Pomeranja

Teorija konstrukcija - HVE

Predavanja: 6. sedmica

Pomeranja

Pri projektovanju konstrukcija potrebno je ispuniti dva osnovna uslova:

- da su naponi u elementima konstrukcije u granicama dopuštenih i
- da su pomeranja tačaka konstrukcije u dozvoljenim granicama.

Nedozvoljena pomeranja u konstrukcijama mogu izazvati probleme tokom eksploatacije objekta:

- nemogućnost otvaranja – zatvaranja vrata i prozora,
- pojavu prslina u zidovima,
- lomljenje staklenih površina,
- poremećaj rada osetljive opreme, ...

Pomeranja

Koji ćemo postupak za određivanje pomeranja primeniti zavisi od toga da li želimo da sračunamo:

- jedno određeno pomeranje ili
- dijagram pomeranja u zadatom pravcu određenog poteza štapova nosača.

Generalisano pomeranje

Generalisano pomeranje

svako apsolutno ili relativno pomeranje nosača

- pomeranje tačke,
- obrtanje poprečnog preseka,
- promena ugla između dva preseka, ...

Određivanje generalisanih pomeranja nosača

Za određivanje generalisanih pomeranja nosača stoje nam na raspolaganju:

- diferencijalna jednačina štapa *
- uslovi kompatibilnosti pomeranja nosača *
- princip virtualnih sila

U statici konstrukcija, generalisano pomeranje nosača određujemo najčešće primenom **principa virtualnih sila (PVS)**.

*Nije obavezno, ali preporučujemo da pročitate u knjizi.

Princip virtualnih sila

Princip virtualnih sila (PVS)

predstavlja opšti postupak na osnovu koga se može odrediti bilo koje generalisano pomeranje nosača

$$\sum_i \overline{P}_i \delta_i + \sum_j \overline{C}_j c_j = \int_s \left(\overline{M}\kappa + \overline{N}\varepsilon + \overline{T}\varphi_t \right) ds$$

$\overline{P}_i, \overline{C}_j, \overline{M}, \overline{N}, \overline{T}$ - virtualne sile

δ_i, c_j - stvarna pomeranja

$\kappa, \epsilon, \varphi_t$ - virtualne deformacije

Princip virtualnih sila

U tački i nosača zadajemo jediničnu generalisanu silu koja odgovara traženom pomeranju, $\overline{P}_i$.

Virtualna sila $\overline{P}_i$ izaziva:

- reakcije oslonaca $\overline{C}_j$
- presečne sile $\overline{M}, \overline{T}, \overline{N}$

Na nosač deluje samo jedna sila $\overline{P}_i = 1$, pa iz PVS sledi:

$$\delta_i = \int_s \left(\overline{M}\kappa + \overline{N}\varepsilon + \overline{T}\varphi_t\right) ds - \sum_j \overline{C}c$$

Princip virtualnih sila

Deformacijske veličine možemo napisati u funkciji presečnih sila i temperature:

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t t^o, \quad \kappa = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}, \quad \varphi_t = k\frac{T}{GF}$$

Princip virtualnih sila

Izraz za generalisano pomeranje

$$\delta_i = \int_s \frac{M\overline{M}}{EI} ds + \int_s \frac{N\overline{N}}{EF} ds + k \int_s \frac{T\overline{T}}{EF} ds +$$
$$+ \int_s \overline{N} \alpha_t t^o ds + \int_s \overline{M} \alpha_t \frac{\Delta t}{h} ds -$$
$$- \sum_j \overline{C}_j c_j$$

Princip virtualnih sila

Kod statički određenih nosača temperatura i sleganje oslonaca ne izazivaju sile u presecima.

