Statički neodređeni nosači

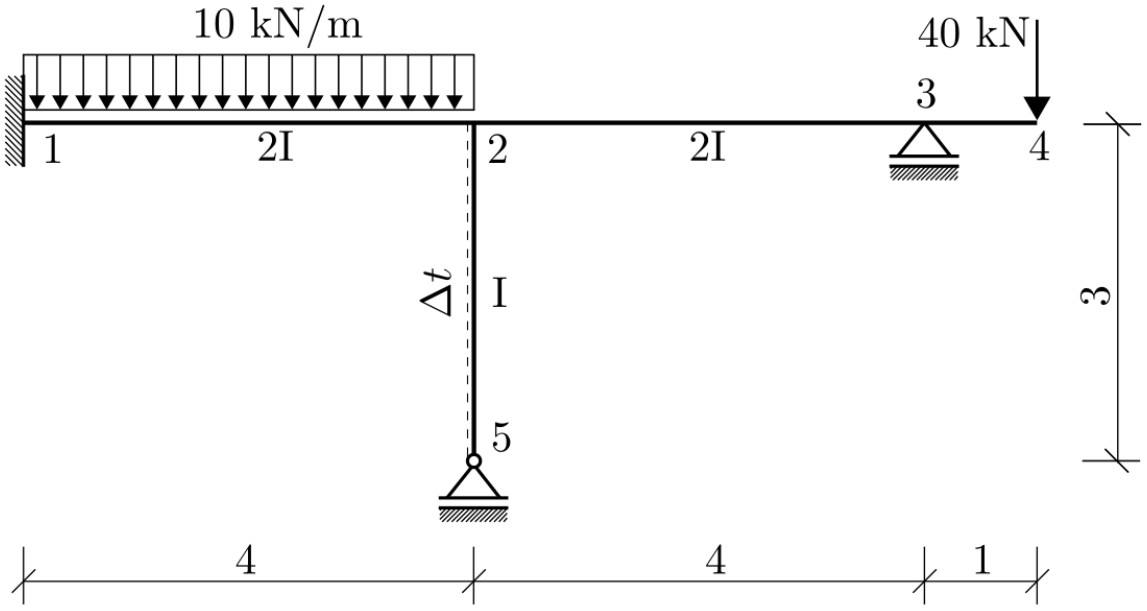
Teorija konstrukcija - HVE

Vežbe: 8. sedmica

Primer 1

Odrediti dijagrame sila u presecima datog nosača.

Uticaj normalnih i transverzalnih sila na deformaciju zanemariti.



$$EI = 10^5\,\mathrm{kNm}^2$$

$$I/F = 0$$

$$\Delta t = 10\,^\circ\mathrm{C}$$

$$h = 0.5\,\mathrm{m}$$

$$\alpha_t = 10^{-5}\,1/^\circ\mathrm{C}$$

Primer 1

Pre nego što počnemo da tražimo sile u presecima, moramo izvršiti statičku klasifikaciju nosača i utvrditi kojoj grupi nosača pripada.

Da bismo to uradili često je dovoljno da uočimo koje elemente treba da uklonimo datom nosaču, da bismo dobili neki od nosača do čijih sila u presecima možemo doći postavljanjem uslova ravnoteže sila (konzola, prosta greda, luk sa tri zgloba, ...).

Primer 1

Na primer:

- ukoliko datom nosaču uklonimo oslonce u čvorovima 3 i 5, dobićemo konzolni nosač
- ukoliko uklonimo uklještenje u čvoru 1 i oslonac u čvoru 3, dobićemo gredu sa prepustom

Primer 1

Pošto je dovoljno da uklonimo 2 elementa, zaključujemo da je nosač dva puta statički neodređen.

$$n = 2$$

Primer 1

Ukoliko nismo sigurni, uvek možemo izvršiti proveru prebrojavanjem elemenata nosača:

broj oslonaca	z_o	4
broj uklještenje	z_u	1
broj štapova	z_s	4
broj krutih uglova	z_k	3
ukupno	$\sum z$	12

Primer 1

Pošto je broj čvorova u nosaču $K = 5$, statičku neodređenost računamo kao

$$n = \sum z - 2K = 12 - 10 = 2$$

Primer 1

Proces brojanja elemenata možemo optimizovati.

