ТЕОРИЈА КОНСТРУКЦИЈА – Б2Х2ТК

ПРЕДАВАЊЕ 2 (23.02.2022.)

www.grf.bg.ac.rs

Студијски програм: ГРАЂЕВИНАРСТВО
Модул: ХИДРОТЕХНИКА И ВОДНО-ЕКОЛОШКО ИНЖЕЊЕРСТВО
Година / семестар: 2. година / 4. семестар
Школска година: 2021/22.

Наставници: в. проф. Витомир Рацић, доц. др Марко Радишић, доц. др Невенка Коларевић

Грађевински факултет Универзитета у Београду - Катедра за техничку механику и теорију конструкција

Сва ауторска права аутора презентације и/или видео снимака су заштићена. Снимак или презентација се могу користити само за наставу на даљину студента Грађевинског факултета Универзитета у Београду у школској 2021/2022 и не могу се користити за друге сврхе без писмене сагласности аутора материјала.

1. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЛИНЕАРНЕ ТЕОРИЈЕ ШТАПА

- **Са предходног предавања**

ПП о малим деф.

$\cos\varphi_T \sim 1$

$\sin d(\varphi-\varphi_T) \sim d(\varphi-\varphi_T)$

$$\boxed{\varepsilon_z = \varepsilon - z\,\frac{d(\varphi-\varphi_T)}{ds}}$$

$$-\frac{d(\varphi-\varphi_T)}{ds} = \varkappa$$

деформац. величина

промена кривине штапа

$$\boxed{\begin{aligned} du &= \varepsilon\,dx - \varphi\,dy \\ dv &= \varepsilon\,dy + \varphi\,dx \\ \varkappa &= -\frac{d(\varphi-\varphi_T)}{ds} \end{aligned}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}}_{\text{померај}} \longleftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varkappa \\ \varphi_T \end{bmatrix}}_{\text{чиста деформација}}$$

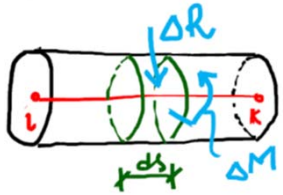
1. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЛИНЕАРНЕ ТЕОРИЈЕ ШТАПА

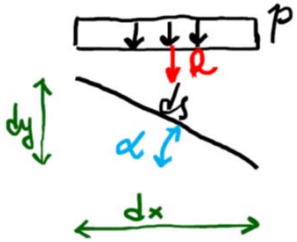
- **1.4. Спољашње и унутрашње силе штапа**

СИЛЕ → АКТИВНЕ, РЕАКТИВНЕ

→ КОНЗЕРВАТИВНЕ, не –||– (НЕЊАЈУ ПРАВАЦ)

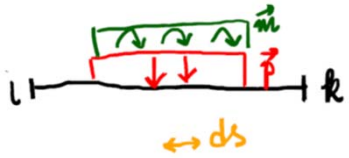
→ ПОВРШИНСКЕ, ЗАПРЕМИНСКЕ





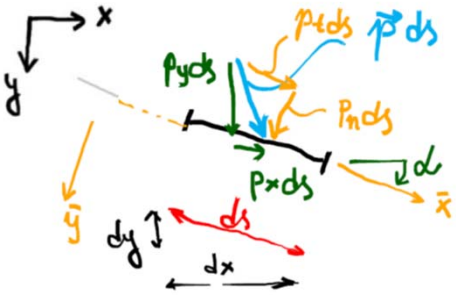
$$R = p\,dx$$

- 1.4.1. Спољашње силе штапа



$$\vec{p} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta s}$$

$$\vec{m} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta s}$$

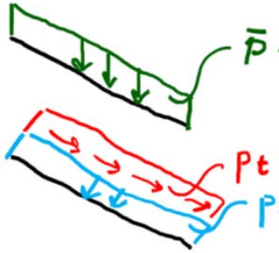


$$dx = ds\cos\alpha$$

$$dy = ds\sin\alpha$$

$$p_x ds = \bar{p}_x dy$$

$$p_y ds = \bar{p}_y dx$$



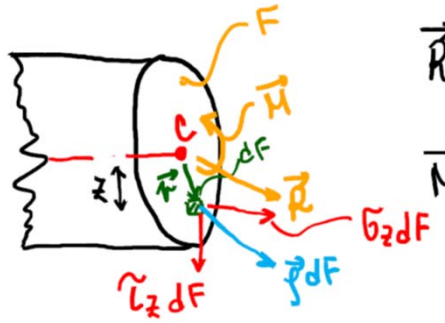
$$\bar{p} = \frac{p\,dx}{ds} = p\cos\alpha$$