Generalisano pomeranje δ_i može prikazati kao zbir pomeranja

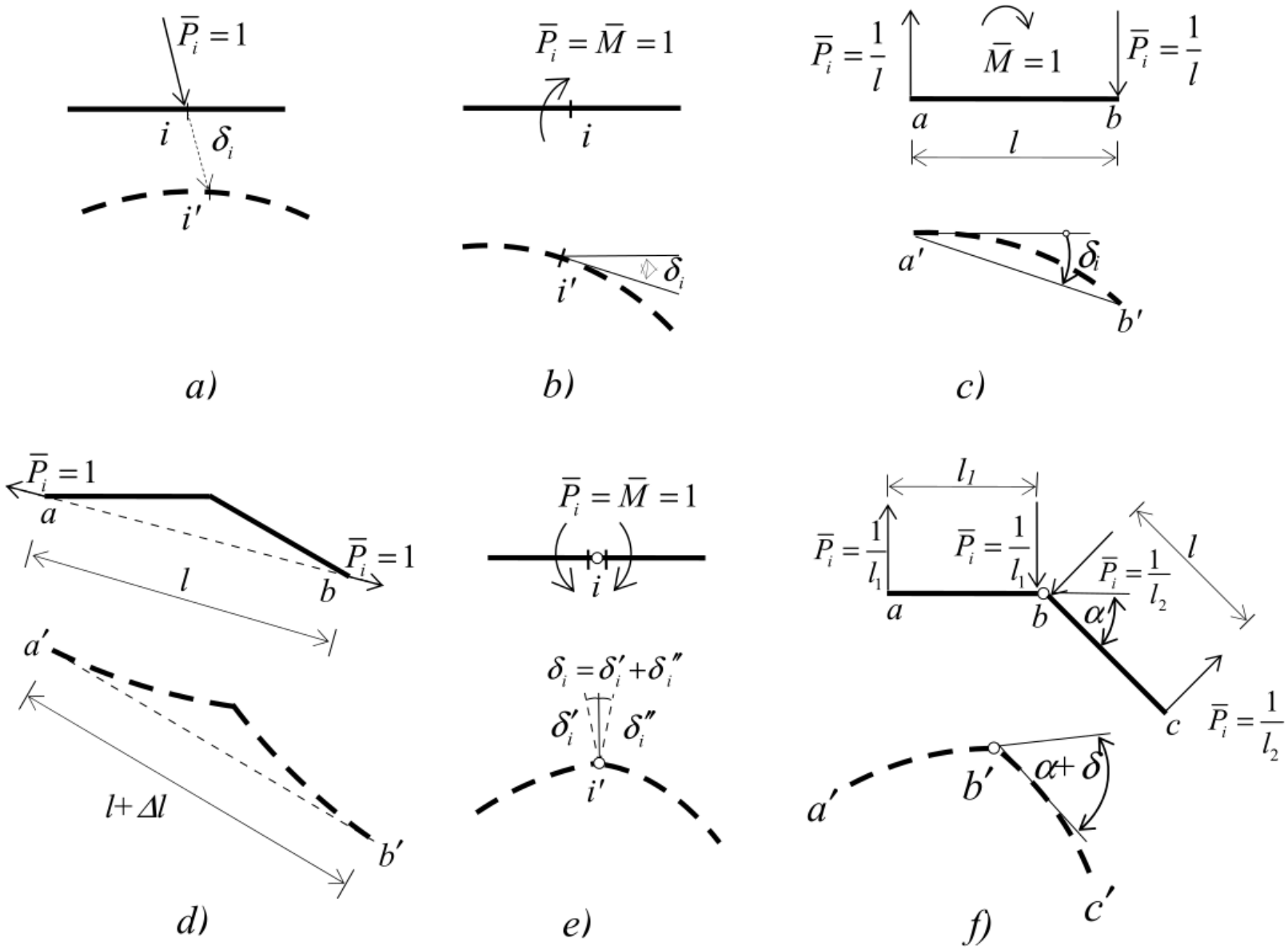
- od opterećenja $\delta_{io} = \int_s \frac{M\overline{M}}{EI} ds + \int_s \frac{N\overline{N}}{EF} ds + k \int_s \frac{T\overline{T}}{EF} ds$
- od temperature $\delta_{it} = \int_s \overline{N} \alpha_t t^o ds + \int_s \overline{M} \alpha_t \frac{\Delta t}{h} ds$
- od sleganja oslonaca $\delta_{ic} = -\sum_j \overline{C}_j c_j$

Generalisana pomeranja i generalisane sile

Generalisana pomeranja nosača mogu biti:

1. apsolutna pomeranja
   (a) pomeranje tačke
   (b) obrtanje preseka
   (c) obrtanje štapa
2. relativna pomeranja
   (d) promena rastojanja između dve tačke
   (e) promena ugla između dva preseka
   (f) promena ugla između dva štapa

Generalisana pomeranja i generalisane sile



Redukcija izraza za pomeranje

Pomeranja δ_i su male veličine, pošto se podintegralne funkcije dele sa velikim brojevima kao što su EI, EF, ...