> Ukoliko uočimo delove nosača koji su statički određeni, možemo ih ukloniti - zameniti reakcijama veza.

Ovo je preporučljivo zbog lakšeg rešavanja nosača i određivanja njegove statičke neodređenosti.

Primer 1

U konkretnom slučaju primećujemo da deo nosača 3-4 predstavlja konzolni nosač koji možemo rešiti zasebno, nezavisno od ostatka datog nosača. Taj deo nosača ćemo privremeno ukloniti i opet prebrojati elemente nosača:

broj oslonaca	z_o	4
broj uklještenje	z_u	1
broj štapova	z_s	3
broj krutih uglova	z_k	2
ukupno	$\sum z$	10

Primer 1

Pošto je broj čvorova u nosaču $K = 4$, statičku neodređenost računamo kao

$$n = \sum z - 2K = 10 - 8 = 2$$

Primer 1

Dakle, smanjili smo

- broj štapova z_s za 1
- broj krutih uglova z_k za 1
- broj čvorova K za 1

pa je razlika $\sum z - 2K$ ostala ista.

Primer 1

Pošto je dati nosač statički neodređen nosač, do sila u presecima dolazimo korišćenjem Metode sila.

Primer 1

Prvo treba da izaberemo osnovni sistem nosača.

Osnovni sistem

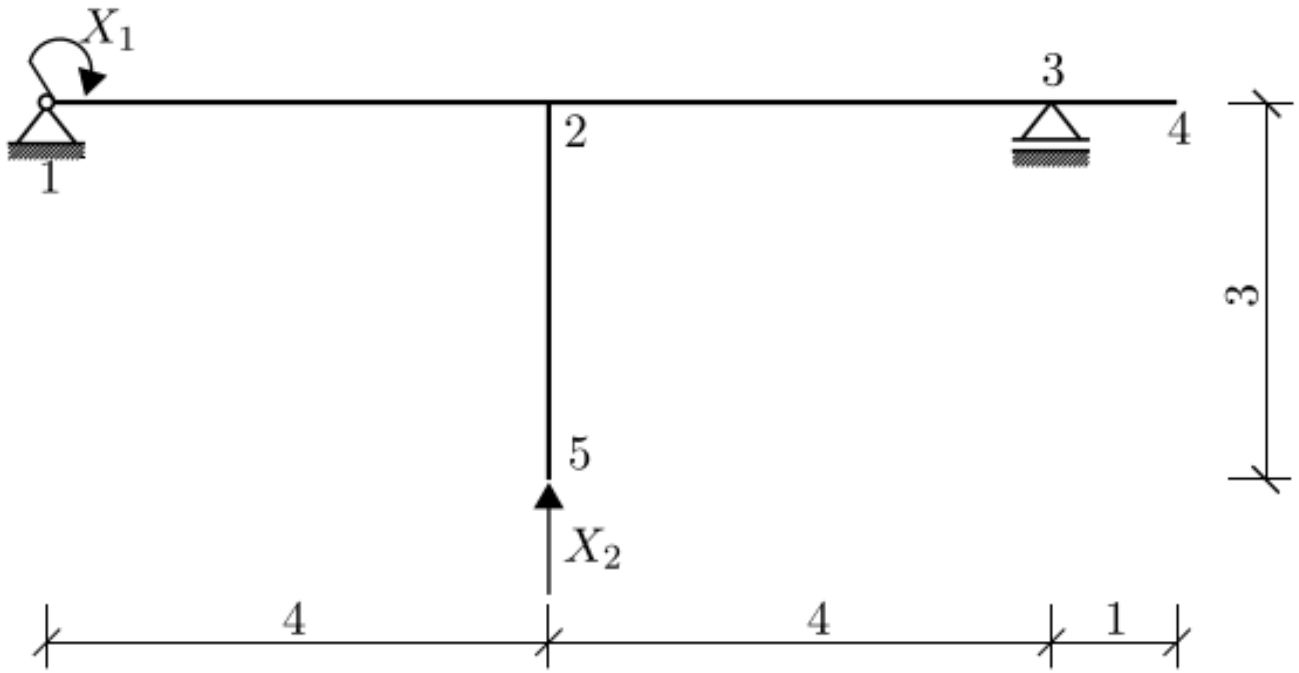
Statički određeni nosač koji se dobija od datog nosača uklanjanjam n veza čije smo reakcije izabrali za statički nepoznate veličine.