$$p_t = \bar{p}\sin\alpha = p\sin\alpha\cos\alpha$$

$$p_n = \bar{p}\cos\alpha = p\cos^2\alpha$$

1. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЛИНЕАРНЕ ТЕОРИЈЕ ШТАПА

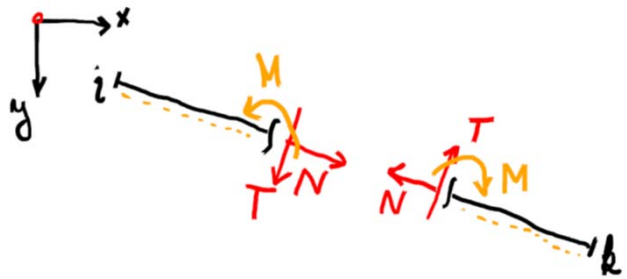
- **1.4. Спољашње и унутрашње силе штапа**
  - 1.4.2. Силе у пресецима штапа

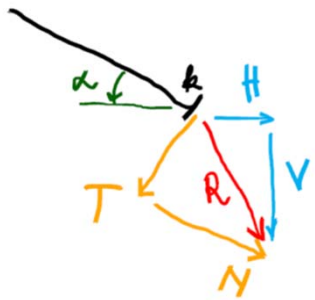


$$\vec{R} = \int_F \vec{p}\, dF$$

$$\vec{M} = \int_F (\vec{r} \times \vec{p})\, dF$$

$$N = \int_F \sigma_z\, dF \qquad T = \int_F \tau_z\, dF \qquad M = \int_F \sigma_z \cdot z\, dF$$





$$N = H\cos\alpha + V\sin\alpha$$

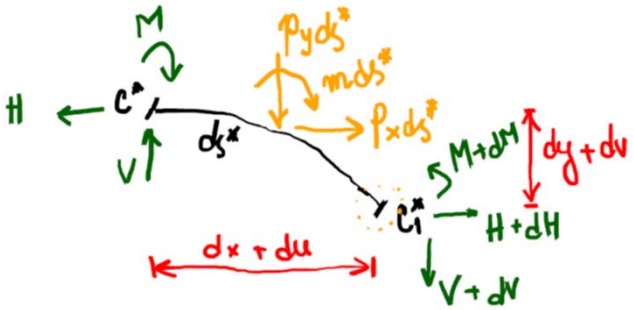
$$T = V\cos\alpha - H\sin\alpha$$

$$H = N\cos\alpha - T\sin\alpha$$

$$V = T\cos\alpha + N\sin\alpha$$

1. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЛИНЕАРНЕ ТЕОРИЈЕ ШТАПА

- **1.4. Спољашње и унутрашње силе штапа**
  - 1.4.3. Услови равнотеже елемента штапа



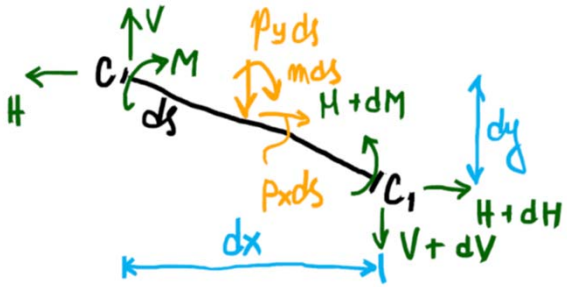
1) $dH + p_x ds^* = 0$

2) $dV + p_y ds^* = 0$

3) $dM - V(dx+du) + H(dy+dv) - m ds^* = 0$

$\boxed{\begin{matrix} V \cdot du \\ H \cdot dv \end{matrix}}$!

2 ПП О СТАТИЧКОЈ ЛИНЕАРНОСТИ ПРОБЛЕМА (ПП О МАЛИМ ПОМЕР.)

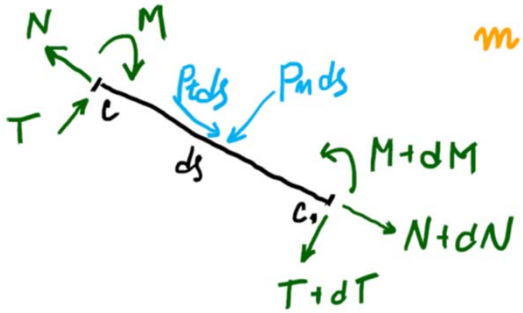


$dx + du \sim dx$

$dy + dv \sim dy$

$$\boxed{\begin{aligned} dH + p_x ds &= 0 \\ dV + p_y ds &= 0 \\ dM - V dx + H dy - m ds &= 0 \end{aligned}}$$

УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ У Г. К. С.



