Statički neodređeni nosači

Teorija konstrukcija - HVE

Predavanja: 8. sedmica

Statički neodređeni nosači

Statički neodređeni nosači

Nosači kod kojih je ukupan broj nepoznatih statičkih veličina veći od broja uslova ravnoteže nosača.

Podsećanje

Kriterijum za statičku klasifikaciju nosača je dobijen upoređivanjem

- ukupnog broja statički nepoznatih veličina sa
- brojem uslova ravnoteže nosača.

Podsećanje

Statički nepoznate veličine:

- reakcije spoljašnjih veza
  - reakcije oslonaca C_o
  - reakcije uklještenja C_u
- osnovne statički nezavisne veličine štapova
  - aksijalne sile S_{ik}
  - momenti na krajevima štapova M_{ik} i M_{ki}

Podsećanje

Statički nepoznate veličine		Broj
Reakcije oslonaca	C_o	z_o
Reakcije uklještenja	C_u	z_u
Aksijalne sile	S_{ik}	z_s
Momenti na krajevima štapova	M_{ik}, M_{ki}	$z_k + m^*$
Ukupno		$z_o + z_u + z_s + z_k + m$

*Broj grupa kruto vezanih štapova

Podsećanje

Uslov ravnoteže	Broj jednačina
$\sum H = 0$	K^*
$\sum V = 0$	K
$\sum M = 0$	$K + m$
Ukupno	$2K + m$

*Broj čvorova

Podsećanje

Poredimo:

$$\boxed{z_o + z_u + z_s + z_k + m}$$

sa

$$\boxed{2K + m}$$

Podsećanje

Tj. poredimo:

$$\boxed{z_o + z_u + z_s + z_k}$$

sa

$$\boxed{2K}$$

Podsećanje

Statički određen nosač

$$z_o + z_u + z_s + z_k = 2K, \quad \det D \neq 0^*$$

Statički preodređen nosač

$$z_o + z_u + z_s + z_k < 2K, \quad \det D \neq 0$$

Statički neodređen nosač

$$z_o + z_u + z_s + z_k > 2K, \quad \det D \neq 0$$

*Pogledati u knjizi, poglavlje 3.4. Klasifikacija nosača

Podsećanje

Statički određeni nosači

Statički nepoznate veličine mogu se odrediti iz **uslova ravnoteže nosača**.

Postoji *samo jedan* raspored spoljašnjih i unutrašnjih sila koji zadovoljava uslove ravnoteže, tj. postoji *samo jedno ravnotežno stanje* sila koje se naziva **stvarno ravnotežno stanje nosača**.

Podsećanje

Statički preodređeni nosači

- Broj statički nepoznatih veličina je manji od broja uslova ravnoteže.
- Ne mogu biti nosači konstrukcija.
- Nedostaje im n elemenata da bi bili *kinematički prosto stabilni*.*
  $n = 2K - (z_o + z_u + z_s + z_k)$
- Mogu primiti tzv. *ravnotežno opterećenje* tj. opterećenje koje identički zadovoljava uslove ravnoteže.

*Pogledati u knjizi, poglavlje 3.4. Klasifikacija nosača

Statički neodređeni nosači

Kod statički neodređenih nosača broj nepoznatih je veći od broja jednačina.

Statičke veličine nosača ne možemo odrediti iz uslova ravnoteže nosača, već su nam potrebni dodatni uslovi.

Broj statičke neodređenosti nosača

- razlika između broja nepoznatih i broja jednačina ravnoteže
  $n = (z_o + z_u + z_s + z_k) - 2K$
- broj elemenata nosača koje možemo ukloniti a da on ostane kinematički stabilan, tj. da i dalje predstavlja nosač konstrukcija

Reakcije uklonjenih veza možemo izabrati proizvoljno a preostale statičke nepoznate odrediti iz uslova ravnoteže.

