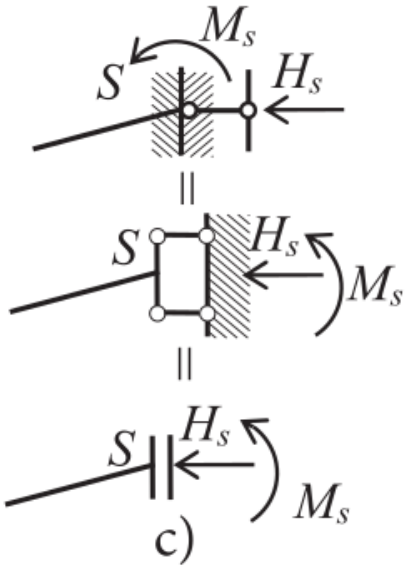


$$H_c' = H_c$$

$$M_c' = M_c$$

$$V_c' = -V_c$$

Simetrično opterećeni simetrični nosači



$H_s \neq 0$

$M_s \neq 0$

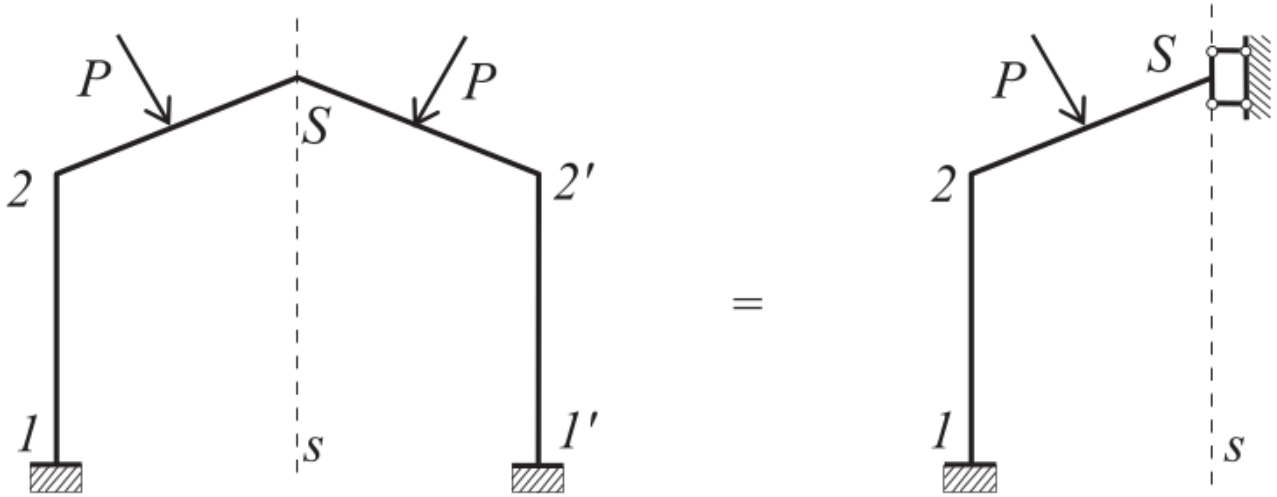
$V_s = 0$

Simetrično opterećeni simetrični nosači

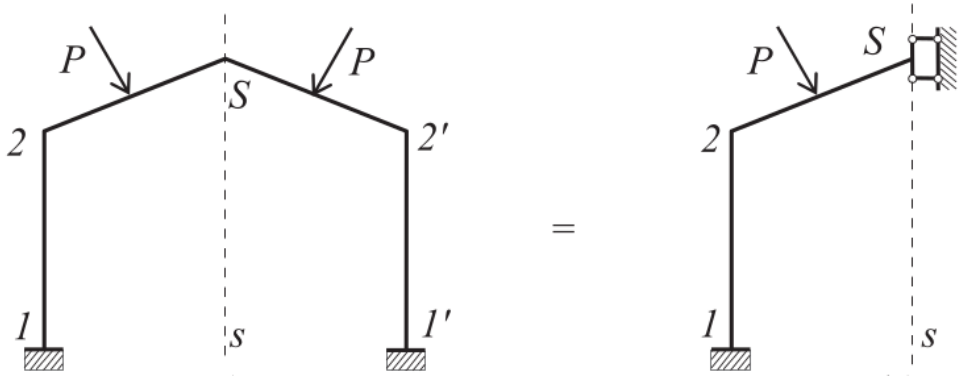
Na osnovu izvedenih graničnih uslova i veza između sila u simetrično polože nim presecima, umesto celog nosača opterećenog simetričnim opterećenjem možemo da posmatramo jednu njegovu polovinu.

Simetrično opterećeni simetrični nosači

U tački S na osi simetrije zadajemo oslonac koji odgovara graničnim uslovima pri simetričnom opterećenju nosača



Simetrično opterećeni simetrični nosači



Statička neodređenost polovine nosača pri simetričnom opterećenju je po pravilu *veća* od polovine statičke neodređenosti celog nosača.

Razlog se krije u činjenici da su pri simetričnom opterećenju u osi simetrije dve (H i M), od ukupno tri, reakcije veze različite od nule.

Antisimetrično opterećeni simetrični nosači

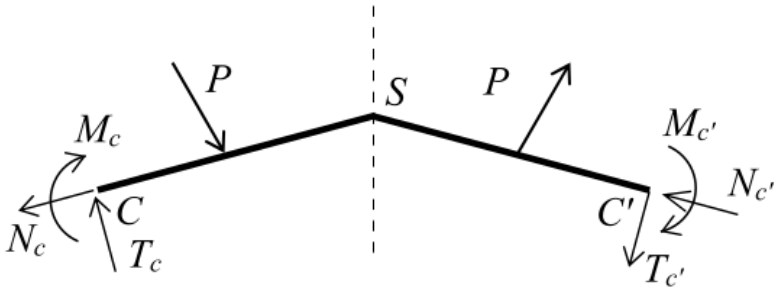
Antisimetrično opterećeni simetrični nosači

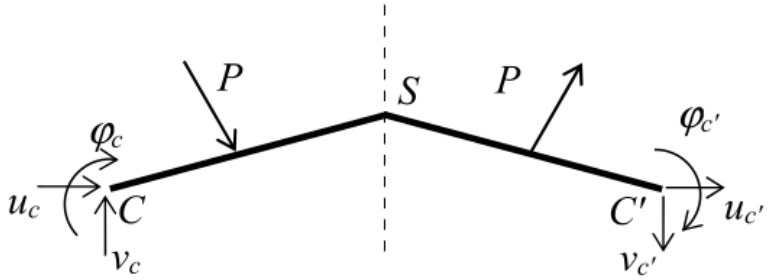
Veze između sila u simetrično postavljenim presecima i granični uslovi u osi simetrije za simetričan nosač opterećen antisimetričnim opterećenjem izvode se na sličan način.*

Ovde ćemo dati samo pregled izvođenja, a detaljnije možete pročitati u knjizi.

Antisimetrično opterećeni simetrični nosači*

Sile i pomeranja u simetrično položenim presecima C i C' *





*Detaljnije u knjizi.

Antisimetrično opterećeni simetrični nosači*

$$N_c' = -N_c$$
$$M_c' = -M_c$$
$$T_c' = Tc$$

Pri antisimetričnom opterećenju normalne sile i momenti predstavljaju antimetrične uticaje, dok transverzalna sila predstavlja simetričan uticaj.

*Detaljnije u knjizi.

Antisimetrično opterećeni simetrični nosači*

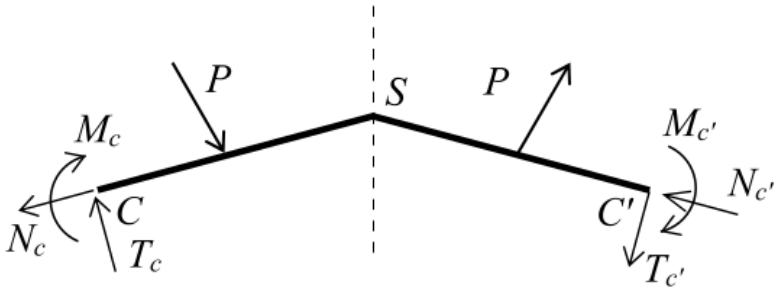
$$u_c' = u_c$$
$$\varphi_c' = \varphi_c$$
$$v_c' = -vc$$

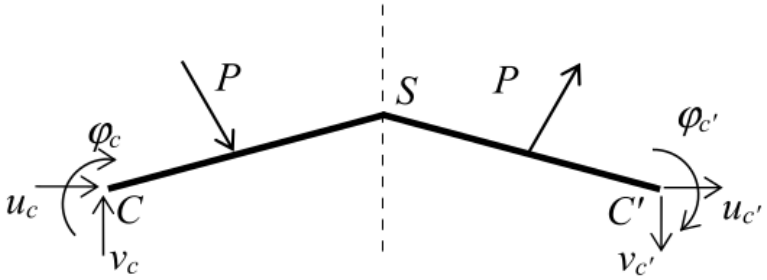
Pri antisimetričnom opterećenju, horizontalna pomeranja i obrtanja u simetrično položenim presecima su simetrični uticaji, dok su vertikalna pomeranja antisimetrični uticaji.