Primer 1

Statički nepoznate veličine treba izabrati tako da osnovni sistem predstavlja jedan od poznatih nosača, prostu gredu, luk sa tri zgloba, lanac ploča, odnosno nosač u kome je moguće relativno jednostavno odrediti reakcije veza i sile u presecima usled zadatog opterećenja.

Primer 1

Usvojeni osnovni sistem:



Primer 1

Uslovne jednačine metode sila:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1\otimes} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2\otimes} = 0$$

δ_{ij} i $\delta_{i\otimes}$ su pomeranja u osnovnom sistemu, a X_i su statički nepoznate veličine.

Fizičko značenje ovih jednačina objasnićemo analiziranjem njenih članova.

Primer 1

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1\otimes} = 0$$

δ_{11} Obrtanje poprečnog preseka 1 u osnovnom sistemu usled delovanja jedinične sile $X_1 = 1$ (stanje $X_1 = 1$)

δ_{12} Obrtanje poprečnog preseka 1 u osnovnom sistemu usled delovanja jedinične sile $X_2 = 1$ (stanje $X_2 = 1$)

$\delta_{1\otimes}$ Obrtanje poprečnog preseka 1 u osnovnom sistemu usled delovanja spoljašnjih uticaja: opterećenja (δ_{10}) i temperaturne razlike (δ_{1t}) (stanje $X_i = 0$)

Primer 1

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1\otimes} = 0$$

$\delta_{11}X_1$ Obrtanje poprečnog preseka 1 u osnovnom sistemu usled delovanja sile X_1

$\delta_{12}X_2$ Obrtanje poprečnog preseka 1 u osnovnom sistemu usled delovanja sile X_2

$\delta_{1\otimes}$ Obrtanje poprečnog preseka 1 u osnovnom sistemu usled delovanja spoljašnjih uticaja: opterećenja (δ_{10}) i temperaturne razlike (δ_{1t}) (stanje $X_i = 0$)

Primer 1

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1\otimes} = 0$$

Izraz sa leve strane, $\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1\otimes}$, predstavlja obrtanje poprečnog preseka 1 u osnovnom sistemu usled delovanja svih uticaja: X_1, X_2, opterećenja i temperaturne razlike.

Ovom uslovnom jednačinom sprečili smo obrtanje poprečnog preseka 1 u osnovnom sistemu.

Primer 1

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2\otimes} = 0$$

δ_{21} Vertikalno pomeranje čvora 5 u osnovnom sistemu usled delovanja jedinične sile $X_1 = 1$ (stanje $X_1 = 1$)

δ_{22} Vertikalno pomeranje čvora 5 u osnovnom sistemu usled delovanja jedinične sile $X_2 = 1$ (stanje $X_2 = 1$)

$\delta_{2\otimes}$ Vertikalno pomeranje čvora 5 u osnovnom sistemu usled delovanja spoljašnjih uticaja: opterećenja (δ_{20}) i temperaturne razlike (δ_{2t}) (stanje $X_i = 0$)

Primer 1

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2\otimes} = 0$$

$\delta_{21}X_1$ Vertikalno pomeranje čvora 5 u osnovnom sistemu usled delovanja sile X_1