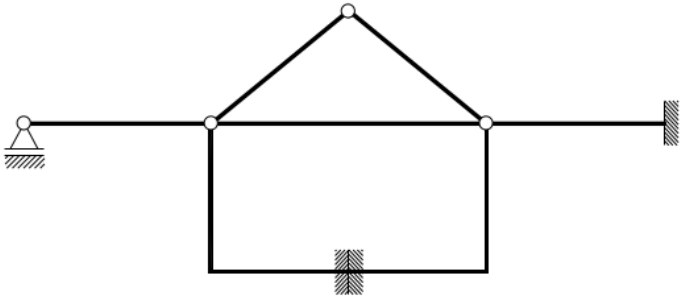
Svaki takav sistem sila predstavlja jedno **moguće ravnotežno stanje** u statički neodređenom nosaču.

Statički neodređeni nosači

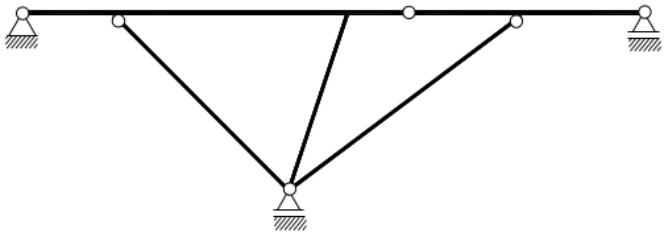
- Možemo izabrati *neograničeno mnogo* različitih kombinacija reakcija uklonjenih veza.
- Postoji *beskonačno mnogo* mogućih ravnotežnih stanja.
- *Samo jedno* ravnotežno stanje predstavlja *stvarno* ravnotežno stanje nosača.

Naš zadatak je da to ravnotežno stanje odredimo.

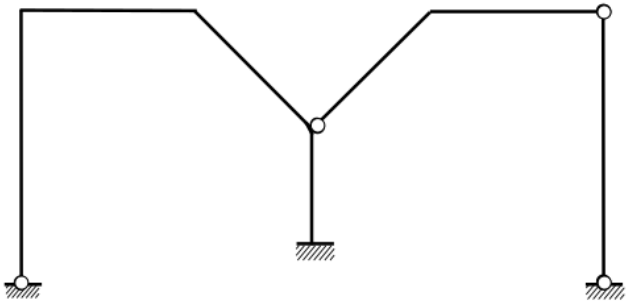
Utvrđivanje statičke neodređenosti nosača



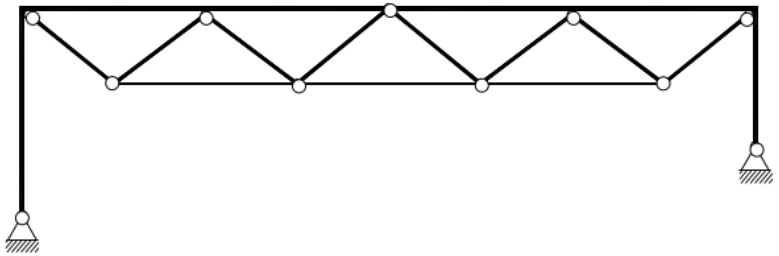
(a) $z_o = 3$, $z_u = 2$, $z_s = 9$, $z_k = 5$, $K = 8$, $n = 3$



(b) $z_o = 4$, $z_u = 0$, $z_s = 8$, $z_k = 4$, $K = 7$, $n = 2$



(c) $z_o = 6$, $z_u = 1$, $z_s = 7$, $z_k = 4$, $K = 8$, $n = 2$



(d) $z_o = 4$, $z_u = 0$, $z_s = 17$, $z_k = 4$, $K = 11$, $n = 3$

Metode za rešavanje statički neodređenih nosača

Prema izboru nepoznatih veličina, metode za određivanje sila u presecima statički neodređenih nosača mogu se podeliti u dve osnovne grupe:

- Metoda deformacije
- Metoda sila

Metoda deformacije

- Za nepoznate biramo generalisana pomeranja (deformacijske veličine nosača)
- Vrednosti deformacijski nepoznatih veličina dobijamo iz uslova ravnoteže nosača

Metode za rešavanje statički neodređenih nosača

Metoda sila

- Za nepoznate veličine biramo sile (reakcije spoljašnjih ili unutrašnjih veza)
- Vrednosti statički nepoznatih veličina dobijamo iz uslova kompatibilnosti pomeranja

Mi ćemo izučavati **Metodu sila**.