Da bi se izbegao rad sa malim veličinama, čitav izraz se množi sa konstantom C. Za konstantu C obično usvajamo

$$C = EI_c$$

gde je I_c uporedni momenat inercije poprečnog preseka.

I_c je obično ili:

- najmanji momenat inercije poprečnog preseka koji se javlja u nosaču ili
- momenat inercije koji se javlja kod najvećeg broja štapova.

Redukcija izraza za pomeranje

$$EI_c\delta_{io} = \int_s M\overline{M}\frac{I_c}{I}ds + \frac{I_c}{F_c}\int_s N\overline{N}\frac{F_c}{F}ds + k\frac{E}{G}\frac{I_c}{F_c}\int_s T\overline{T}\frac{F_c}{F}ds$$

$$EI_c\delta_{it} = EI_c\int_s \overline{N}\alpha_t t^o ds + EI_c\int_s \overline{M}\alpha_t\frac{\Delta t}{h}ds$$

$$EI_c\delta_{ic} = -EI_c\sum_j \overline{C}_j c_j$$

I_c/F_c

- Uticaj N i T sila pomnožen je odnosom I_c/F_c.
- I_c/F_c je i do 10 puta manji od 1.
- Ordinate dijagrama N i T sila su manje od ordinata dijagrama momenata

Zbog toga se uticaj normalnih i transverzalnih sila na deformaciju punih nosača u velikom broju slučajeva može zanemariti, a da pri tome dobijene vrednosti pomeranja ne odstupaju bitno od tačnih vrednosti.