$\delta_{22}X_2$ Vertikalno pomeranje čvora 5 u osnovnom sistemu usled delovanja sile X_2

$\delta_{2\otimes}$ Vertikalno pomeranje čvora 5 u osnovnom sistemu usled delovanja spoljašnjih uticaja: opterećenja (δ_{20}) i temperaturne razlike (δ_{2t}) $\delta_{2\otimes} = \delta_{20} + \delta_{2t}$

Primer 1

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2\otimes} = 0$$

Izraz sa leve strane, $\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2\otimes}$, predstavlja vertikalno pomeranje čvora 5 u osnovnom sistemu usled delovanja svih uticaja: X_1, X_2, opterećenja i temperaturne razlike.

Ovom uslovnom jednačinom sprečili smo vertikalno pomeranje čvora 5 u osnovnom sistemu.

Primer 1

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1\otimes} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2\otimes} = 0$$

To znači da uslovnim jednačinama, u osnovnom sistemu, sprečavamo

- obrtanje poprečnog preseka 1 i
- vertikalno pomeranje čvora 5.

Primer 1

Na taj način, *naterali* smo osnovni sistem da se ponaša kao dati nosač.

Za razliku od datog nosača, osnovni sistem je *statički određen nosač*, pa do sila u presecima možemo doći preko uslova ravnoteže sila.

Međutim, potrebno je da prvo odredimo statički nepoznate veličine X_1 i X_2, rešavanjem uslovnih jednačina.

Primer 1

Koeficijenti δ predstavljaju pomeranja u osnovnom sistemu, pa ćemo ih odrediti koristeći **Princip virtualnih sila**:

$$\delta_{ik} = \int_s \frac{M_i M_k}{EI} ds + \int_s \frac{N_i N_k}{EF} ds + k \int_s \frac{T_i T_k}{EF} ds$$

$$\delta_{i0} = \int_s \frac{M_i M_0}{EI} ds + \int_s \frac{N_i N_0}{EF} ds + k \int_s \frac{T_i T_0}{GF} ds$$

$$\delta_{it} = \int_s N_i \alpha_t t^o ds + \int_s M_i \alpha_t \frac{\Delta t}{h} ds$$

$$\delta_{ic} = -\sum_j C_{ji} c_j$$

Primer 1

C_{ji}, M_i, N_i, T_i	sile u osnovnom sistemu usled stanja $X_i = 1$
M_k, N_k, T_k	sile u osnovnom sistemu usled stanja $X_k = 1$
M_0, N_0, T_0	sile u osnovnom sistemu usled stanja $X_i = 0$
t^o	temperaturna promena u osi štapa
Δt	temperaturna razlika
c_j	zadato pomeranje oslonca j

Primer 1

Pošto je uticaj normalnih $(I/F = 0)$ i transverzalnih sila na deformaciju zanemaren, zanemarujemo odgovarajuće sabirke u izrazima za δ_{ik} i δ_{i0}.

Primer 1

$$\delta_{ik} = \int_s \frac{M_i M_k}{EI} ds + \cancelto{0}{\int_s \frac{N_i N_k}{EF} ds} + k \cancelto{0}{\int_s \frac{T_i T_k}{EF} ds}$$

$$\delta_{i0} = \int_s \frac{M_i M_0}{EI} ds + \cancelto{0}{\int_s \frac{N_i N_0}{EF} ds} + k \cancelto{0}{\int_s \frac{T_i T_0}{GF} ds}$$

$$\delta_{it} = \int_s N_i \alpha_t t^o ds + \int_s M_i \alpha_t \frac{\Delta t}{h} ds$$

$$\delta_{ic} = -\sum_j C_{ji} c_j$$

Primer 1

Sleganja oslonaca c_j nisu zadata, kao ni temperatura u osi štapa t^o.