Metoda sila

- Utvrđujemo broj statičke neodređenosti nosača n
- Formiramo statički određen sistem datog nosača uklanjanjem n spoljašnjih i unutrašnjih veza čije smo reakcije izabrali za statički neodređene veličine $X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$. Taj nosač se zove **osnovni sistem**.
- Statički nepoznate veličine određujemo iz n dodatnih jednačina koje dobijamo iz uslova kompatibilnosti pomeranja čvorova nosača ili primenom nekih od opštih metoda Statike konstrukcija, npr. *principa virtualnih sila*

Metoda sila

- Uslovi ravnoteže čvorova zajedno sa ovih n jednačina čine potpun sistem od $2K + m + n$ jednačina, iz koga se mogu sračunati **sve** statičke veličine nosača.
- Slobodni članovi u $2K + m$ jednačina uslova ravnoteže čvorova zavise od opterećenja, dok u n dopisanih jednačina slobodni članovi predstavljaju statički neodređene veličine.*

*Pogledati detaljnije u knjizi, poglavlje 8.1. Metoda sila

Metoda sila

U nosaču definišemo $n+1$ međusobno nezavisnih stanja:

Stanje $X_i = 0$

Nosač je opterećen zadatim opterećenjem p, a sve statički nepoznate veličine su jednake nuli.

Stanje $X_1 = 1$

Na nosač deluje samo statički nepoznata veličina $X_1 = 1$.

...

Metoda sila

Stanje $X_2 = 1$

Na nosač deluje samo statički nepoznata veličina $X_2 = 1$.

Stanje $X_3 = 1$

Na nosač deluje samo statički nepoznata veličina $X_3 = 1$.

...

Stanje $X_n = 1$

Na nosač deluje samo statički nepoznata veličina $X_n = 1$.

Drugačije zapisano:

Stanje $X_i = 0$

$$p \neq 0, \quad X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$$

Stanje $X_1 = 1$

$$p = 0, \quad X_2 = X_3 = \cdots = X_n = 0$$

Stanje $X_2 = 1$

$$p = 0, \quad X_1 = X_3 = \cdots = X_n = 0$$

$\ldots$

Stanje $X_n = 1$

$$p = 0, \quad X_1 = X_2 = \cdots = X_{n-1} = 0$$

Metoda sila

Bilo koji uticaj Z u statički neodređenom nosaču može se prikazati kao zbir uticaja Z_0 u osnovnom sistemu od opterećenja i uticaja Z_i u osnovnom sistemu usled stanja $X_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$$Z = Z_o + Z_1 X_1 + Z_2 X_2 + \cdots + Z_n X_n = Z_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i X_i$$

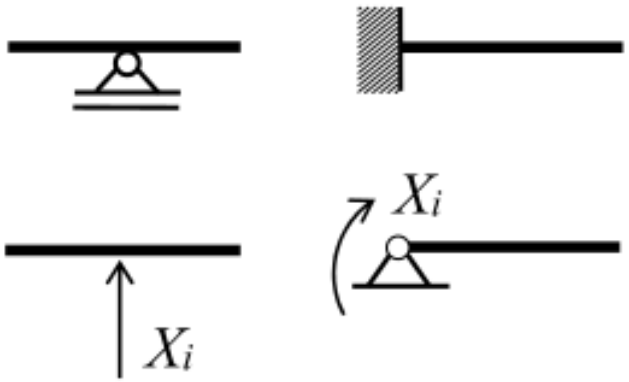
Izbor statički nepoznatih veličina

Za statički nepoznate veličine možemo izabrati:

- reakcije spoljašnjih veza
  - reakcije oslonaca C_o
  - reakcije uklještenja C_u
- reakcije unutrašnjih veza
  - momenat u preseku M_i
  - transverzalnu silu T_i
  - normalnu silu N_i