*Detaljnije u knjizi.

Antisimetrično opterećeni simetrični nosači*

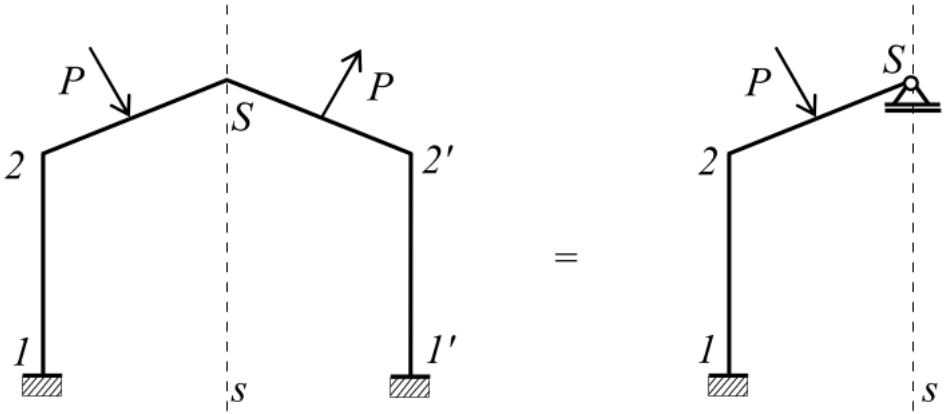
Granični uslovi u osi simetrije *





*Detaljnije u knjizi.

Antisimetrično opterećeni simetrični nosači*



Statička neodređenost polovine nosača opterećenog antisimetričnim opterećenjem je po pravilu manja od polovine statičke neodređenosti celog nosača.

To je posledica činjenice da je u osi simetrije, od tri moguće reakcije veze (H_S, V_S i M_S), samo jedna reakcija (V_S) različita od nule.

*Detaljnije u knjizi.

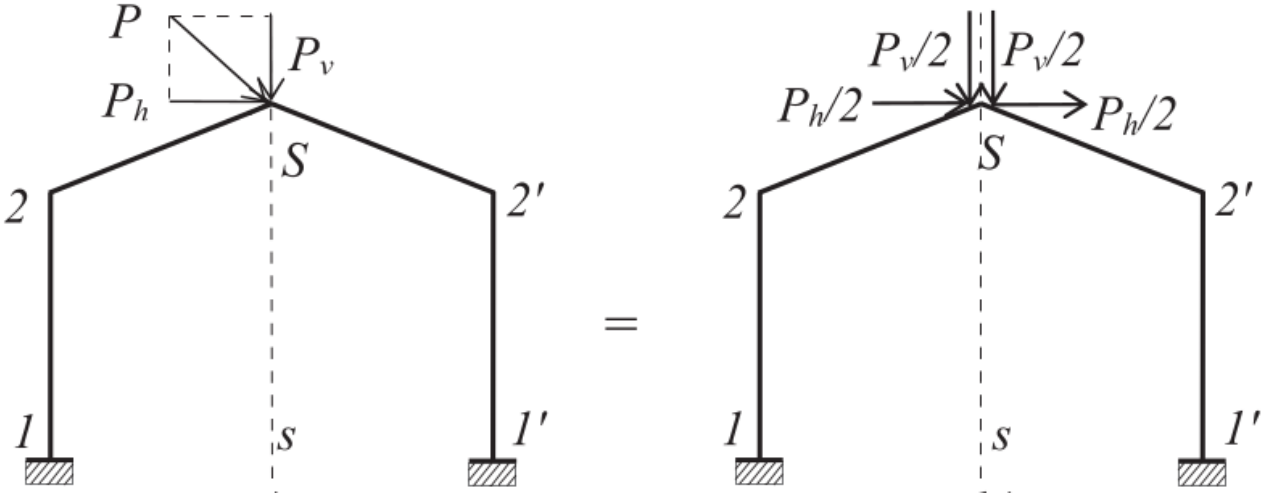
Opterećenje u osi simetrije

Opterećenje u osi simetrije

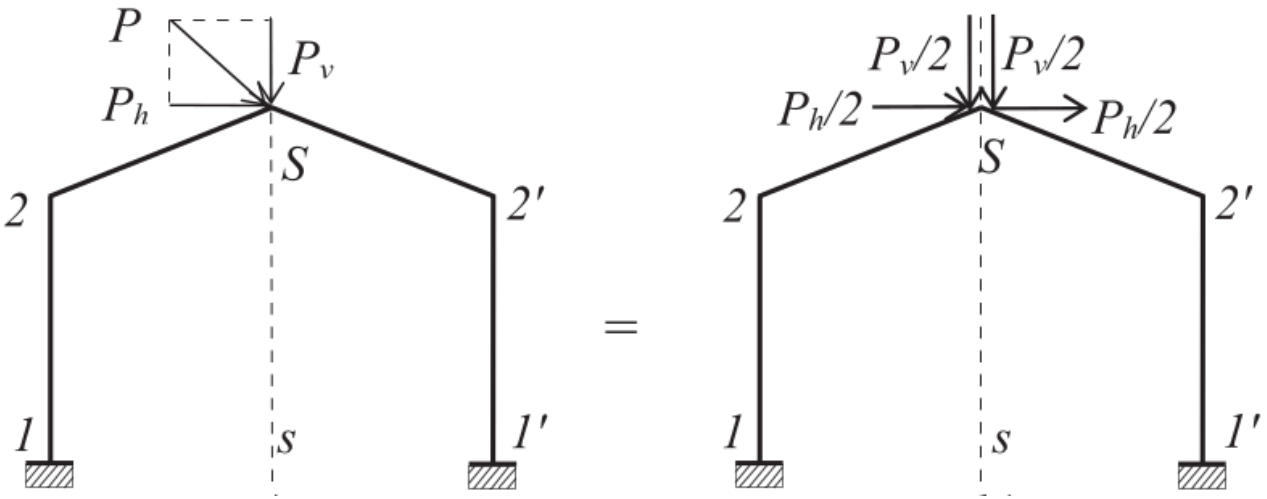
Poseban slučaj opterećenja predstavljaju koncentrisane sile i momenat u osi simetrije

Opterećenje u osi simetrije

Koncetrisanu silu u osi simetrije razlažemo na vertikalnu i horizontalnu komponentu P_h i P_v. Svaku od komponenata razlažemo na sile $P_h/2$ i $P_v/2$, koje deluju beskonačno blisko levo i desno od tačke S u osi simetrije.