Primer 1

$$\delta_{ik} = \int_s \frac{M_i M_k}{EI} ds + \cancelto{0}{\int_s \frac{N_i N_k}{EF} ds} + k \cancelto{0}{\int_s \frac{T_i T_k}{EF} ds}$$

$$\delta_{i0} = \int_s \frac{M_i M_0}{EI} ds + \cancelto{0}{\int_s \frac{N_i N_0}{EF} ds} + k \cancelto{0}{\int_s \frac{T_i T_0}{GF} ds}$$

$$\delta_{it} = \cancelto{0}{\int_s N_i \alpha_t t^o ds} + \int_s M_i \alpha_t \frac{\Delta t}{h} ds$$

$$\delta_{ic} = \cancelto{0}{-\sum_j C_{ji} c_j}$$

Primer 1

Konačni izrazi:

$$\delta_{ik} = \int_s \frac{M_i M_k}{EI} ds$$

$$\delta_{i0} = \int_s \frac{M_i M_0}{EI} ds$$

$$\delta_{it} = \int_s M_i \alpha_t \frac{\Delta t}{h} ds$$

Primer 1

Da bismo odredili vredosti koeficijenata potrebno je da odredimo dijagrame momenata M_1, M_2 i M_0.

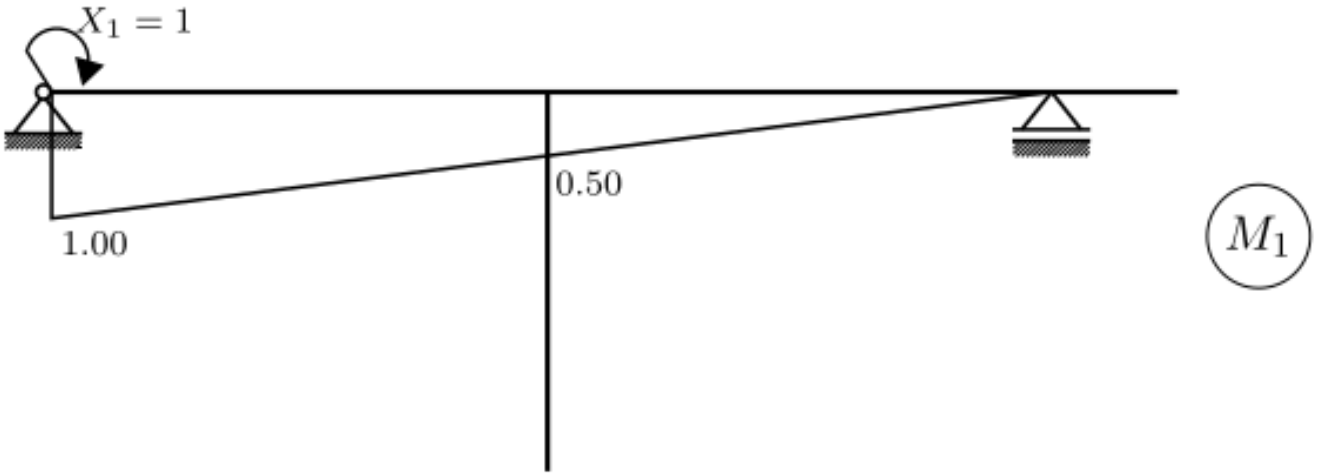
M_1 dijagram momenata u osnovnom sistemu usled delovanja jedinične sile $X_1 = 1$ (stanje $X_1 = 1$)

M_2 dijagram momenata u osnovnom sistemu usled delovanja jedinične sile $X_2 = 1$ (stanje $X_2 = 1$)

M_0 dijagram momenata u osnovnom sistemu usled delovanja opterećenja (stanje $X_i = 0$)