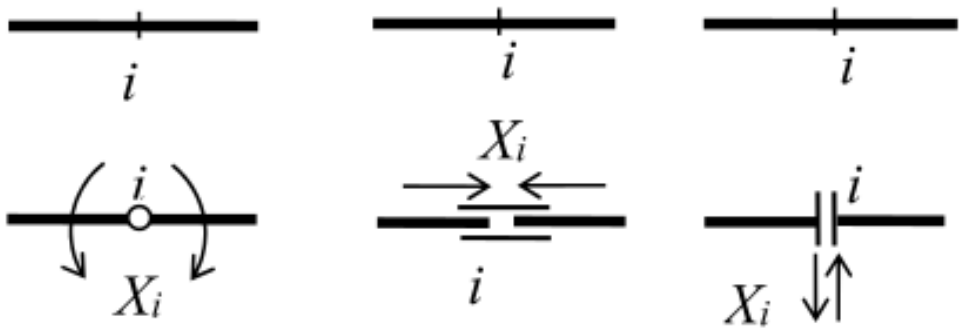
Izbor statički nepoznatih veličina

Ukoliko za statički nepoznatu veličinu biramo reakciju *spoljašnje* veze onda je statički nepoznata veličina **jedna jedina sila** koja odgovara rekaciji veze koju smo uklonili.



Izbor statički nepoznatih veličina

Ukoliko za statički nepoznate biramo reakcije *unutrašnjih* veza, onda su statički nepoznate veličine **parovi** suprotno orijentisanih sila, koje deluju na nosač levo i desno od uklonjenje veze.



Izbor osnovnog sistema

Osnovni sistem

Statički određeni nosač koji se dobija od datog nosača uklanjanjam n veza čije smo reakcije izabrali za statički nepoznate veličine.

Izbor osnovnog sistema

Statički nepoznate veličine X_i se ne mogu usvajati sasvim proizvoljno.

Izbor osnovnog sistema

Izbor statički nezavisnih veličina treba da bude takav da su zadovoljeni sledeći kriterijumi:

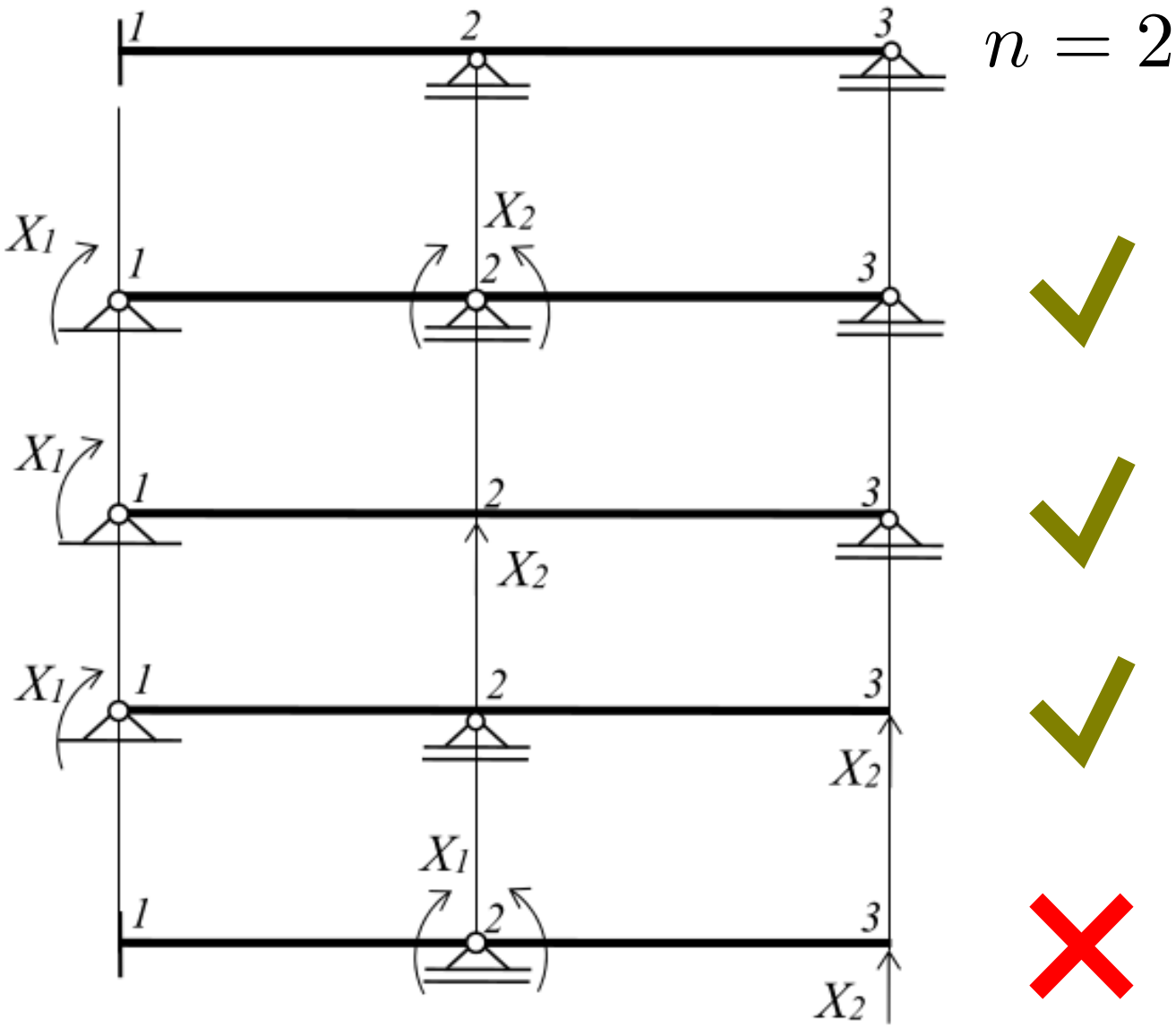
Za statički nepoznatu veličinu ne može se izabrati reakcija veze koja se može odrediti iz uslova ravnoteže nosača.