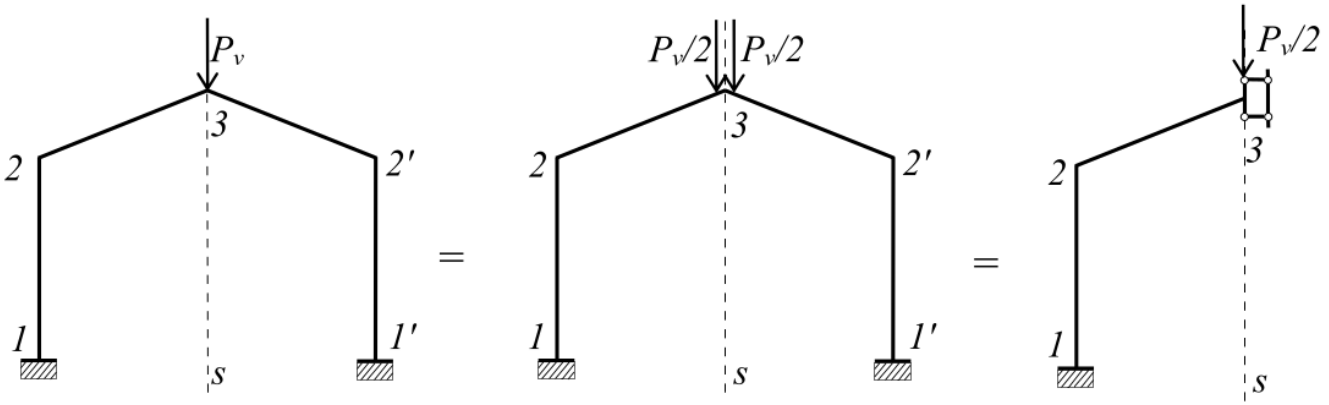
Opterećenje u osi simetrije



- vertikalna komponenta sile u osi simetrije P_v predstavlja čisto simetrično opterećenje
- horizontalna komponenta sile P_h predstavlja čisto antisimetrično opterećenja

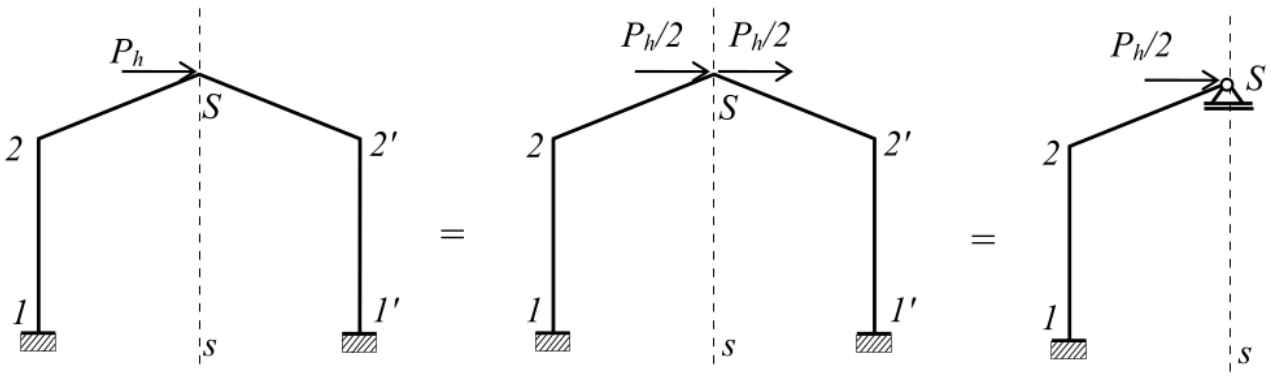
Opterećenje u osi simetrije

Vertikalna sila u osi simetrije



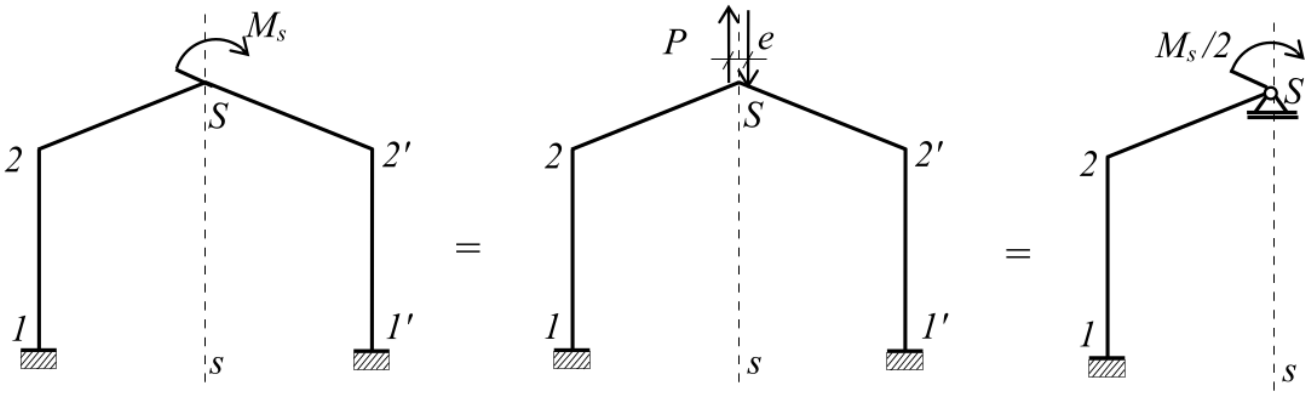
Opterećenje u osi simetrije

Horizontalna sila u osi simetrije



Opterećenje u osi simetrije

Momenat u osi simetrije razlažemo na spreg sila $M = P \cdot e$, gde je e krak sila. Sile P predstavljaju čisto antisimetrično opterećenje. Sile u presecima dobijamo posmatranjem polovine nosača opterećenog momentom $M/2 = P \cdot e/2$ u osi simetrije.



Štap u osi simetrije

Štap u osi simetrije

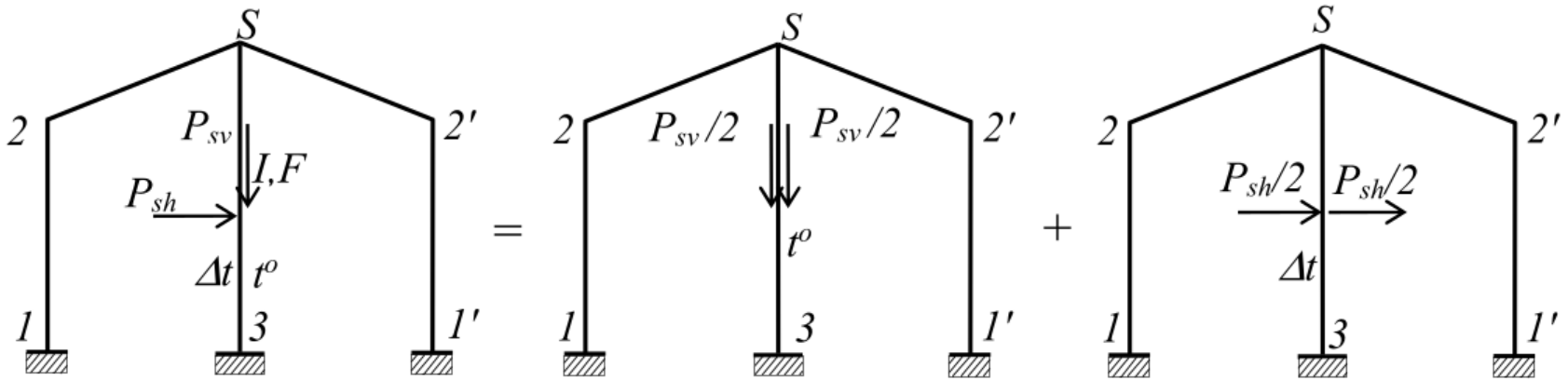
Poseban slučaj predstavlja štap koji leži u osi simetrije.

Štap u osi simetrije

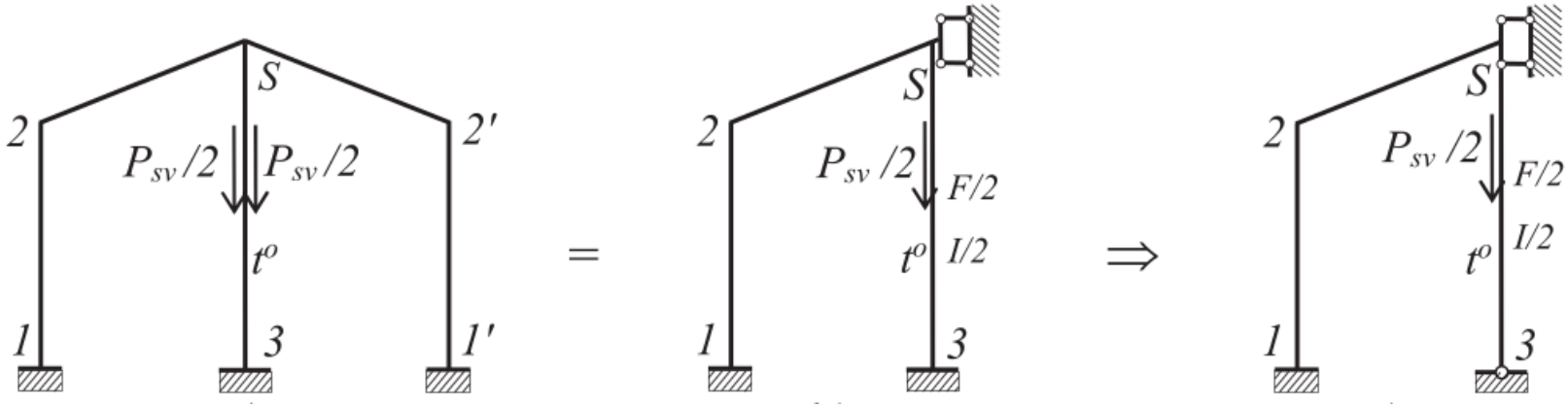
Neka je taj štap izložen

- opterećenju u pravcu ose štapa,
- opterećenju upravno na osu štapa,
- temperaturnoj promeni u osi štapa t^o i
- temperaturnoj razlici Δt.