$m \sim 0$!

$$\boxed{\begin{aligned} dN + p_t ds &= 0 \\ dT + p_n ds &= 0 \\ dM - T ds &= 0 \end{aligned}}$$

УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ У Л. К. С. →

$$\frac{dN}{ds} = -p_t \qquad \frac{dT}{ds} = -p_n \qquad \frac{dM}{ds} = T$$

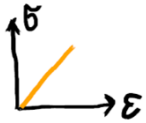
!

1. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЛИНЕАРНЕ ТЕОРИЈЕ ШТАПА

- **1.5. Везе између деформацијских величина (ε, κ, φ_T), сила у пресецима (N, T, M) и температурне промене**

$\boxed{3}$ ПП о физичкој линеарности проблема

→ важи Хуков закон



$$* \quad \boxed{\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} + \alpha_t \cdot t_z^\circ}$$

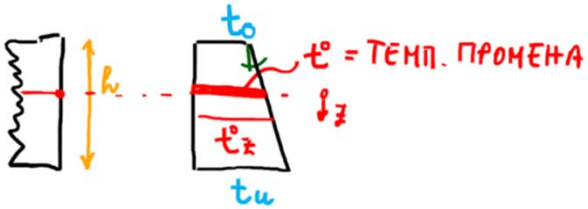
↳ коеф. линеарне термичке експанзије ($\sim 10^{-5} \cdot C^{-1}$)

$$\boxed{\gamma_z = \frac{\tau_z}{G}}$$

модул клизања

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Пасонов коеф.



$* \rightarrow \Delta t = t_u - t_o$ = температурна разлика

$$t_z^\circ = t^\circ + z \cdot \frac{\Delta t}{h}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon + z\mathcal{H}$$

$$* \rightarrow \sigma_z = E \cdot \varepsilon_z - \alpha_t \cdot t_z^\circ = E(\varepsilon + z\mathcal{H}) - \alpha_t \cdot \left(t^\circ + z\frac{\Delta t}{h}\right)$$

$$\sigma_z = E(\varepsilon - \alpha_t t) + E \cdot z\left(\mathcal{H} - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)$$

$$u, v, \varphi \leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \varepsilon, \mathcal{H}, \varphi_T \\ \updownarrow \\ N, T, M \end{matrix}}$$

$$p_n, p_t \leftrightarrow$$

$$N = \int_F \sigma_z dF = E(\varepsilon - \alpha_t t^\circ)\underbrace{\int_F dF}_{F} + E\left(\mathcal{H} - \cancel{\alpha_t \frac{\Delta t}{h}}\right)\int_F z dF$$

$$M = \int_F \sigma_z z dF = E \cdot \cancel{(\varepsilon - \alpha_t t^\circ)}\int_F z dF + E\left(\mathcal{H} - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)\underbrace{\int_F z^2 dF}_{I}$$

$$\int_F dF = F \; ; \; \int_F z^2 dF = I \; ; \; \int_F z dF = 0$$

1. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЛИНЕАРНЕ ТЕОРИЈЕ ШТАПА

- **1.5. Везе између деформацијских величина (ε, κ, φ_T), сила у пресецима (N, T, M) и температурне промене**

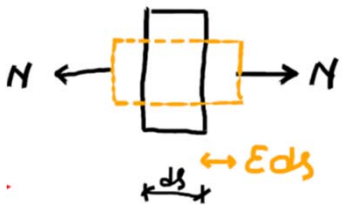
$$N = EF(\varepsilon - \alpha_t t^{\circ})$$
$$M = EI\left(\mathcal{H} - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)$$

$\rightarrow$!

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{EF} + \alpha_t t^{\circ} \\ \mathcal{H} &= \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \end{aligned}}$$

EF = КРУТОСТ НА ИСТЕЗАЊЕ

EI = КРУТОСТ НА САВИЈАЊЕ



$\Delta t > 0$ = ВИЩЕ ЈЕ ЗАГРЕЈАНО ДОЊЕ ВЛАКНО

1. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЛИНЕАРНЕ ТЕОРИЈЕ ШТАПА

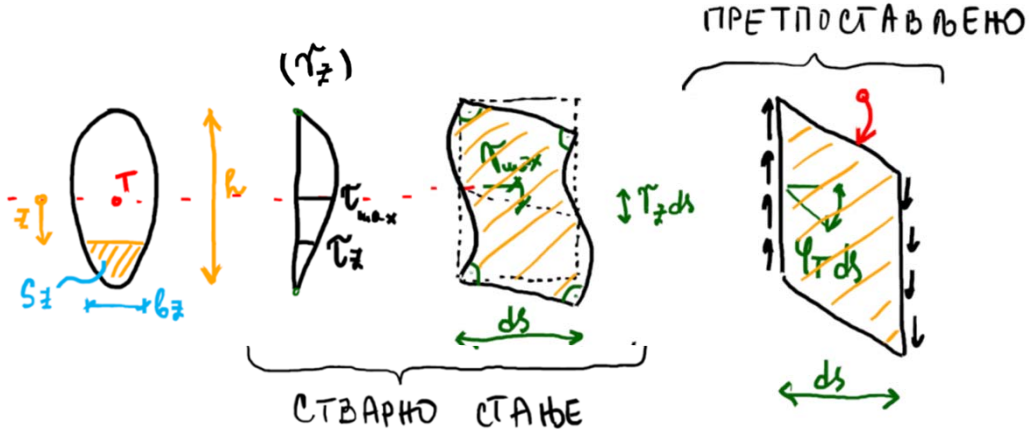
- **1.5. Везе између деформацијских величина (ε, κ, φ_T), сила у пресецима (N, T, M) и температурне промене**