Statički nepoznate veličine biraju se tako da osnovni sistem bude kinematički prosto stabilan.

Izbor osnovnog sistema

Statički nepoznate veličine treba izabrati tako da osnovni sistem predstavlja jedan od poznatih nosača, prostu gredu, luk sa tri zgloba, lanac ploča, odnosno nosač u kome je moguće relativno jednostavno odrediti reakcije veza i sile u presecima usled zadatog opterećenja.

Izbor osnovnog sistema



Uslovne jednačine metode sila

Statički nepoznate veličine X_i se mogu odrediti na više načina:

- direktno, iz uslova kompatibilnosti pomeranja,
- primenom principa virtualnih sila,*
- primenom Principa o minimumu potencijalne energije sistema.*

Mi ćemo izučavati direktni postupak.

Nije obavezno, ali preporučujemo da pročitate u knjizi.

Uslovne jednačine metode sila

Statički nepoznate veličine se mogu direkno odrediti iz uslova da su pomeranja na mestu statički nepoznatih veličina u datom, statički neodređenom nosaču, poznata i jednaka nuli.

Uslovne jednačine metode sila

Na osnovu principa superpozicije, pomeranje δ_i na mestu statički nepoznate veličine X_i u *statički neodređenom nosaču* jednako je zbiru pomeranja na mestu statičke nepoznate veličine X_i u *osnovnom sistemu* usled istovremenog delovanja spoljašnjih uticaja i statički nepoznatih veličina

$$\delta_i = \delta_{i\otimes} + \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \cdots + \delta_{in}X_n$$

Uslovne jednačine metode sila

$$\delta_i = \delta_{i\otimes} + \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \cdots + \delta_{in}X_n$$