Štap u osi simetrije

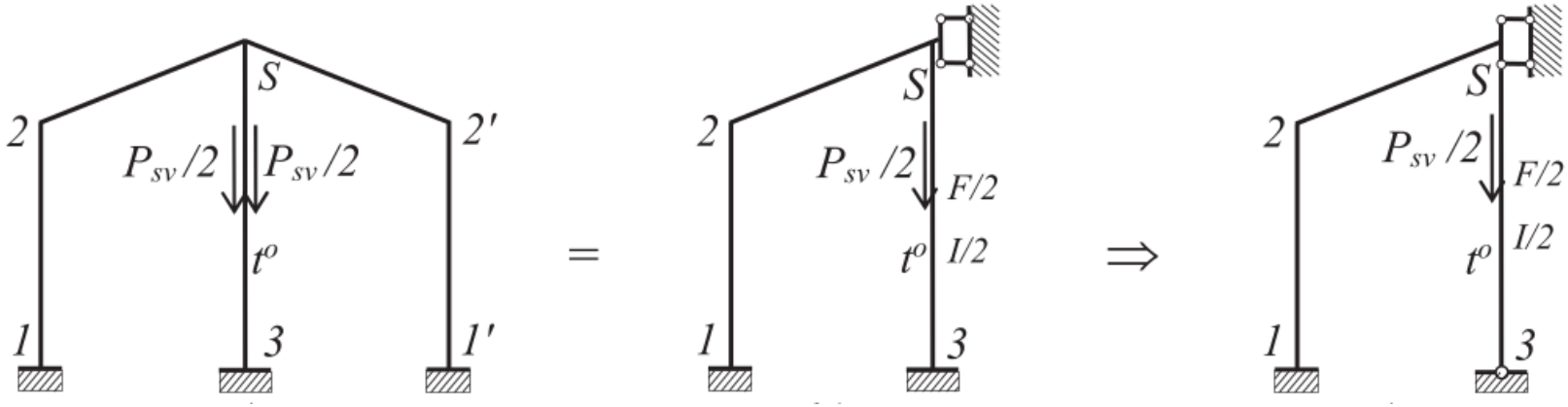


Štap u osi simetrije



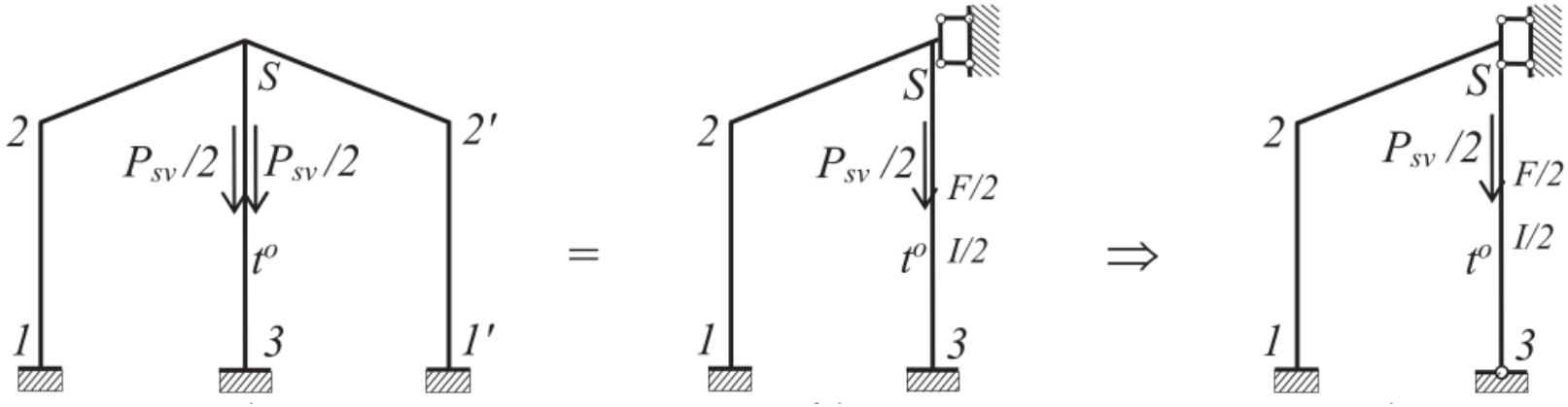
Vertikalna sila P_{sv} i temperaturna promena t^o u osi štapa na osi simetrije su *čisto simetrični uticaji*.

Štap u osi simetrije



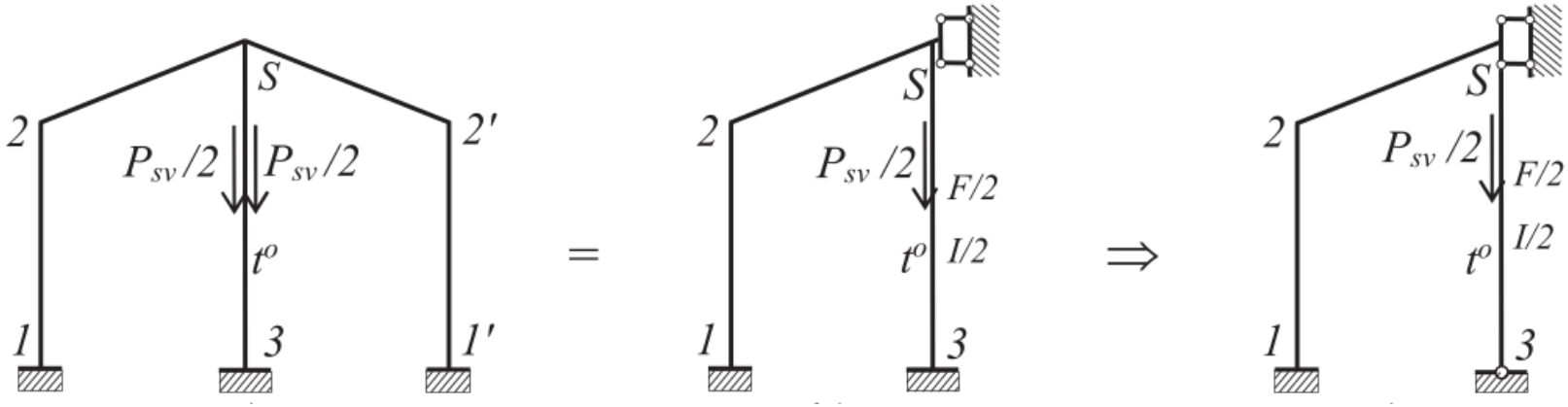
Karakteristike poprečnog preseka štapa u osi simetrije, moment inercije I i površina poprečnog preseka F jednake su polovini vrednosti za ceo štap, $I/2$ i $F/2$.