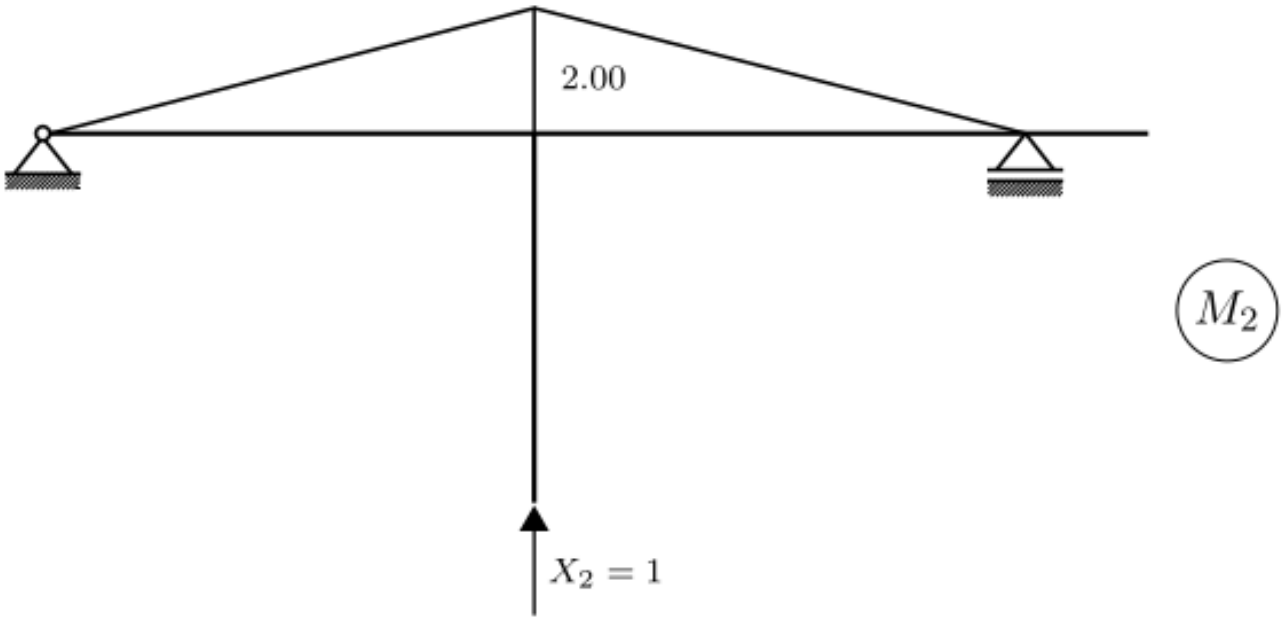
Primer 1

Dijagram momenata u osnovnom sistemu usled delovanja jedinične sile $X_1 = 1$ (stanje $X_1 = 1$)