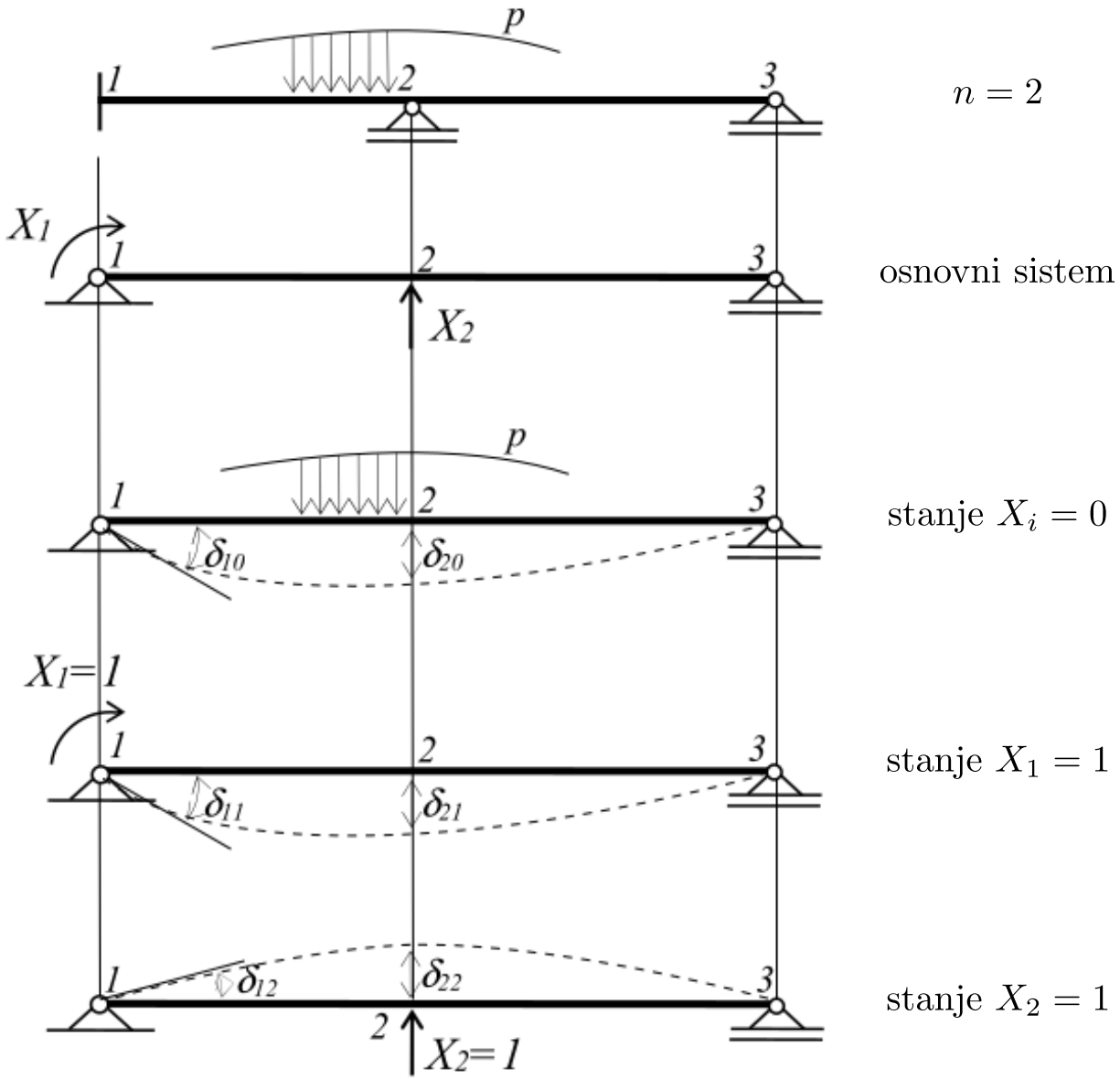
gde je:

δ_i generalisano pomeranje na mestu statičke nepoznate veličine X_i u *statički neodređenom nosaču*

$\delta_{i\otimes}$ generalisano pomeranje na mestu statičke nepoznate veličine X_i u *osnovnom sistemu* usled spoljašnjih uticaja (opterećenja, temperature i sleganja oslonaca)

δ_{ik} generalisano pomeranje na mestu statičke nepoznate X_i u *osnovnom sistemu* usled delovanja statički nepoznate veličine $X_k = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$

Uslovne jednačine metode sila



Uslovne jednačine metode sila

Generalisana pomeranja δ_1 i δ_2 na mestu statičkih nepoznatih X_1 i X_2 u datom, statički neodređenom nosaču, jednaka su nuli pošto na tom mestu postoje veze koje ta pomeranja sprečavaju.

Uslovne jednačine metode sila

Kada se pomeranja δ_1 i δ_2 u statički neodređenom nosaču prikažu kao zbir:

δ_{i0} pomeranja u osnovnom sistemu usled opterećenja (stanje $X_i = 0$)

δ_{i1} pomeranja u osnovnom sistemu usled delovanja statički nepoznate veličine X_1 (stanje $X_1 = 1$)

δ_{i2} pomeranja u osnovnom sistemu usled delovanja statički nepoznate veličine X_2 (stanje $X_2 = 1$)

dobijaju se uslovne jednačine za određivanje statički nepoznatih X_1 i X_2:

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0$$

Uslovne jednačine metode sila

Za n puta statički neodređen nosač uslovne jednačine metode sila glase:

$$
\begin{aligned}
\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1\otimes} &= 0 \\
\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2\otimes} &= 0 \\
&\vdots \\
\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \cdots + \delta_{in}X_n + \delta_{i\otimes} &= 0 \\
&\vdots \\
\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n\otimes} &= 0
\end{aligned}
$$

Uslovne jednačine metode sila

δ_{ik} koeficijenti uslovnih jednačina metode sila

$\delta_{i\otimes}$ slobodnih članovi uslovnih jednačina metode sila

Uslovne jednačine metode sila

Fizičko značenje koeficijenata i slobodnih članova:

δ_{ik} generalisano pomeranje u *osnovnom sistemu* datog nosača

- na mestu statički nepoznate veličine X_i,
- u pravcu i smeru statički nepoznate veličine X_i,
- usled stanja $X_k = 1$

$\delta_{i\otimes}$ generalisano pomeranje u *osnovnom sistemu* datog nosača

- na mestu statički nepoznate veličine X_i,
- u pravcu i smeru statički nepoznate veličine X_i,
- usled stanja $X_i = 0$ (usled delovanja spoljašnjih uticaja, opterećenja (0), temperature (t) i pomeranja oslonaca (c))

$$\delta_{i\otimes} = \delta_{i0} + \delta_{it} + \delta_{ic}$$

Uslovne jednačine metode sila

Koeficijenti i slobodni članovi uslovnih jednačina metode sila predstavljaju pomeranja u statički određenom osnovnom sistemu. Njihove vrednosti možemo odrediti primenom principa virtualnih sila:

$$\delta_{ik} = \int_s \frac{M_i M_k}{EI} ds + \int_s \frac{N_i N_k}{EF} ds + k \int_s \frac{T_i T_k}{EF} ds$$

$$\delta_{i0} = \int_s \frac{M_i M_0}{EI} ds + \int_s \frac{N_i N_0}{EF} ds + k \int_s \frac{T_i T_0}{GF} ds$$

$$\delta_{it} = \int_s N_i \alpha_t t^o ds + \int_s M_i \alpha_t \frac{\Delta t}{h} ds$$

$$\delta_{ic} = -\sum_j C_{ji} c_j$$

Uslovne jednačine metode sila

C_{ji}, M_i, N_i, T_i	sile u osnovnom sistemu usled stanja $X_i = 1$
M_k, N_k, T_k	sile u osnovnom sistemu usled stanja $X_k = 1$
M_0, N_0, T_0	sile u osnovnom sistemu usled stanja $X_i = 0$
t^o	temperaturna promena u osi štapa
Δt	temperaturna razlika
c_j	zadato pomeranje oslonca j

Matrični oblik uslovnih jednačina

Uslovne jednačine metode sila (slajd 39) mogu se predstaviti u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1k} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2k} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \cdots & \delta_{ik} & \cdots & \delta_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nk} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{1\otimes} \\ \delta_{2\otimes} \\ \vdots \\ \delta_{i\otimes} \\ \vdots \\ \delta_{n\otimes} \end{Bmatrix} = 0$$

Matrični oblik uslovnih jednačina

tj. u obliku:

$$\mathbf{DX} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

gde je:

$\mathbf{D}$	matrica koeficijenata
$\mathbf{X}$	vektor statički nepoznatih veličina
$\mathbf{d}$	vektor slobodnih članova

Matrični oblik uslovnih jednačina

Prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\mathbf{DX} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

ima rešenje ako je determinanta sistema različita od nule

$$\det \mathbf{D} \neq 0$$

Taj uslov će biti uvek ispunjen ako je osnovni sistem pravilno izabran, tj. ako je on kinematički prosto stabilan.

Matrični oblik uslovnih jednačina

Osobine matrice koeficijenata uslovnih jednačina

- Kvadratna matrica reda n,
- Simetrična, što sledi iz stava o uzajamnosti pomeranja $\delta_{ik} = \delta_{ki}$
- Članovi na glavnoj dijagonali δ_{ii} su
  - uvek pozitivni $\delta_{ii} = \int_s (M_i M_i / EI) ds > 0$
  - veći od vandijagonalnih članova δ_{ik}

  čime je obezbeđena numerička stabilnost rešenja.

Literatura

LINK