Štap u osi simetrije



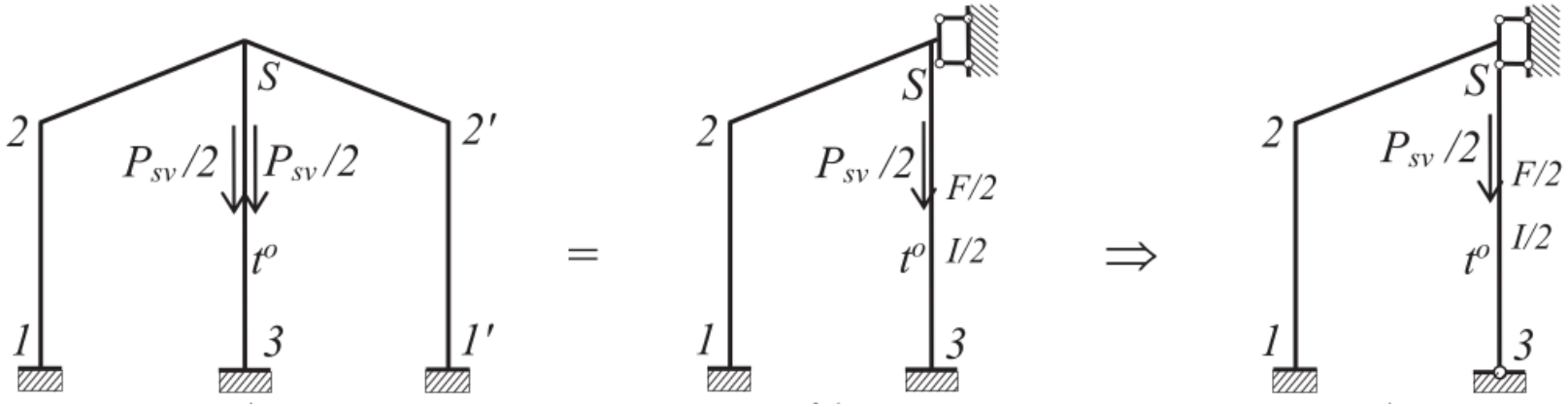
Pomeranja krajeva štapa upravno na osu i obrtanja poprečnih preseka su sprečena, a štap je opterećen silama u pravcu ose štapa.

Štap u osi simetrije



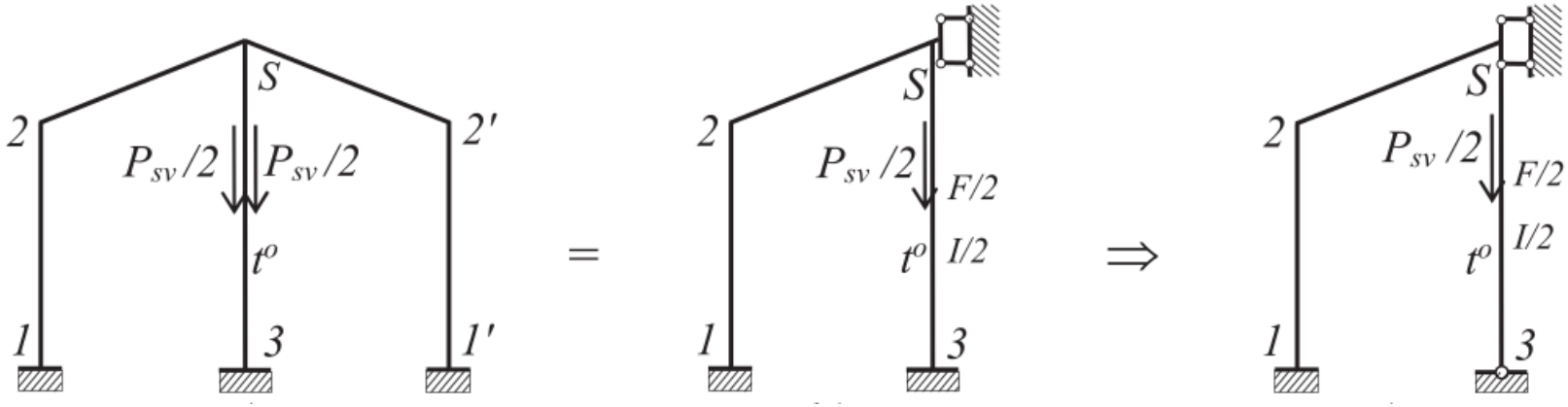
Pošto ne postoji pomeranje niti opterećenje koje bi izazvalo savijanje štapa, štap u osi simetrije pri simetričnom opterećenju izložen je aksijalnom naprezanju. $(M = 0, T = 0, N \neq 0)$

Štap u osi simetrije



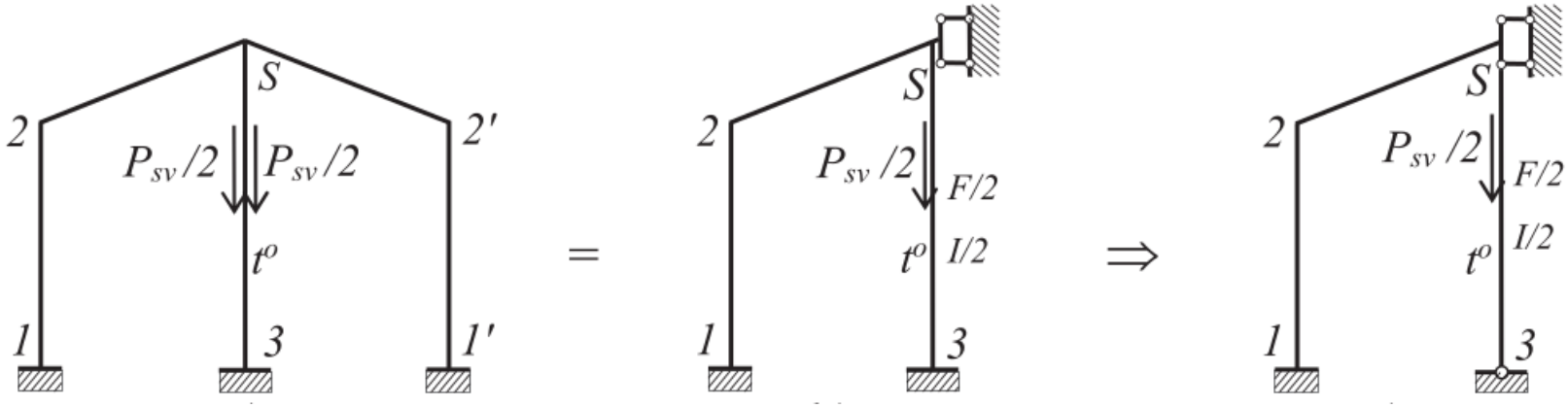
U shemi nosača štap u osi simetrije prikazuje se kao prost štap.

Štap u osi simetrije



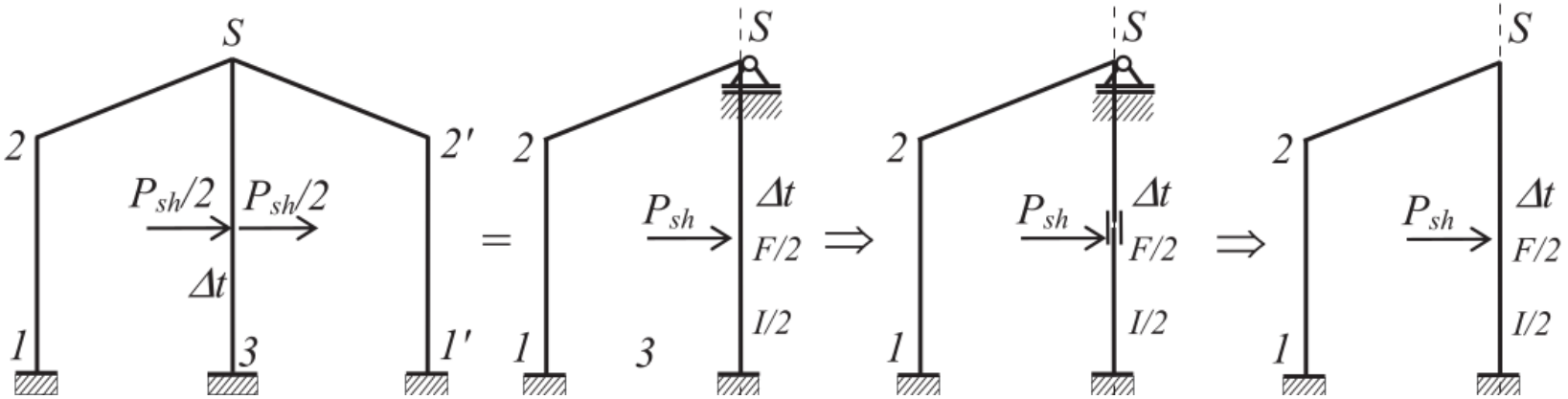
Temperaturna promena u osi štapa t^o zadaje se da deluje u punom iznosu na štap u osi simetrije na jednoj polovini nosača.