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$$

$$\tau_z = \frac{T \cdot S_z}{I \cdot b_z}$$

$$\downarrow$$

$$\gamma_z = \frac{T}{GI} \cdot \frac{S_z}{b_z}$$



СТВАРНИ РАД:

$$dA = \int_F \tau_z \gamma_z \cdot ds \cdot dF = \int_F \frac{\tau_z^2}{G} \cdot ds\, dF =$$

$$= ds \cdot \frac{T^2}{I^2 G} \cdot \frac{F}{F} \int_F \left(\frac{S_z}{b_z}\right)^2 dF$$

$$dA = ds \cdot \frac{T^2}{GF} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{F}{I^2} \cdot \int_F \left(\frac{S_z}{b_z}\right)^2 dF}}_{k}$$

k = СМИЧУЋИ КОРЕКЦИОНИ ФАКТОР

ЗАВИСИ САМО ОД ОБЛИКА ПРЕСЕКА

 = 1.20

$$\boxed{dA = k \cdot \frac{T^2}{GF} ds}$$

GF = КРУТОСТ НА СМИЦАЊЕ

ПРЕТПОСТАВЉЕНО СТАЊЕ:

$$d\bar{A} = \int_F \tau_z \cdot \varphi_T ds \cdot dF = \varphi_T ds \cancel{\int_F \tau_z dF}^{\,T}$$

$$\boxed{d\bar{A} = T \cdot \varphi_T ds}$$

$$\cancel{T} \cdot \varphi_T \cdot \cancel{ds} = k \frac{T^{\cancel{2}}}{GF} \cancel{ds}$$

$$\boxed{\varphi_T = k \, T/GF}$$

1. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЛИНЕАРНЕ ТЕОРИЈЕ ШТАПА

- **1.6. Рекапитулација једначина штапа**

1) ПП О МАЛИМ ДЕФ.

$du = \varepsilon dx - \varphi dy$

$dv = \varepsilon dy + \varphi dx$

$\varkappa = -\dfrac{d(\varphi - \varphi_T)}{ds}$

КИНЕМАТИЧКЕ РЕЛАЦИЈЕ

$\boxed{u, v, \varphi} \updownarrow \boxed{\varepsilon, \varkappa, \varphi_T}$

2) ПП О МАЛИМ ПОМЕРАЊИМА

$$\left.\begin{aligned} dN + p_t ds &= 0 \\ dT + p_n ds &= 0 \\ dM - T ds &= 0 \end{aligned}\right\}$$

УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ

$\boxed{N, T, M} \updownarrow \boxed{p_t, p_n}$

$\varepsilon, \varkappa, \varphi_T$

ТЕОРИЈА I РЕДА

3) ХУКОВ ЗАКОН

$\varepsilon = \dfrac{N}{EF} + \alpha_t t$

$\varkappa = \dfrac{M}{EI} + \alpha_t \dfrac{\Delta t}{h}$

$\varphi_T = k\, T/GF$

$\varepsilon, \varkappa, \varphi_T \updownarrow N, T, M, \boxed{t}$

9 НЕПОЗНАТИХ $\longleftrightarrow$ 9 ЈЕДНАЧИНА

$u, v, \varphi, \varepsilon, \varkappa, \varphi_T,$
N, T, M

$\boxed{u, v, \varphi, N, T, M} \longleftrightarrow$ 6 ЈЕДНАЧИНА

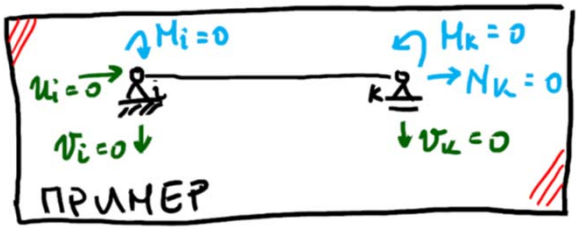
Г.У ПО СИЛАМА

(max 3)

Г.У ПО ПОМЕРАЊИМА

(min 3)

3 + 3 = СТАТИЧКИ ОДРЕЂЕН



ПРИМЕР