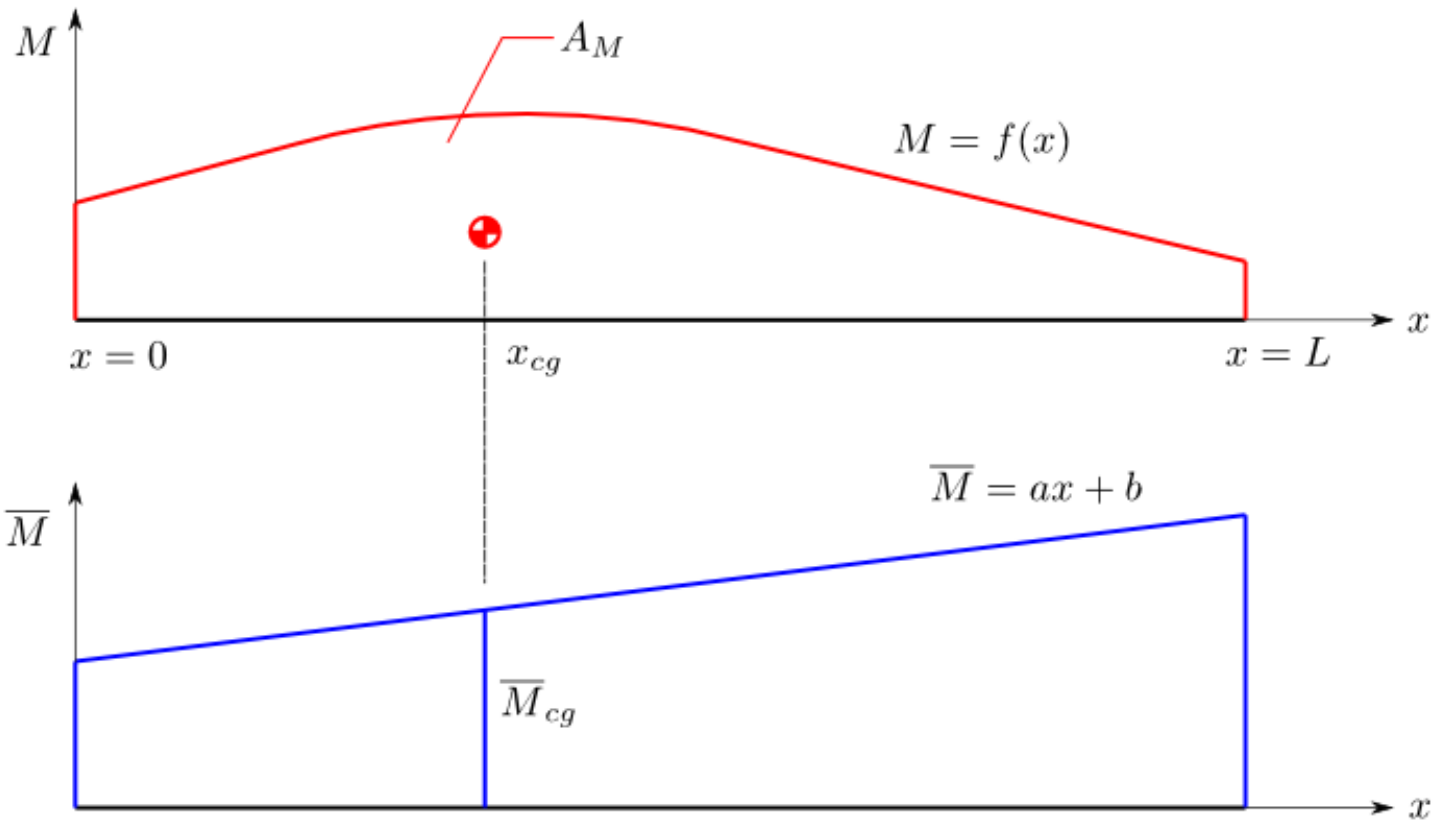
Sračunavanje integrala

Vrednost integrala u izrazu za generalisano pomeranje (slajd 13) za nosače kod kojih su svi štapovi **konstatnog preseka** sračunavamo primenom **pravila Vereščagina**.

Za štapove promenljivog preseka mora se primeniti postupak numeričke integracije.*

*Nije obavezno, ali preporučujemo da pročitate u knjizi.

Pravilo Vereščagina



$$\int_0^L M\overline{M}dx = A_M\overline{M}_{cg}$$

http://www.structuralwiki.org/en/Vereschagin%27s_rule

Pravilo Vereščagina

Vrednost integrala $\int_0^L M\overline{M}dx$ jednaka je proizvodu površine funkcije M i vrednosti funkcije $\overline{M}$ u težištu površine funkcije M.

Pravilo Vereščagina

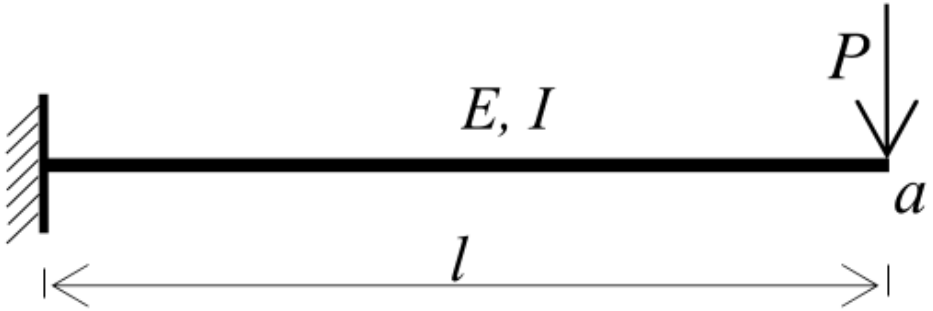
Sračunavanje integrala primenom pravila Vereščagina može se pojednostaviti primenom tabele u kojoj su date vrednosti integrala za karakteristične oblike dijagrama momenata M i $\overline{M}$.

	M_i	M_i	M_i M_k	f	k
$\overline{M}_i$	$\overline{M}_i M_i l'$	$\frac{l'}{2}\overline{M}_i M_i$	$\frac{l'}{2}\overline{M}_i(M_i + M_k)$	$\frac{2}{3}l'\overline{M}_i f$	$\frac{1}{4}l'\overline{M}_i k$
$\overline{M}_i$	$\frac{l'}{2}\overline{M}_i M_i$	$\frac{l'}{3}\overline{M}_i M_i$	$\frac{l'}{6}\overline{M}_i(2M_i + M_k)$	$\frac{l'}{3}\overline{M}_i f$	$\frac{1}{60}l'\overline{M}_i k$
$\overline{M}_k$	$\frac{l'}{2}\overline{M}_k M_i$	$\frac{l'}{6}\overline{M}_i M_i$	$\frac{l'}{6}\overline{M}_k(M_i + 2M_k)$	$\frac{l'}{3}\overline{M}_k f$	$\frac{2}{15}l'\overline{M}_k k$
$\overline{M}_i$ $\overline{M}_k$	$\frac{l'}{2}\overline{M}_k M_i$	$\frac{l'}{6}\overline{M}_i M_i$	$\frac{l'}{6}\left[\begin{array}{c}\overline{M}_i(2M_i+M_k)\\ +\overline{M}_k(M_i+2M_k)\end{array}\right]$	$\frac{l'}{3}(\overline{M}_i+\overline{M}_k)f$	$\frac{l'}{60}(7\overline{M}_i+8M_k)k$