Štap u osi simetrije



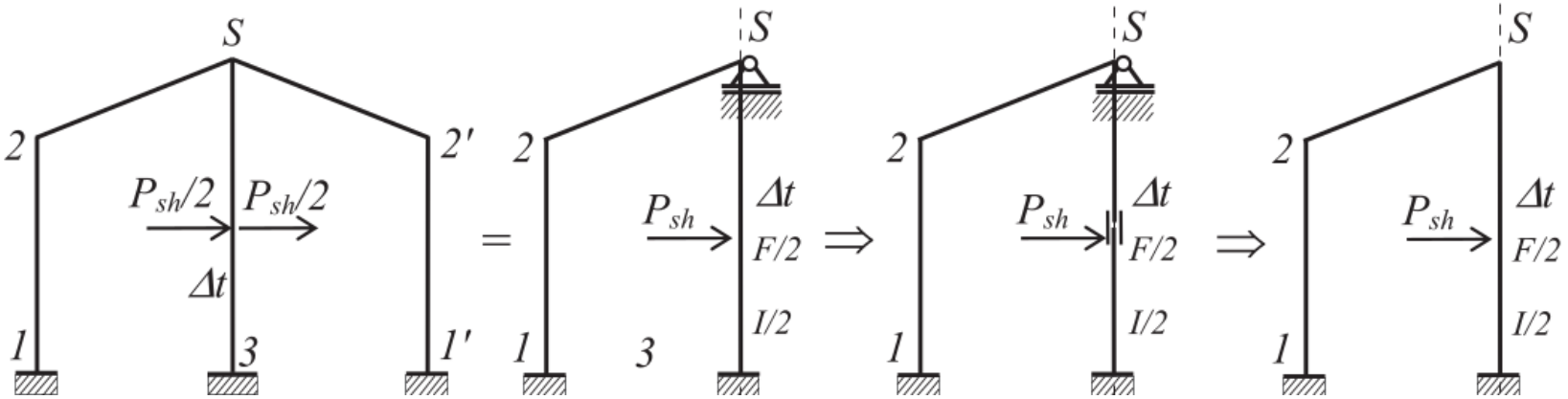
Pošto su karakteristike poprečnog preseka štapa u osi simetrije podeljene sa dva, normalna sila usled temperaturne promene ima polovinu vrednosti koju bi imala na celom štapu ($N = \alpha_t t^o EF/2$).

Štap u osi simetrije



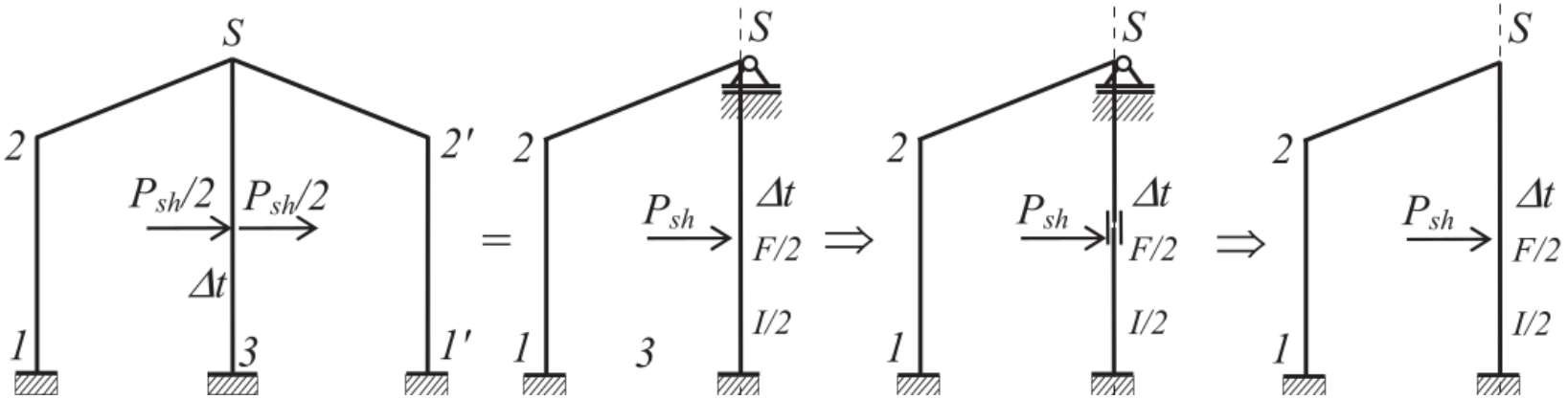
Horizontalna sila P_{sh} i temperaturna razlika Δt u osi štapa na osi simetrije su *čisto antisimetrični uticaji*.

Štap u osi simetrije



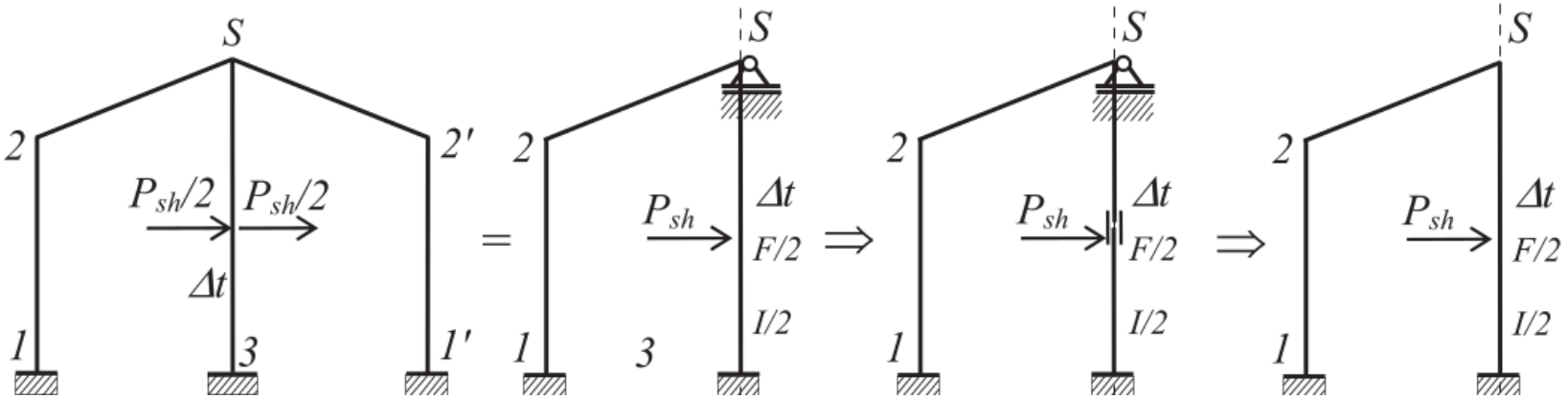
Karakteristike poprečnog preseka štapa u osi simetrije, moment inercije I i površina poprečnog preseka F jednake su polovini vrednosti za ceo štap, $I/2$ i $F/2$.

Štap u osi simetrije



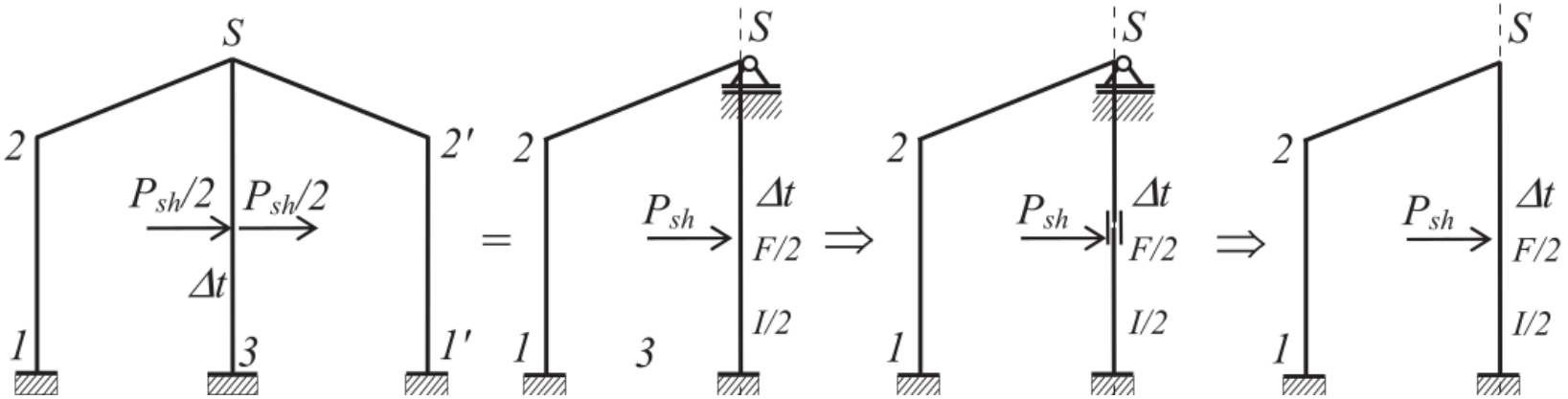
Pomeranja u pravcu ose štapa su sprečena i jednaka nuli.