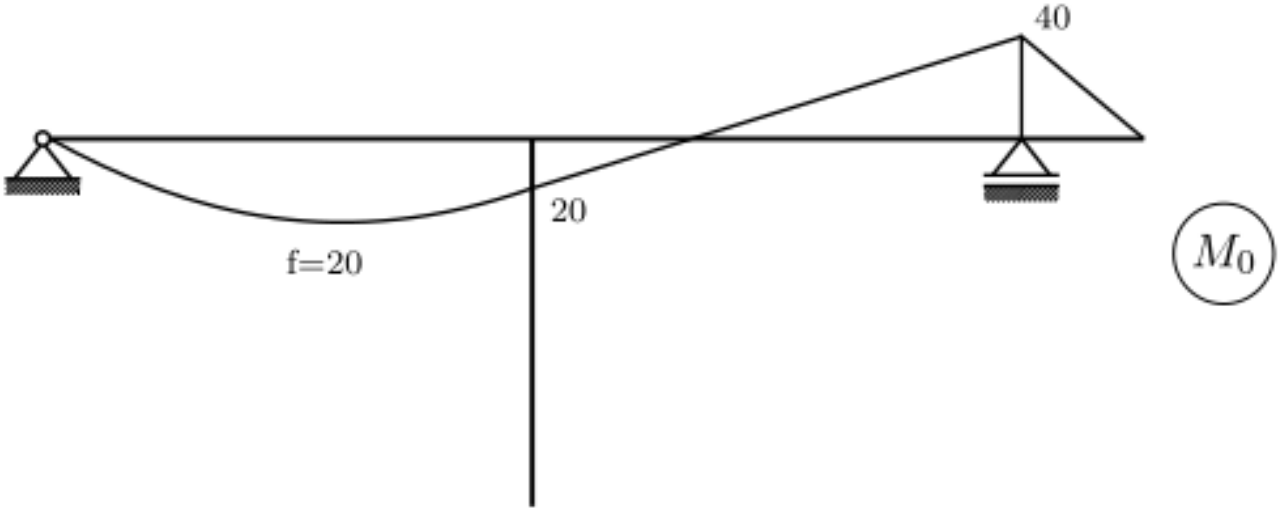
Primer 1

Dijagram momenata u osnovnom sistemu usled delovanja jedinične sile $X_2 = 1$ (stanje $X_2 = 1$)



Primer 1

Dijagram momenata u osnovnom sistemu usled delovanja opterećenja (stanje $X_i = 0$)



Primer 1

$$
\begin{aligned}
EI_c &= 2EI \\
\mathrm{EI_c}\delta_{11} &= \frac{8}{3}1^2 && = \quad 2.6667 \\
\mathrm{EI_c}\delta_{22} &= 2\frac{4}{3}2^2 && = \quad 10.6667 \\
\mathrm{EI_c}\delta_{12} &= -\frac{4}{6}2(2\cdot 0.5+1) - \frac{4}{3}0.5\cdot 2 && = -4
\end{aligned}
$$

Primer 1

$$
\begin{aligned}
EI_c &= 2EI \\
\mathrm{EI_c}\delta_{10} &= -\frac{4}{6}20(2\cdot 0.5+1)+\frac{4}{3}20(1+0.5)+ \\
&+\frac{4}{3}0.5(2\cdot 20-40) && = \quad 66.6667 \\
\mathrm{EI_c}\delta_{20} &= -\frac{4}{3}2\cdot 20-\frac{4}{3}20\cdot 2-\frac{4}{6}2(2\cdot 20-40) && = -\,106.6666
\end{aligned}
$$

Primer 1

$$\begin{bmatrix} 2.6667 & -4 \\ -4 & 10.6667 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 66.6667 \\ -106.6666 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X_1 = -22.86\,\text{kNm}$$

$$X_2 = \quad 1.43\,\text{kN}$$

Primer 1

Kada smo odredili statički nepoznate veličine X_1 i X_2 do sila u presecima možemo doći postavljanjem uslova ravnoteže sila na osnovnom sistemu.

Međutim, jednostavnije je da iskoristimo princip superpozicije, pošto smo već odredili dijagrame momenata M_0, M_1 i M_2:

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$$

Primer 1

Podsećanje

Bilo koji uticaj Z u statički neodređenom nosaču može se prikazati kao zbir uticaja Z_0 u osnovnom sistemu od opterećenja i uticaja Z_i u osnovnom sistemu usled stanja $X_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$$Z = Z_o + Z_1 X_1 + Z_2 X_2 + \cdots + Z_n X_n = Z_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i X_i$$

Primer 1

Na primer, vrednost momenta u uklještenju 1 dobijamo na sledeći način:

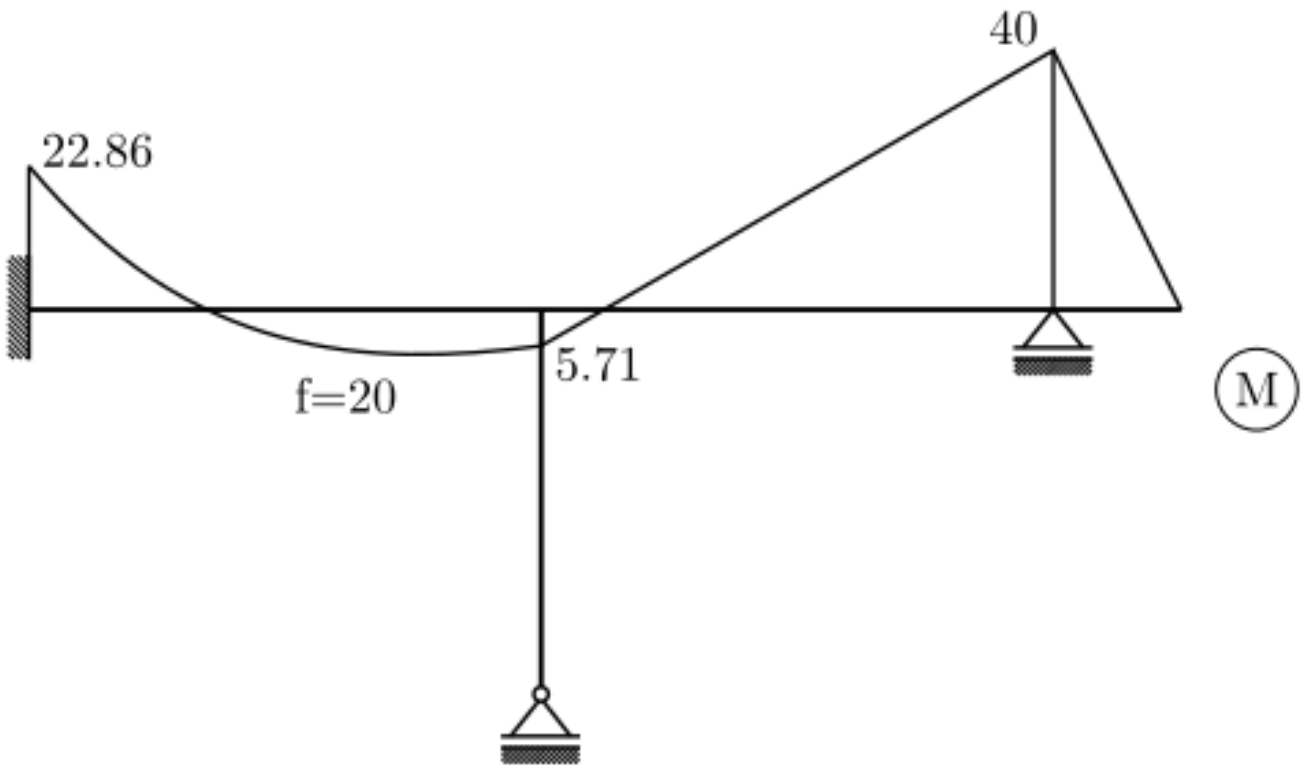
$$\begin{aligned} M &= M_0 & &+M_1X_1 & &+M_2X_2 \\ &= 0 & &+1\cdot(-22.86) & &+0\cdot 1.43 \\ &= -22.86\,\text{kNm} \end{aligned}$$

Vrednost momenta levo od preseka 2 dobijamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} M &= M_0 & &+M_1X_1 & &+M_2X_2 \\ &= 20 & &+0.5\cdot(-22.86) & &+(-2)\cdot 1.43 \\ &= 5.71\,\text{kNm} \end{aligned}$$

Primer 1

Dijagram momenata u datom, statički neodređenom nosaču



Primer 1

Generalno, principom superpozicije možemo doći i do transverzalnih i normalnih sila:

$$T = T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2$$

$$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2$$

Međutim, uticaj transverzalnih i normalnih sila na deformaciju smo zanemarili, pa nam dijagrami sila T_0, T_1, T_2, N_0, N_1 i N_2 nisu bili potrebni za određivanje pomeranja δ_{ik} i $\delta_{i\otimes}$.

Primer 1

Zato je, u ovom slučaju, dijagram transverzalnih sila u datom, statički neodređenom nosaču, jednostavnije odrediti na osnovu dijagrama momenata (slajd 41), a dijagram normalnih sila iz uslova ravnoteže sila u čvorovima.*

*Uraditi za domaći zadatak.