Izrazi dati u tabeli mogu se koristiti i za sračunavanje vrednosti integrala usled normalnih sila i transverzalnih sila.

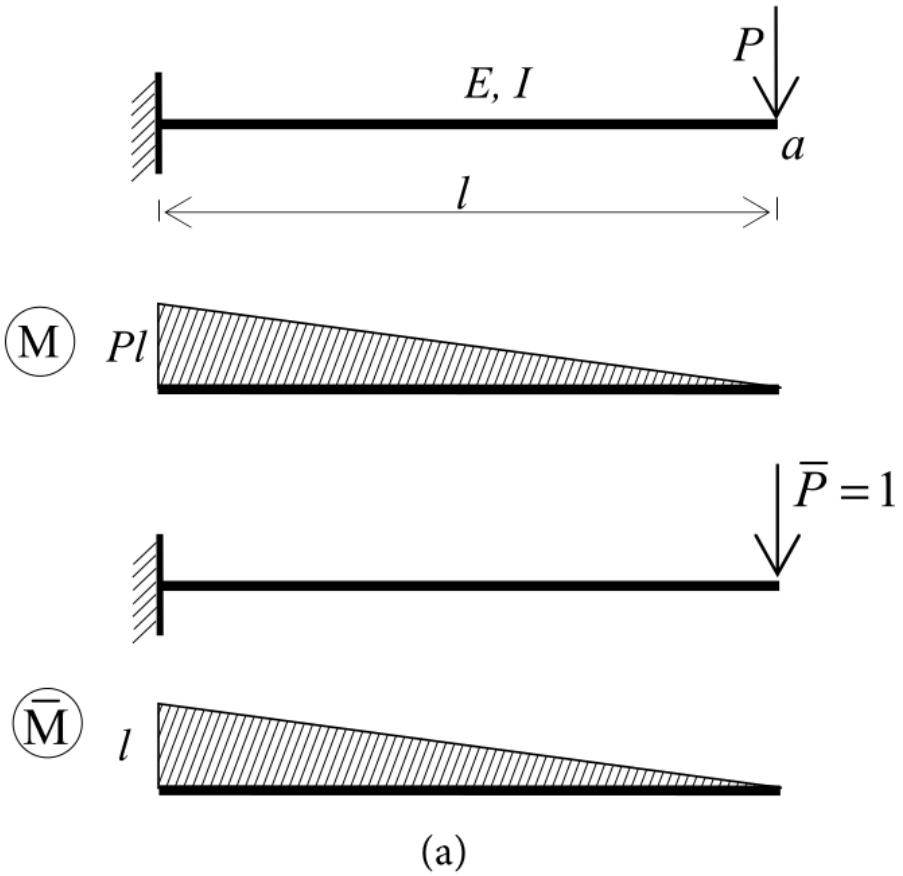
Primer

Proračun pomeranja ilustrovaćemo na primeru konzolnog nosača koji je opterećen koncentrisanom silom P u čvoru a.