Štap u osi simetrije



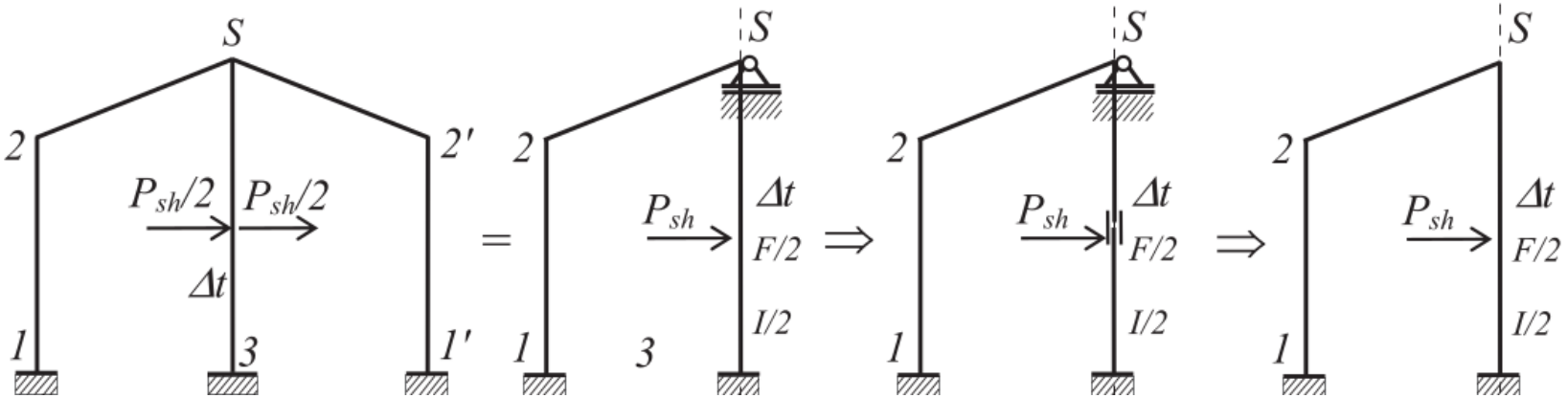
Štap u osi simetrije pri antisimetričnom opterećenju može biti izložen samo savijanju ($M \neq 0, T \neq 0$), dok je aksijalno naprezanje štapa jednako nuli ($N = 0$).

Štap u osi simetrije



Pošto je normalna sila štapa u osi simetrije pri antisimetričnom opterećenju jednaka nuli, moramo tom štapu zadati podužni zglob.

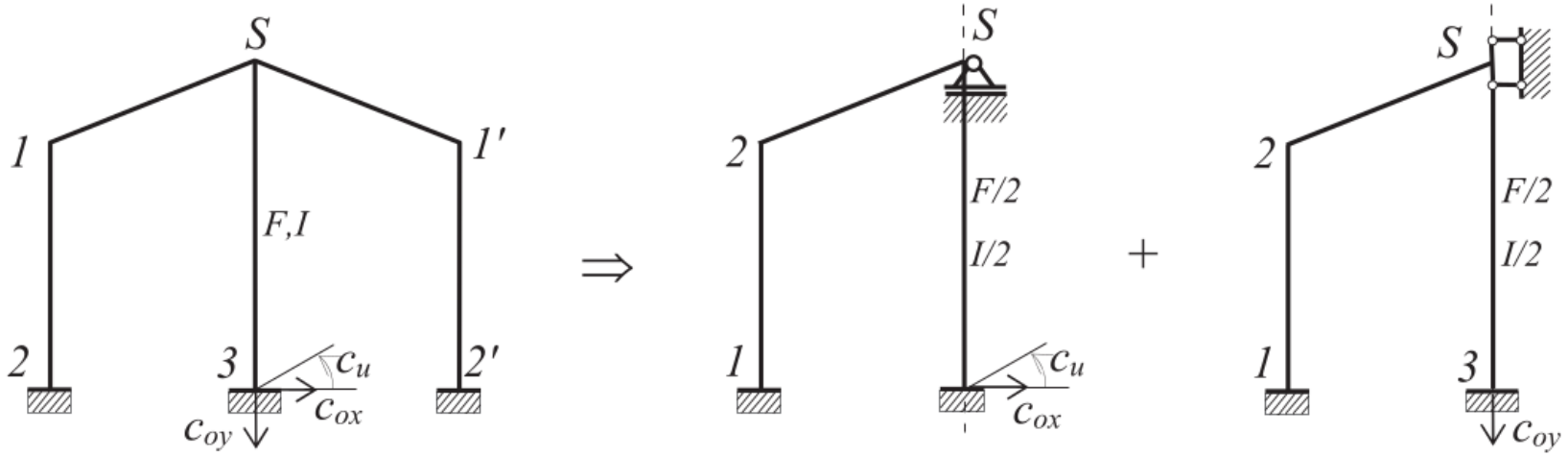
Štap u osi simetrije



U klasičnoj statičkoj analizi, umesto da zadajemo podužni zglob, zadržavamo štap a uklanjamo oslonac u osi simetrije.

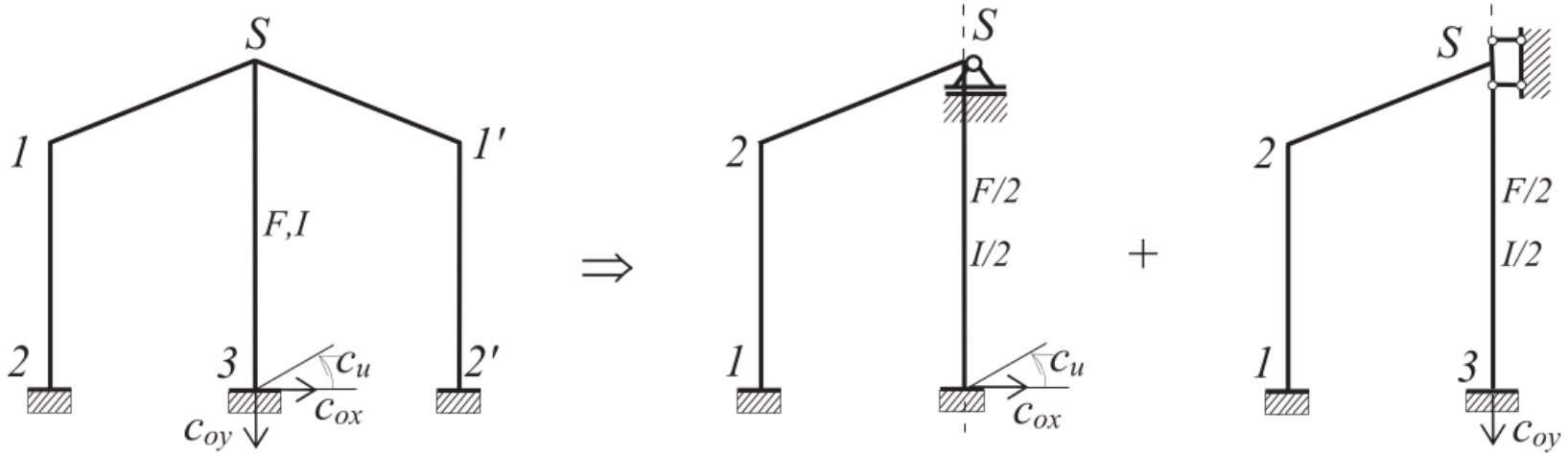
U statičkom smislu se nije ništa promenilo, samo treba voditi računa da je aksijalna sila u štapu u osi simetrije pri antisimetričnom opterećenju jednaka nuli i da ona zapravo predstavlja reakciju uklonjenog oslonca u tački S.

Štap u osi simetrije



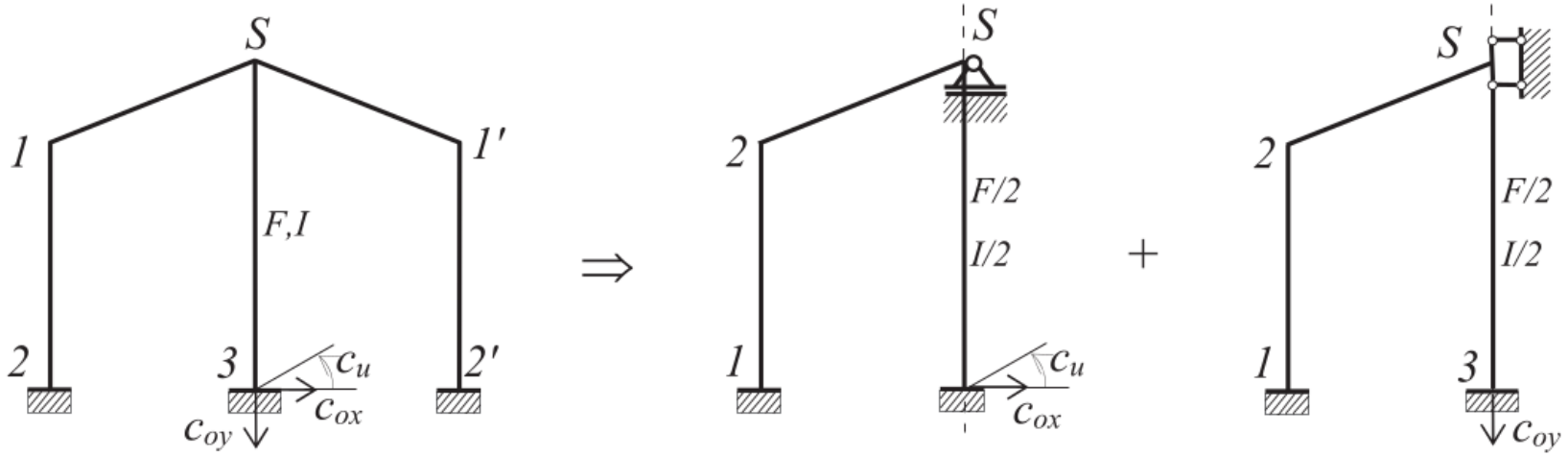
Kada su zadata pomeranja oslonca c_{oy} i c_{ox} i obrtanje uklještenja c_u u osi simetrije koristimo takođe osobinu simetrije nosača.

Štap u osi simetrije



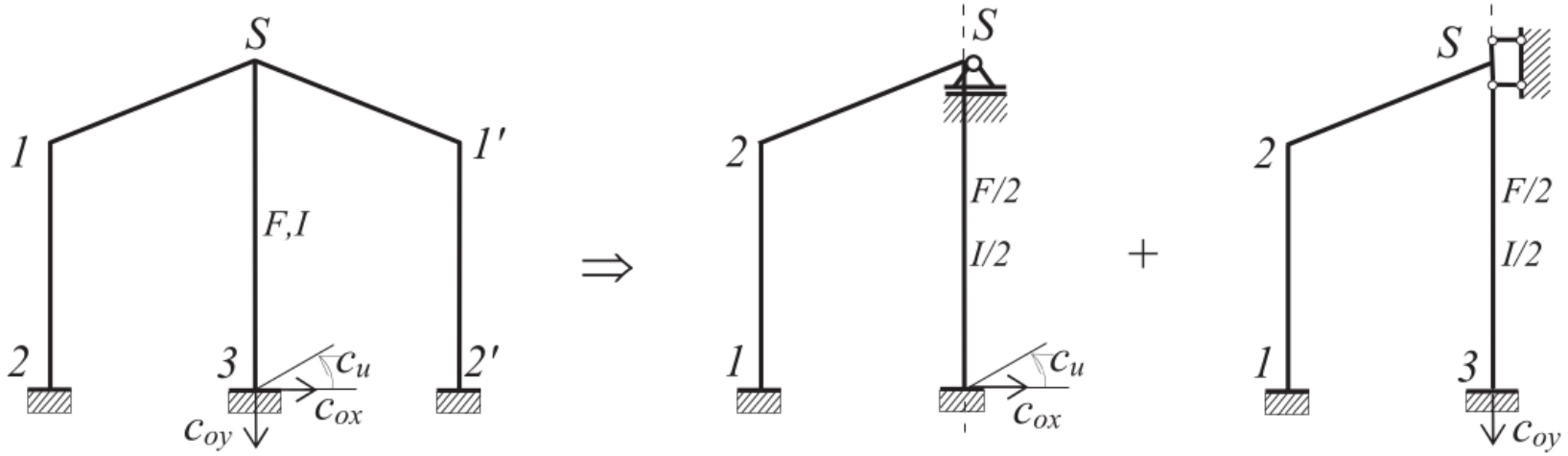
Horizontalno pomeranje c_{ox} i obrtanje uklještenja c_u predstavljaju čist antimetričan uticaj.

Štap u osi simetrije



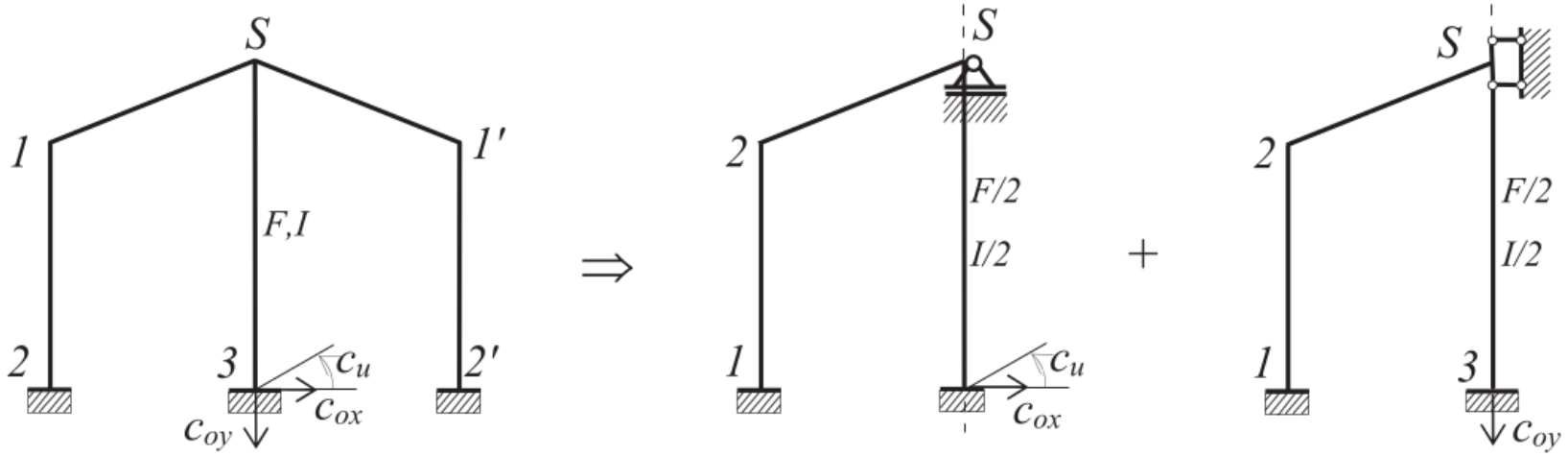
Vertikalno pomeranje oslonca c_{oy} predstavlja čist simetričan uticaj.

Štap u osi simetrije



Pri rastavljanju uticaja na simetrični i antisimetrični deo, pomeranja oslonaca i obrtanja uklještenja koja leže u osi simetrije ne treba deliti sa dva.

Štap u osi simetrije



Zadato pomeranje postoji beskonačno blisko levo i desno od oslonačke tačke u osi simetrije i na svakoj polovini nosača ga treba zadati u punom iznosu.

Mira Petronijević
TEORIJA
KONSTRUKCIJA
1
Univerzitet u Beogradu - Građevinski fakultet
Akademska misao

LINK