Primer

Vertikalno pomeranje čvora a:



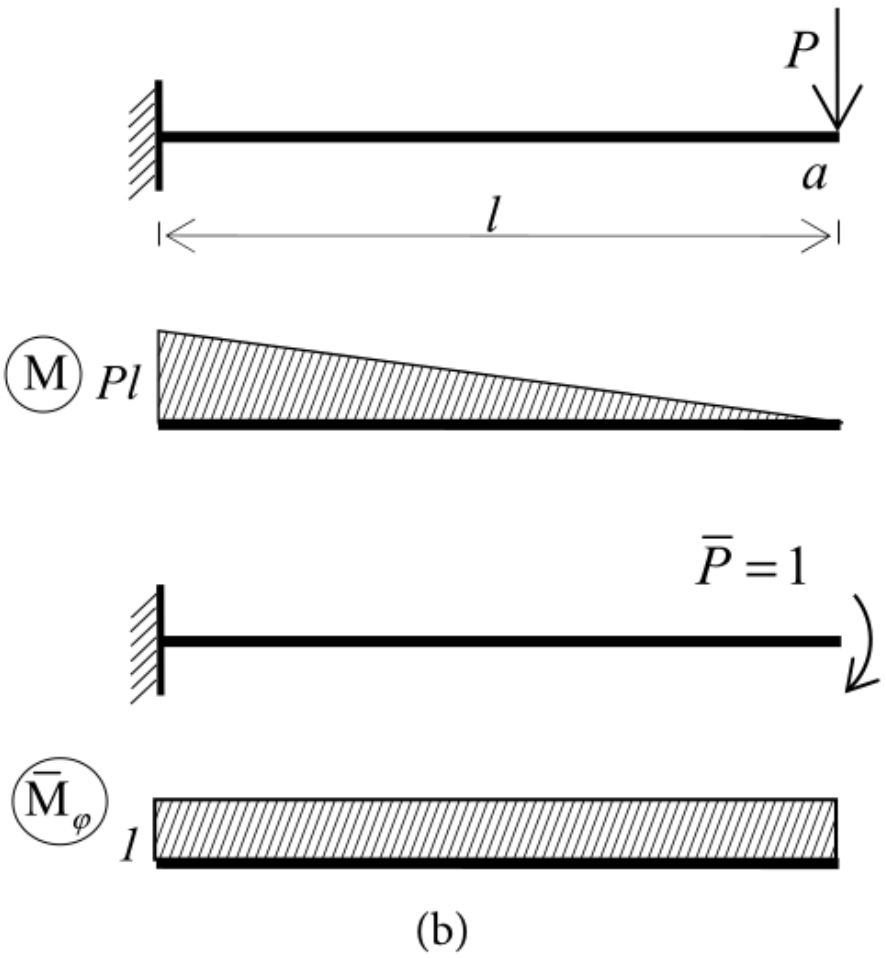
(a)

$$EIv_a = \frac{l}{3}Pl \cdot l = \frac{Pl^3}{3}$$

$$v_a = \frac{Pl^3}{3EI}$$

Primer

Obrtanje čvora a:



(b)

$$EI\varphi_a = \frac{l}{2}Pl \cdot 1 = \frac{Pl^2}{2}$$

$$\varphi_a = \frac{Pl^2}{2EI}$$

Rešetkasti nosači

Kod proračuna pomeranja rešetkastih nosača primenom principa virtualnih sila, izrazi za pomeranja se pojednostavljuju stoga što se u štapovima rešetkastih nosača javljaju samo aksijalne sile $N = S$.

Aksijalne sile imaju konstantnu vrednost duž jednog štapa.

Svi štapovi rešetkastih nosača su konstantnog poprečnog preseka, $EF = const$.

Rešetkasti nosači

Izrazi za pomeranja rešetkastih nosača:

$$\delta_{io} = \int_s \frac{N\overline{N}}{EF} ds = \sum_s \frac{S\overline{S}}{EF} \int_i^k ds = \sum_s \frac{S\overline{S}}{EF} l$$

$$\delta_{it} = \int_s \overline{N} \alpha_t t^o ds = \sum_s \overline{S} \alpha_t t^o \int_i^k ds = \sum_s \overline{S} \alpha_t t^o l$$

$$\delta_{ic} = -\sum_j \overline{C}_j c_j$$

Rešetkasti nosači: redukcija izraza za pomeranja

Kod rešetkastih nosača pomeranja redukujemo konstantnom redukcije

$$C = EF_c$$

gde je F_c površina uporednog preseka.

Redukovani izrazi za pomeranja:

$$EF_c\delta_{io} = \sum_s S\bar{S}\frac{F_c}{F}l$$

$$EF_c\delta_{it} = EF_c\sum_s \bar{S}\alpha_t t^o l$$

$$EF_c\delta_{ic} = -EF_c\sum_j \bar{C}_j c_j$$

Literatura

LINK